Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, Обобщенные когерентные состояния для осцилляторов, связанных с q -полиномами Шарлье, *ТМФ*, 2008, том 155, номер 1, 39–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6191>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 08:45:02

© 2008 г.

В. В. Борзов*, Е. В. Дамаскинский†

ОБОБЩЕННЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ОСЦИЛЛЯТОРОВ, СВЯЗАННЫХ С q -ПОЛИНОМАМИ ШАРЛЬЕ

Продолжено исследование обобщенных когерентных состояний для осцилляторо-подобных систем, связанных с заданным семейством ортогональных многочленов. Рассмотрен случай обобщенных осцилляторов, порождаемых q -полиномами Шарлье.

Ключевые слова: деформированные осцилляторы, когерентные состояния, ортогональные многочлены, q -полиномы Шарлье.

1. ВВЕДЕНИЕ

Роль, которую играют когерентные состояния в квантовой теории, трудно переоценить. Основные сведения, относящиеся к теории когерентных состояний, могут быть найдены в работах [1], [2]. Обширная библиография, включающая работы до 2000 г., имеется в обзоре [3]. В последнее время возрос интерес к построению и исследованию когерентных состояний для осцилляторо-подобных систем, связанных с семействами ортогональных многочленов (см., например, [4]–[7]).

В предыдущих работах авторов (см., например, [8], [9] и цитированные там работы авторов) был предложен новый метод построения осцилляторо-подобных систем, связанных с семействами ортогональных многочленов подобно тому, как обычный бозонный осциллятор связан с полиномами Эрмита, и развита схема построения обобщенных когерентных состояний для таких систем (см. подробное изложение в [9]). В настоящей работе мы применим эту конструкцию к случаю q -полиномов Шарлье.

2. ПОСТРОЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Обобщенный осциллятор определяется перестановочными соотношениями:

$$[a_{\mu}^{-}, a_{\mu}^{+}] = 2(B(\mathcal{N} + I) - B(\mathcal{N})), \quad [\mathcal{N}, a_{\mu}^{\pm}] = \pm a_{\mu}^{\pm} \quad (1)$$

*Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. М. А. Бонч-Бруевича, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: vadim@VB6384.spb.edu

†Санкт-Петербургский военный инженерно-технический университет, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: evd@pdmi.ras.ru

(см. обозначения в [9]). Отметим, что если $B(\mathcal{N})$ является многочленом по $\mathcal{N}$ (это верно в случае классических полиномов как непрерывного, так и дискретного аргумента), то алгебру $\mathcal{A}_\mu$, порождаемую операторами $a_\mu^\pm, \mathcal{N}$ с перестановочными соотношениями (1), будем называть алгеброй обобщенного осциллятора, связанного с канонической системой полиномов $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^\infty$, ортонормированных относительно вероятностной меры μ . Ниже символ $\mathcal{A}_\mu$ мы будем использовать также и для обозначения самого осциллятора. Центр алгебры $\mathcal{A}_\mu$ порождается элементом

$$\mathcal{C} = 2B(\mathcal{N}) - a_\mu^+ a_\mu^-.$$

Если же $B(\mathcal{N})$ не является многочленом, но удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\alpha B(\mathcal{N} + I) + B(\mathcal{N}) + \gamma B(\mathcal{N} - I) = 0, \quad \alpha \neq 0, \quad \gamma \neq 0$$

(что справедливо в случае q -аналогов классических полиномов), то, введя вместо $\mathcal{N}$ два новых генератора $B(\mathcal{N} + I)$ и $D(\mathcal{N}) = B(\mathcal{N} + I) - B(\mathcal{N})$, мы получим алгебру с перестановочными соотношениями

$$\begin{aligned} [a_\mu^-, a_\mu^+] &= 2D(\mathcal{N}), & [B(\mathcal{N} + I), a_\mu^-] &= -a_\mu^- D(\mathcal{N}), & [B(\mathcal{N} + I), D(\mathcal{N})] &= 0, \\ [B(\mathcal{N} + I), a_\mu^+] &= a_\mu^+ \left(\frac{\gamma}{\alpha} D(\mathcal{N}) - \frac{1 + \alpha + \gamma}{\alpha} B(\mathcal{N} + I) \right), \\ [D(\mathcal{N}), a_\mu^-] &= a_\mu^- \left(\frac{1 + \alpha + \gamma}{\gamma} B(\mathcal{N} + I) - \frac{1 + 2\gamma}{\gamma} D(\mathcal{N}) \right), \\ [D(\mathcal{N}), a_\mu^+] &= a_\mu^+ \left(\frac{\gamma - \alpha}{\alpha} D(\mathcal{N}) - \frac{1 + \alpha + \gamma}{\alpha} B(\mathcal{N} + I) \right). \end{aligned}$$

Алгебру обобщенного осциллятора, порождаемую этими соотношениями, мы будем обозначать тем же символом $\mathcal{A}_\mu$. Центр этой алгебры порождается элементом

$$\mathcal{C}_1 = 2B(\mathcal{N} + I) - a_\mu^- a_\mu^+.$$

3. q -ОСЦИЛЛЯТОР ШАРЛЬЕ

3.1. q -Полиномы Шарлье. q -Полиномы Шарлье (связанные с полиномами Аль-Салама–Карлица второго рода) $C_n^\mu(x|q)$, $0 < q < 1$, $0 < \mu < 1$, определяются формулой [10]

$$C_n^\mu(x|q) = {}_2\phi_0 \left(\begin{matrix} q^{-n}, x \\ - \end{matrix} \middle| q, \frac{1}{\mu} q^{1+n} \right), \quad x = q^{-s}, \quad (2)$$

где ${}_2\phi_0$ – базисная гипергеометрическая функция,

$${}_2\phi_0 \left(\begin{matrix} a, b \\ - \end{matrix} \middle| q, z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{-\binom{k}{2}} \frac{(a, b; q)_k}{(q; q)_k} z^k. \quad (3)$$

Здесь используются стандартные обозначения

$$(a; q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - aq^k), \quad (a; q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - aq^k), \quad (a, b; q)_n = (a; q)_n (b; q)_n. \quad (4)$$

Рекуррентные соотношения для полиномов $C_n^\mu(x|q)$ имеют вид

$$\mu q^{-n-1} C_{n+1}^\mu(x|q) + (q^{-n} - 1) C_{n-1}^\mu(x|q) = ((\mu + q) q^{-n-1} - x) C_n^\mu(x|q), \quad n > 0, \quad (5)$$

$$C_0^\mu(x|q) = 1.$$

Эти полиномы ортогональны,

$$\sum_{s=0}^{\infty} C_m^\mu(q^{-s}|q) C_n^\mu(q^{-s}|q) \rho(s) = \frac{(q; q)_n}{\mu^n} \delta_{mn}, \quad (6)$$

относительно дискретной положительной меры

$$\rho(s) = (\mu; q)_\infty \frac{\mu^s q^{s(s-1)}}{(q, \mu; q)_s}, \quad 0 < \mu, q < 1. \quad (7)$$

Следуя [11], введем перенормированные полиномы $\psi_n(x, \mu)$, положив

$$C_n^\mu(x|q) = \gamma_n \psi_n(x, \mu), \quad \gamma_n = (q; q)_n^{1/2} \mu^{-n/2}, \quad n \geq 0, \quad (8)$$

рекуррентные соотношения для которых при $n \geq 0$ имеют вид

$$x \psi_n(x, \mu) = b_n \psi_{n+1}(x, \mu) + a_n \psi_n(x, \mu) + b_{n-1} \psi_{n-1}(x, \mu), \quad (9)$$

$$\psi_0(x, \mu) = 1,$$

где

$$a_n = (\mu + q) q^{-n-1}, \quad b_n = -q^{-n-1} \sqrt{\mu(1 - q^{n+1})}, \quad n \geq 0.$$

Условие ортогональности для полиномов запишется в виде

$$\sum_{s=0}^{\infty} \psi_m(q^{-s}, \mu) \psi_n(q^{-s}, \mu) \rho(s) = \delta_{mn}. \quad (10)$$

Используя q -интеграл Джексона

$$\int_x^\infty f(t) d_q t := x(1 - q) \sum_1^\infty q^{-n} f(q^{-n} x), \quad (11)$$

условие ортогональности (10) можно переписать в виде

$$\psi_m(1, \mu) \psi_n(1, \mu) + \int_1^\infty \psi_m(t, \mu) \psi_n(t, \mu) \tilde{\rho}(t) d_q t = \delta_{mn}, \quad (12)$$

где $\tilde{\rho}(t) = \rho(-\log_q t)$.

Построенное семейство многочленов образует ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\nu = L^2(\mathbb{R}; d\nu)$ относительно вероятностной меры $d\nu(x)$. Поскольку

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{-1} < \infty, \quad (13)$$

то проблема моментов для матрицы Якоби, связанной с рекуррентными соотношениями (9), является неопределенной и мера $d\nu(x)$ определена неоднозначно.

3.2. q -Осциллятор Шарлье. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\nu$, рассматриваемом как реализация пространства Фока, определим оператор координаты X_ν , задав его действие на элементы базиса $\{|n\rangle\}_{n=0}^\infty$ (такого, что $\langle x | n \rangle = \psi_n(x, \mu)$) формулами

$$X_\nu |n\rangle = b_n |n+1\rangle + a_n |n\rangle + b_{n-1} |n-1\rangle, \quad (14)$$

в соответствии с рекуррентными соотношениями (9). Известно, что линейный оператор X_ν , определенный с помощью (14) на линейной оболочке элементов базиса, симметричен и имеет индексы дефекта $(1, 1)$. Следовательно, он имеет бесконечное семейство самосопряженных расширений X_ν^θ , индексируемых параметром $\theta \in [0, \pi]$. Фиксируя самосопряженное расширение X_ν^θ , можно построить N -экстремальную меру $d\nu_\theta$ (см. [12]).

Приведем соответствующие результаты [12], выбрав для определенности значение $\theta = 0$. В этом случае носитель $\Pi_0 = \{x_k\}_{k=-\infty}^\infty$ меры $d\nu_0$ состоит из точек, которые являются корнями трансцендентного уравнения

$$\psi_0(x, \mu) + x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sqrt{\frac{\{2k-2\}!!}{\{2k-1\}!!}} \psi_{2k-1}(x, \mu) = 0, \quad (15)$$

где $\{s\} = b_{s-1}^2/b_0^2$, $s \geq 1$, $\{0\} = 0$. Нагрузки $\sigma_0(x_k)$ в точках носителя Π_0 меры $d\nu_0$ равны

$$\sigma_0(x_k) = -x_k \frac{Q_1(x_k) + \sum_{l=2}^{\infty} (-1)^{l-1} \sqrt{\frac{\{2l-2\}!!}{\{2l-1\}!!}} Q_{2l-1}(x_k)}{\left[\frac{d}{dx} \left(P_0(x) + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \sqrt{\frac{\{2l-2\}!!}{\{2l-1\}!!}} x P_{2l-1}(x) \right) \right] \Big|_{x_k}}. \quad (16)$$

Здесь многочлены $P_n = \psi_n(x, \mu)$ и $Q_n(x, \mu)$ – полиномы 1-го и 2-го рода для матрицы Якоби, связанной с оператором X_ν . Для симметричной матрицы Якоби их явные выражения приведены в [12]. Далее, следуя [11], введем оператор импульса P_ν , задав его действие на элементах базиса в $\mathcal{H}_\nu$ соотношениями

$$P_\nu |n\rangle = i(b_n |n+1\rangle - b_{n-1} |n-1\rangle) + a_n |n\rangle. \quad (17)$$

Этот оператор, так же как и X_ν , симметричен в $\mathcal{H}_\nu$, имеет индексы дефекта $(1, 1)$ и бесконечное семейство самосопряженных расширений. Мы будем рассматривать то самосопряженное расширение оператора P_ν , которое согласовано с выбранным выше самосопряженным расширением оператора X_ν так, чтобы соответствующие операторы рождения и уничтожения были взаимно сопряженными. Сохраним за этими расширениями обозначения X_ν и P_ν . Следуя методу, описанному в [13], оператор P_ν можно реализовать в пространстве $\mathcal{H}_\nu$ как некоторый дифференциально-разностный оператор. Ниже мы получим его явный вид из сравнения наших результатов с результатами работ [14], [15].

Далее, следуя [11], определим осцилляторо-подобную систему, которую будем называть q -осциллятором Шарлье. Введем операторы обобщенной координаты $\tilde{X}_\nu$ и обобщенного импульса $\tilde{P}_\nu$, положив

$$\tilde{X}_\nu = \text{Re}(X_\nu + P_\nu), \quad \tilde{P}_\nu = -i \text{Im}(X_\nu - P_\nu), \quad (18)$$

а также операторы рождения и уничтожения

$$\tilde{a}_\nu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{X}_\nu + i\tilde{P}_\nu), \quad \tilde{a}_\nu^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{X}_\nu - i\tilde{P}_\nu), \quad (19)$$

действующие на базис пространства Фока $\mathcal{H}_\nu$ согласно формулам

$$\tilde{a}_\nu^+|n\rangle = \sqrt{2}b_n|n+1\rangle, \quad \tilde{a}_\nu^-|n\rangle = \sqrt{2}b_{n-1}|n-1\rangle. \quad (20)$$

Гамильтониан q -осциллятора Шарлье выберем в виде

$$H = \tilde{X}_\nu^2 + \tilde{P}_\nu^2. \quad (21)$$

Из результатов работы [11] следует, что спектр этого гамильтониана имеет вид

$$H|n\rangle = \lambda_n|n\rangle, \quad (22)$$

где

$$\lambda_0 = 2b_0^2 = 2\mu(1-q)q^{-2},$$

$$\lambda_n = 2(b_{n-1}^2 + b_n^2) = 2\mu(1-q)q^{-2(n+1)}([n+1]_q - q^2[n]_q);$$

здесь $[n]_q = (1 - q^n)/(1 - q)$ – обычное q -число.

Так как

$$2b_{n-1}^2 - 2b_n^2 = 2\mu \frac{1-q}{q^{2n+1}}([n+1]_q - q^2[n]_q), \quad (23)$$

то перестановочные соотношения для лестничных операторов (19) имеют вид

$$[\tilde{a}_\nu^-, \tilde{a}_\nu^+] = 2\mu(1-q)q^{-2(N+1)}([N+1]_q - q^2[N]_q), \quad (24)$$

где N – оператор, нумерующий элементы базиса: $N|n\rangle = n|n\rangle$.

3.3. Связь с результатами работ Аски–Суслова. В работах [14], [15] рассматривалась дискретная реализация q -осциллятора Арика–Куна, операторы рождения и уничтожения которого удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$a_q^- a_q^+ - q a_q^+ a_q^- = 1. \quad (25)$$

Рассматривалась реализация этих операторов в пространстве $\mathcal{H}_{AS} = L^2(\mathbb{R}_+; d\omega)$, где мера $d\omega$ имеет носитель в точках $s = 0, 1, \dots$ с нагрузкой $\sigma(s) = 1$. Функции Шарлье

$$\varphi_n(s; \mu) = \sqrt{\rho(s)} \psi_n(q^{-s}, \mu) \quad (26)$$

образуют в пространстве $\mathcal{H}_{AS}$ ортонормированный базис:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varphi_m(s; \mu) \varphi_n(s; \mu) = \delta_{mn}. \quad (27)$$

Операторы a_q^- и a_q^+ в этом пространстве имеют вид

$$a_q^- = \frac{1}{\sqrt{1-q}}(\sqrt{\mu}q^s - \sqrt{(1-q^{s+1})(1-\mu q^s)}e^{\partial_s}),$$

$$a_q^+ = \frac{1}{\sqrt{1-q}}(\sqrt{\mu}q^s - e^{-\partial_s}\sqrt{(1-q^{s+1})(1-\mu q^s)}), \quad (28)$$

где $\partial_s = d/ds$, $e^{\alpha \partial_s} f(s) = f(s + \alpha)$. Эти операторы действуют на векторах базиса в $\mathcal{H}_{AS}$ согласно формулам

$$a_q^- \varphi_n(s; \mu) = \sqrt{[n]_q} \varphi_{n-1}(s; \mu), \quad a_q^+ \varphi_n(s; \mu) = \sqrt{[n+1]_q} \varphi_{n+1}(s; \mu). \quad (29)$$

Если построить унитарное преобразование, связывающее пространства $\mathcal{H}_\nu$ и $\mathcal{H}_{AS}$, то из формул (28) получаем явные выражения для операторов рождения и уничтожения в нашем варианте q -осциллятора Шарлье

$$\begin{aligned} \tilde{a}_\nu^+ &= -\sqrt{2\mu(1-q)} \rho^{-1/2} a_q^+ \rho^{1/2} \rho^{-(N+I)}, \\ \tilde{a}_\nu^- &= -\sqrt{2\mu(1-q)} \rho^{-1/2} a_q^- \rho^{1/2} \rho^{-N}. \end{aligned} \quad (30)$$

4. КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ q -ОСЦИЛЛЯТОРА ШАРЛЬЕ

Определим когерентные состояния типа Барута–Жирарделло для q -осциллятора Шарлье стандартным образом [16], [17]:

$$\tilde{a}_\nu^- |z\rangle = z |z\rangle, \quad |z\rangle = \mathcal{N}^{-1/2} (|z|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(\sqrt{2} b_{n-1})!} |n\rangle, \quad (31)$$

где $(\sqrt{2} b_{n-1})! = (\sqrt{2} b_0)(\sqrt{2} b_1) \dots (\sqrt{2} b_{n-1})$. Учитывая соотношение

$$(2b_{n-1}^2)! = (2\mu(1-q))^n q^{-n(n+1)} [n]_q! = \left(\frac{2\mu}{q}\right)^n q^{-n^2} (q; q)_n, \quad (32)$$

вычисляем нормирующий множитель

$$\mathcal{N}(|z|^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{q|z|^2}{2\mu}\right)^n \frac{q^{n^2}}{(q; q)_n} = {}_0\phi_1\left(- \middle| q; \frac{q^2|z|^2}{2\mu}\right) \quad (33)$$

и перекрытие двух когерентных состояний

$$\langle z_1 | z_2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{q\bar{z}_1 z_2}{2\mu}\right)^n \frac{q^{n^2}}{(q; q)_n} = {}_0\phi_1\left(- \middle| q; \frac{q^2\bar{z}_1 z_2}{2\mu}\right). \quad (34)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \langle x | z \rangle &= \left({}_0\phi_1\left(- \middle| q; \frac{q^2|z|^2}{2\mu}\right)\right)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{(2\mu/q)^{n/2}}\right)^n \frac{q^{n^2/2}}{\sqrt{(q; q)_n}} \psi_n(x, \mu) = \\ &= \left({}_0\phi_1\left(- \middle| q; \frac{q^2|z|^2}{2\mu}\right)\right)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\binom{n}{2}}}{(q; q)_n} \left(\frac{qz}{\sqrt{2}}\right)^n C_n^\mu(x | q). \end{aligned} \quad (35)$$

Используя связь q -полиномов Шарлье с полиномами Аль-Салама–Карлица 2-го рода [10]

$$C_n^\mu(x | q) = V_n^{\mu/q}(x; q) q^{\binom{n}{2}} \left(-\frac{q}{\mu}\right)^n,$$

где

$$V_n^a(x; q) = (-a)^n q^{-\binom{n}{2}} {}_2\phi_0 \left(\begin{matrix} q^{-n}, x \\ - \end{matrix} \middle| q; \frac{q^n}{a} \right),$$

и производящую функцию для полиномов V_n^a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2\binom{n}{2}}}{(q; q)_n} V_n^a(x; q) t^n = (at; q)_{\infty} \cdot {}_1\phi_1 \left(\begin{matrix} x \\ at \end{matrix} \middle| q; t \right),$$

соотношение (35) можно переписать в виде [10]

$$\begin{aligned} \langle x | z \rangle &= \left({}_0\phi_1 \left(\begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix} \middle| q; \frac{|z|^2}{2\mu} \right) \right)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2\binom{n}{2}}}{(q; q)_n} \left(-\frac{q^2 z}{\sqrt{2\mu}} \right)^n V_n^{\mu/q}(x; q) = \\ &= \left({}_0\phi_1 \left(\begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix} \middle| q; \frac{|z|^2}{2\mu} \right) \right)^{-1/2} \left(-\frac{qz}{\sqrt{2}}; q \right)_{\infty} {}_1\phi_1 \left(\begin{matrix} x \\ -\frac{qz}{\sqrt{2}} \end{matrix} \middle| q; -\frac{q^2 z}{\sqrt{2}\mu} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Осталось доказать соотношение (сверх)полноты

$$\iint_{\mathbb{C}} \widehat{W}(|z|^2) |z\rangle \langle z| d^2 z = \mathbf{1}, \quad (37)$$

т.е. построить меру

$$d\mu(|z|^2) = \widehat{W}(|z|^2) d^2 z, \quad d^2 z = d(\operatorname{Re} z) d(\operatorname{Im} z). \quad (38)$$

Известно [16], что для этого надо решить классическую проблему моментов Стильбеса

$$\pi \int_0^{\infty} x^n W(x) dx = \left(\frac{2\mu}{q} \right)^n q^{-n^2} (q; q)_n, \quad (39)$$

где

$$W(x) = \frac{\widehat{W}(x)}{\mathcal{N}(x)}, \quad x = |z|^2.$$

При замене переменных

$$x = \frac{2\mu}{q} y, \quad \frac{2\pi\mu}{q} W\left(\frac{2\mu}{q} y\right) = \widetilde{W}(y),$$

проблема моментов принимает вид

$$\int_0^{\infty} y^n \widetilde{W}(y) dy = q^{-n^2} (q; q)_n. \quad (40)$$

В работе [18] было получено решение этой задачи:

$$\widetilde{W}(y) = \frac{1-q}{q^2} \sum_{k=0}^{\infty} y \cdot {}_2\phi_0 \left(\begin{matrix} 0, 0 \\ - \end{matrix} \middle| q; q^{-2} y \right) (\delta(y - q^{-(k-1)}) + \delta(y - q^{k+2})), \quad (41)$$

так что

$$\begin{aligned} \widehat{W}(x) &= \frac{1-q}{2\pi\mu q} {}_0\phi_1 \left(\begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix} \middle| q; q^{-2} \frac{x}{2\mu} \right) \sum_{k=0}^{\infty} q \frac{x}{2\mu} {}_2\phi_0 \left(\begin{matrix} 0, 0 \\ - \end{matrix} \middle| q; q^{-1} \frac{x}{2\mu} \right) \times \\ &\times \left(\delta\left(q \frac{x}{2\mu} - q^{-(k-1)}\right) + \delta\left(q \frac{x}{2\mu} - q^{k+2}\right) \right). \end{aligned} \quad (42)$$

В результате для меры $d\mu(|z|^2)$ имеем

$$d\mu(|z|^2) = \frac{1-q}{4\pi\mu^2} {}_0\phi_1\left(\begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix} \middle| q; q^2 \frac{|z|^2}{2\mu}\right) \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} |z|^2 {}_2\phi_0\left(\begin{matrix} 0, 0 \\ - \end{matrix} \middle| q; q \frac{|z|^2}{2q\mu}\right) \left(\delta\left(q \frac{|z|^2}{2\mu} - q^{-(k-1)}\right) + \delta\left(q \frac{|z|^2}{2\mu} - q^{k+2}\right) \right) d^2z.$$

Отметим в заключение, что, как было показано в [17], на когерентных состояниях соотношение неопределенности переходит в равенство.

Благодарности. Авторы признательны оргкомитету конференции “Классические и квантовые интегрируемые системы” за представленную им возможность участия в столь представительном совещании. Авторы благодарны П. П. Кулишу за внимание к работе и полезные замечания. Данное исследование осуществлялось при поддержке РФФИ (грант № 06-01-00451).

Список литературы

- [1] А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их применения*, Наука, М., 1987.
- [2] Дж. Клаудер, Э. Сударшан, *Основы квантовой оптики*, Мир, М., 1979.
- [3] V. V. Dodonov, *J. Opt. B*, **4**:1 (2002), R1–R33.
- [4] R. Floreanini, L. Vinet, *Lett. Math. Phys.*, **22**:1 (1991), 45–54.
- [5] Е. В. Дамаскинский, П. П. Кулиш, *Записки науч. сем. ЛОМИ*, **199** (1992), 81–90.
- [6] N. M. Atakishiyev, E. I. Jafarov, Sh. M. Nagiyev, K. B. Wolf, *Rev. Mexicana Fis.*, **44**:3 (1998), 235–244; [arXiv: math-ph/9807035](#).
- [7] A. Odziejewicz, M. Horowski, A. Tereszkiewicz, *J. Phys. A*, **34** (2001), 4353–4376.
- [8] В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, *Записки науч. сем. ЛОМИ*, **335** (2006), 75–99.
- [9] В. В. Борзов, *ТМФ*, **153**:3 (2007), 363–380.
- [10] R. Koekoek, R. F. Swarttouw, *The Askey scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue*, Report № 94-05, Delft University of Technology, 1994; [arXiv: math.CA/9602214](#).
- [11] V. V. Borzov, *Integral Transforms Spec. Funct.*, **12**:2 (2001), 115–138; [arXiv: math.CA/0002226](#).
- [12] V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, P. P. Kulish, *Rev. Math. Phys.*, **12**:5 (2000), 691–710.
- [13] V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, *Integral Transforms Spec. Funct.*, **13**:6 (2002), 547–554; [arXiv: math.QA/0101215](#).
- [14] R. Askey, S. K. Suslov, *J. Physics A*, **26** (1993), L693–L698; [arXiv: math/9307206](#).
- [15] R. Askey, S. K. Suslov, *Lett. Math. Phys.*, **29** (1993), 123–132; [arXiv: math/9307207](#).
- [16] J. R. Klauder, K. A. Penson, J.-M. Sixdeniers, *Phys. Rev. A*, **64**:1 (2001), 013817.
- [17] V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, “Coherent states and uncertainty relations for generalized oscillators connected with the given families of orthogonal polynomials”, *Proc. Intern. Semin. Day on DIFFRACTION 2005*, ed. I. V. Andronov, St. Petersburg State Univ., St. Petersburg, 2005, 40–49.
- [18] В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, *Записки науч. сем. ЛОМИ*, **308** (2004), 48–66.