Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Вернов, Построение точных решений в двухполевых космологических моделях, *ТМФ*, 2008, том 155, номер 1, 47–61

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6192>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 03:55:44

© 2008 г.

С. Ю. Вернов*

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ В ДВУХПОЛЕВЫХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Построена модель темной энергии с фантомным скалярным полем, обычным скалярным полем и полиномиальным потенциалом, происходящим из полевой теории струн. Найдено двухпараметрическое множество точных решений уравнений Фридмана. Построен потенциал, удовлетворяющий полученным из теории струн условиям и такой, что некоторые точные решения соответствуют при больших временах параметру состояния $w_{DE} > -1$, тогда как другие соответствуют $w_{DE} < -1$. Показана эффективность метода суперпотенциала при поиске новых точных решений.

Ключевые слова: полевая теория струн, космология, фантом, темная энергия, точное решение, метод суперпотенциала.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее важных недавних результатов в космологии является заключение о том, что комбинированный анализ данных, полученных при изучении сверхновых типа Ia, галактических кластеров и на эксперименте WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), убедительно показывает ускоренное расширение Вселенной [1], [2].

Космологическое ускорение указывает на то, что в настоящее время во Вселенной доминирует равномерно распределенная медленно изменяющаяся космическая жидкость с отрицательным давлением, так называемая темная энергия [3]–[8]. Для спецификации различных типов космической жидкости обычно используется феноменологическое соотношение между давлением (лагранжевой плотностью) p и плотностью энергии ρ каждой из компонент жидкости $p = w\rho$. Функция w называется параметром состояния. Современные эксперименты [1]–[4] свидетельствуют о том, что Вселенная является пространственно плоской и в настоящее время параметр состояния темной энергии близок к -1 : $w_{DE} = -1 \pm 0.2$. Параметр состояния

*Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: svernov@theory.sinp.msu.ru

$w_{DE} \equiv -1$ соответствует космологической константе. Как отмечено в работе [9], параметр состояния, эволюционирующий от $w_{DE} \simeq 0$ до $w_{DE} \leq -1$, лучше отвечает экспериментальным данным, чем $w_{DE} \equiv -1$.

Стандартным способом получения зависящего от времени параметра состояния является включение скалярных полей в космологическую модель. При достаточно общих предположениях в рамках четырехмерной модели с одним скалярным полем может быть реализована только одна из возможностей: или $w_{DE} \geq -1$ (модели квинтэссенции), или $w_{DE} \leq -1$ (фантомные модели) [10]. Двухполевые модели с пересечением барьера космологической константы $w_{DE} = -1$ известны как квинтом (quintom) модели и включают одно фантомное скалярное поле и одно стандартное скалярное поле. Отметим, что большинство феноменологических моделей, описывающих пересечение барьера космологической константы [11]–[14], содержат либо несколько скалярных полей, либо модифицированную гравитацию.

В настоящее время струнные и D-бреные модели находят космологические приложения, связанные с ускоренным расширением Вселенной. В феноменологических моделях, описывающих случай $w_{DE} < -1$, все стандартные энергетические условия нарушены и есть проблемы неустойчивости как на классическом, так и на квантовом уровне (см. работы [5], [15], [16] и ссылки в них). Возможным способом избежать проблемы неустойчивости фантомной модели является ее построение как эффективной модели, возникающей из более фундаментальной теории с нормальным знаком кинетического члена. В частности, если мы рассмотрим модель с высшими производными, например содержащую $\phi e^{-\square\phi}$, то первая нетривиальная аппроксимация дает $\phi e^{-\square\phi} \simeq \phi^2 - \phi\square\phi$, т.е. кинетический член имеет неправильный (духовый) знак. Оказывается, что именно такая возможность появляется в полевой теории струн [17] (см. также работы [14], [16]), а именно в теории фермионной NSR-струны с учетом GSO-сектора [18]. В качестве скалярного поля ϕ выступает тахион открытой струны. Согласно гипотезе Сена (см. обзоры [19]) данный тахион описывает распад браны, при котором происходит медленный переход в стабильный вакуум, характеризующийся отсутствием состояний открытой струны, т.е. соответствующий состояниям замкнутой струны. Четырехмерная гравитационная модель с фантомным скалярным полем рассматривается как приближение модели теории струн, что дает возможность решить проблему неустойчивости.

В данной статье мы рассматриваем струнную гравитационную модель с двумя скалярными полями и полиномиальным потенциалом. Предлагаемая модель является обобщением однополевой космологической модели, предложенной в работе [18]. Первые двухполевые обобщения данной модели [20] обладают однопараметрическими семействами точных решений. Здесь мы строим новую модель с двухпараметрическим семейством точных решений. При больших временах для некоторых значений параметров $w_{DE} < -1$, тогда как для других $w_{DE} > -1$. Отметим, что различное поведение w_{DE} при больших временах соответствует одному и тому же потенциалу и одинаковым асимптотическим условиям для полей.

2. ДВУХПОЛЕВЫЕ МОДЕЛИ, СВЯЗАННЫЕ С ТЕОРИЕЙ СТРУН

Рассматривается модель пространственно плоской фридмановской Вселенной с фантомным скалярным полем ϕ и стандартным скалярным полем ξ . Фантомное поле представляет собой тахион открытой струны, тогда как обычное скалярное поле соответствует тахиону замкнутой струны [17], [20]–[22]. Поскольку происхождение скалярных полей связано с теорией струн, действие содержит характерную массу струны M_s и безразмерную константу взаимодействия открытых струн g_o :

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{M_P^2}{2M_s^2} R + \frac{1}{g_o^2} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \partial_\mu \xi \partial_\nu \xi) - V(\phi, \xi) \right) \right), \quad (1)$$

где M_P – масса Планка. Фридмановская метрика $g_{\mu\nu}$ является пространственно плоской:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2),$$

где $a(t)$ – масштабный фактор. Координаты (t, x_i) и поля ϕ и ξ являются безразмерными. Если скалярные поля зависят только от времени, то уравнения движения имеют следующий вид:

$$H^2 = \frac{1}{3m_p^2} \left(-\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \dot{\xi}^2 + V \right), \quad (2)$$

$$\dot{H} = \frac{1}{2m_p^2} (\dot{\phi}^2 - \dot{\xi}^2), \quad (3)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = \frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad \ddot{\xi} + 3H\dot{\xi} = -\frac{\partial V}{\partial \xi}. \quad (4)$$

Для краткости мы используем безразмерный параметр $m_p^2 = g_o^2 M_P^2 / M_s^2$. Параметр Хаббла $H \equiv \dot{a}(t)/a(t)$, а точка обозначает производную по времени. Отметим, что только три из четырех уравнений (2)–(4) независимы.

Параметр состояния темной энергии w_{DE} можно выразить через H :

$$w_{DE} = -1 - \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (5)$$

Пересечение барьера космологической постоянной $w_{DE} = -1$ соответствует изменению знака $\dot{H}$.

В модели, предложенной в работе [17] (см. также работы [14], [18], [20], [23], [24]), наша Вселенная рассматривается как медленно распадающаяся D3-брана, динамика которой задается тахионом открытой струны. Для описания динамики данного тахиона используется метод обрезания по уровням. Примечательной особенностью подобной динамики тахиона является нелокальное полиномиальное взаимодействие [19], [25]–[30]. Как показано в работе [31], тахион открытой струны эффективно моделируется скалярным полем с отрицательным кинетическим членом.

Обратная реакция браны описывается динамикой тахиона замкнутой струны. Скалярное поле ξ связано с сектором замкнутых струн [32]. Его локальное описание содержит стандартный кинетический член [22] и, возможно, неполиномиальное самодействие [33].

В данной статье мы рассматриваем локальные модели с эффективными полиномиальными потенциалами $V(\phi, \xi)$. Форма этих потенциалов предполагается заданной кубической теорией открытых струн с помощью метода обрезания по уровням [25], [26]. В случае плоского пространства-времени эффективная локальная теория обладает четным потенциалом четвертой степени и имеет решения типа кинка. В неплоском случае для сохранения аналитического вида решений нужно рассмотреть четный потенциал шестой степени, переходящий в пределе плоского пространства-времени в потенциал типа Хиггса [18]. Точная форма взаимодействия открытых и замкнутых струн неизвестна, поэтому, следуя статье [20], мы рассматриваем простейшее полиномиальное взаимодействие.

Мы налагаем на потенциал $V(\phi, \xi)$ следующие ограничения:

- потенциал – полином шестой степени:

$$V(\phi, \xi) = \sum_{k=0}^6 \sum_{j=0}^{6-k} c_{kj} \phi^k \xi^j; \quad (6)$$

- потенциал является четным: $V(\phi, \xi) = V(-\phi, -\xi)$;
- коэффициенты при 5-й и 6-й степенях имеют порядок $1/m_p^2$, и в пределе $m_p^2 \rightarrow \infty$ получается потенциал четвертой степени.

Из полевой теории струн мы также предположим асимптотические условия для полей. Напомним, что имеется в виду следующая картина. Мы предполагаем, что фантомное поле $\phi(t)$ плавно движется из нестабильного возмущенного вакуума ($\phi = 0$) в невозмущенный и останавливается в нем. Другими словами, функция $\phi(t)$ обращается в нуль в некоторой точке (пусть $\phi(0) = 0$) и стремится к ненулевой асимптотике при $t \rightarrow +\infty$: $\phi(+\infty) = A$. Поле $\xi(t)$ соответствует замкнутой струне и стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

3. МЕТОД СУПЕРПОТЕНЦИАЛА

Гравитационные модели со скалярными полями играют важную роль в космологии и теориях с дополнительными измерениями. Одной из главных проблем исследования подобных моделей является нахождение точных решений неинтегрируемых уравнений движения.

В то же время легко построить потенциал для заданных частных решений. Если явная форма полей $\phi(t)$ и $\xi(t)$ задана, то, используя уравнение (3), мы получаем $H(t)$ с точностью до константы:

$$H(t) = \frac{1}{2m_p^2} \left(\int^t \dot{\phi}^2(\tau) d\tau - \int^t \dot{\xi}^2(\tau) d\tau \right) + C. \quad (7)$$

Потенциал как функцию времени можно выразить через $H(t)$:

$$V(t) = m_p^2 (3H(t)^2 + \dot{H}(t)). \quad (8)$$

Этот прямой метод вычисления потенциала для заданных решений очень эффективен при рассмотрении одно- и двухполевых моделей с потенциалами вида

$V(\phi, \xi) = e^{\alpha\xi} V_1(\phi)$ и $V(\phi, \xi) = e^{\alpha\phi} V_2(\xi)$, где α – константа [13]. Для двухполевых моделей с полиномиальным потенциалом данный метод не столь эффективен. Отметим, что вышеупомянутый метод бесполезен при поиске новых решений уравнений движения, соответствующих построенному потенциалу.

В данной статье мы используем метод суперпотенциала и показываем, что этот метод позволяет найти не только потенциал, но и новые точные решения. Метод суперпотенциала был предложен для построения потенциалов, соответствующих точным решениям пятимерной гравитационной модели [34]. Главная идея метода заключается в рассмотрении функции $H(t)$ (параметра Хаббла в космологии) как функции (суперпотенциала) скалярных полей: $H(t) = W(\phi(t), \xi(t))$. Уравнение (3) можно переписать в виде

$$\frac{\partial W}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{\partial W}{\partial \xi} \dot{\xi} = \frac{1}{2m_p^2} (\dot{\phi}^2 - \dot{\xi}^2). \quad (9)$$

Если найден такой суперпотенциал $W(\phi, \xi)$, что выполнены следующие соотношения:

$$\dot{\phi} = 2m_p^2 \frac{\partial W}{\partial \phi}, \quad \dot{\xi} = -2m_p^2 \frac{\partial W}{\partial \xi}, \quad (10)$$

$$V = 3m_p^2 W^2 + 2m_p^4 \left(\left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 - \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 \right), \quad (11)$$

то соответствующие $\phi(t)$, $\xi(t)$ и $H(t)$ являются решением системы (2)–(4).

Метод суперпотенциала разделяет систему уравнений (2)–(4) на две части: систему (10), которая, как правило, интегрируема при заданном полиноме $W(\phi, \xi)$, и уравнение (11), которое не интегрируемо, если $V(\phi, \xi)$ – полином, но имеет частные решения в виде полиномов. Стандартный способ применения метода суперпотенциала не предполагает решения уравнения (11). Потенциал $V(\phi, \xi)$ строится по заданному $W(\phi, \xi)$.

В двухполевых моделях метод суперпотенциала способствует нахождению новых решений. Действительно, дифференциальные уравнения (10) формируют систему второго порядка. Если эта система интегрируема, то мы получаем двухпараметрическое множество решений. Фиксация явного вида полей $\phi(t)$ и $\xi(t)$ равносильна заданию однопараметрического множества решений. Метод суперпотенциала позволяет обобщить это множество решений до двухпараметрического множества. С другой стороны, с помощью этого метода можно строить различные формы потенциала, соответствующие одному и тому же однопараметрическому множеству решений.

Идея рассмотрения параметра Хаббла как функции скалярных полей и преобразования (2)–(4) в систему (10), (11) используется в формулировке Гамильтона–Якоби уравнений Фридмана [35], [36] (см. также книгу [37]) и не связана с теориями суперсимметрии и супергравитации. В то же время метод, основанный на идее использования для поиска точных частных решений системы (10), (11) вместо исходных уравнений движения, активно применяется в двумерных полевых моделях [38], [39] и супергравитации [40]. Уравнения (10) известны как уравнения Богомольного [41]

(см. также работу [39]). Метод суперпотенциала является комбинацией и естественным расширением этих двух методов. Он активно используется в космологии [8], [20], [42], [43]. Отметим обобщения данного метода на уравнения движения, описывающие замкнутые и открытые фридмановские Вселенные [42], системы с холодной темной материей [43] и теорию Бранса–Дикке [44].

4. РАЗЛИЧНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ С ОДИНАКОВЫМИ РЕШЕНИЯМИ

В этом разделе мы покажем, что метод суперпотенциала позволяет находить различные формы потенциала $V(\phi, \xi)$ для одних и тех же $\phi(t)$, $\xi(t)$ и $H(t)$.

Используя асимптотические условия, предположим следующую явную форму полей:

$$\phi(t) = A \operatorname{th}(\omega t), \quad \xi(t) = \frac{A\sqrt{2(1+b)}}{\operatorname{ch}(\omega t)}, \quad (12)$$

причем $A > 0$, $\omega > 0$ и $b > -1$. Отметим, что эти решения являются естественным обобщением решений типа кинка, полученных в однополевой фантомной модели [18].

Построим потенциал, соответствующий полям (12). Функции ϕ и ξ – решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{\phi} = A\omega - \frac{\omega}{A}\phi^2, \quad \dot{\xi} = \omega\xi\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{2(1+b)A^2}}. \quad (13)$$

Прямое использование метода суперпотенциала дает

$$\frac{\partial W}{\partial \phi} = \frac{\omega}{2m_p^2} \left(A - \frac{1}{A}\phi^2 \right), \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} = -\frac{\omega\xi}{2m_p^2} \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{2(1+b)A^2}}. \quad (14)$$

Следовательно,

$$H \equiv W = \frac{\omega}{6m_p^2} \left(3A\phi - \frac{\phi^3}{A} - \sqrt{\frac{(2(1+b)A^2 - \xi^2)^3}{2(1+b)A^2}} + H_0 \right), \quad (15)$$

где H_0 – произвольная константа. Различные значения H_0 соответствуют различным $V(\phi, \xi)$. Полученные потенциалы

$$V = \omega^2 \left(\frac{(A^2 - \phi^2)^2}{2A} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^4}{4(1+b)A^2} \right) + 3m_p^2 W^2 \quad (16)$$

полиномиальны только в случае плоского пространства-времени ($m_p^2 = \infty$) и не удовлетворяют условиям, рассматриваемым в разделе 2. Чтобы построить полиномиальный потенциал, мы используем тот факт, что функции (12) удовлетворяют не только системе (13), но также и следующей системе уравнений:

$$\dot{\phi} = Ab\omega \left(\frac{\phi^2}{A^2} - 1 \right) + \frac{\omega\xi^2}{2A}, \quad \dot{\xi} = -\frac{\omega}{A}\phi\xi. \quad (17)$$

Соответствующие параметр Хаббла (суперпотенциал) и потенциал имеют вид (чтобы получить четный потенциал, мы положили $H_0 = 0$)

$$H = \widetilde{W} = \frac{\omega\phi}{2m_p^2} \left(Ab \left(\frac{\phi^2}{A^2} - 1 \right) + \frac{\xi^2}{2A} \right), \quad (18)$$

$$\tilde{V} = \frac{\omega^2}{2} \left(b(\phi^2 - 1) + \frac{1}{2}\xi^2 \right)^2 - \frac{\omega^2}{2A^2} \phi^2 \xi^2 + \frac{3\omega^2 \phi^2}{4m_p^2} \left(Ab \left(\frac{\phi^2}{3A^2} - 1 \right) + \frac{\xi^2}{2A} \right)^2. \quad (19)$$

Этот пример показывает, что одинаковые функции $\phi(t)$, $\xi(t)$ и $H(t)$ могут соответствовать существенно различным потенциалам $V(\phi, \xi)$. Кроме того, решения не изменятся при добавлении к потенциалу $\tilde{V}$ (или V) любой функции δV такой, что δV , $\partial(\delta V)/\partial\phi$ и $\partial(\delta V)/\partial\xi$ равны нулю на решениях. Например,

$$\delta V = K(\phi, \xi) \left[\phi^2 + \frac{1}{2(1+b)} \xi^2 - A^2 \right]^2, \quad (20)$$

где $K(\phi, \xi)$ является гладкой функцией.

5. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА СУПЕРПОТЕНЦИАЛА

В предыдущем разделе мы показали, как можно выбрать потенциал для заданных решений. Теперь мы продемонстрируем возможность нахождения новых решений с помощью метода суперпотенциала. Рассмотрим модель с потенциалом (19). Легко заметить, что система (17) имеет не только решения (12), но и тривиальные решения $\phi(t) = \pm A$, $\xi(t) = 0$, а также решения

$$\phi(t) = -A \operatorname{th}(\omega b(t - t_0)), \quad \xi(t) = 0. \quad (21)$$

Если $\xi(t) \neq 0$, то, используя второе уравнение системы (17), мы получаем дифференциальное уравнение второго порядка для $\xi(t)$:

$$\ddot{\xi}(t) = \omega^2 b \xi(t) - \frac{\omega^2 \xi^3(t)}{2A^2} + \frac{(1-b)\xi^2(t)}{\xi(t)}. \quad (22)$$

Решения уравнения (22) получаются в квадратурах:

$$t - t_0 = \pm \int \frac{A\sqrt{2(1+b)}\xi^{b-1}}{\omega\sqrt{2A^2\xi^{2b} + 2A^2b\xi^{2b} + \xi^{2b+2} + 2A^2C + 2A^2bC}} d\xi, \quad (23)$$

где C и t_0 – произвольные константы. При некоторых значениях параметра b решения системы (17) выписываются явно. Например, при $b = -1/2$ получаем

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{A((C_1^2 C_2^2 + 4A^2)e^{\omega t} - C_1^2 e^{-\omega t})}{(C_1^2 C_2^2 + 4A^2)e^{\omega t} + 2C_1^2 C_2 + C_1^2 e^{-\omega t}}, \\ \xi(t) &= \frac{4C_1 A^2}{(C_1^2 C_2^2 + 4A^2)e^{\omega t} + 2C_1^2 C_2 + C_1^2 e^{-\omega t}}, \end{aligned} \quad (24)$$

где C_1 и C_2 – произвольные параметры. Легко проверить, что при всех значениях C_1 и C_2 , кроме $C_1 = 0$, решения (24) и параметр Хаббла (18) имеют следующие асимптотики:

$$\phi(\pm\infty) = \pm A, \quad \xi(\pm\infty) = 0, \quad H(+\infty) = \frac{A^2 \omega}{6m_p^2}. \quad (25)$$

Таким образом, построена гравитационная модель с двухпараметрическим множеством точных решений. Потенциал и решения удовлетворяют условиям, наложенным с помощью теории струн (см. раздел 2).

Проанализируем свойства полученных решений и космологические следствия. Система (17) инвариантна относительно замены $\xi(t)$ на $-\xi(t)$, таким образом, каждому решению $\phi(t)$ соответствуют два решения $\pm\xi(t)$. Отметим, что функция $\phi(t)$ инвариантна относительно замены $C_1 \rightarrow -C_1$, тогда как $\xi(t)$ меняет знак. Параметр Хаббла зависит от ξ^2 , поэтому без ограничения общности мы можем положить $C_1 > 0$.

Система (17) автономна, поэтому из существования решений вида $\{\tilde{\phi}(t), \tilde{\xi}(t)\}$ следует, что пара функций $\{\tilde{\phi}(t-t_0), \tilde{\xi}(t-t_0)\}$, где $t_0 \in \mathbb{C}$, тоже должна быть решением. Удобно параметризовать решения (24) так, чтобы один из новых параметров соответствовал сдвигу по времени. Чтобы для действительных решений можно было наложить ограничение $t_0 \in \mathbb{R}$, мы положим $C_1 = e^{t_0}$, используя ограничение $C_1 > 0$. Для краткости записи положим $\omega = 1$ и введем вместо C_2 параметр $C \equiv C_1 C_2$. Решения (24) получаются в следующем виде:

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \frac{A((C^2 + 4A^2)e^{t-t_0} - e^{-(t-t_0)})}{(C^2 + 4A^2)e^{t-t_0} + 2C + e^{-(t-t_0)}}, \\ \xi(t) &= \frac{4A^2}{(C^2 + 4A^2)e^{t-t_0} + 2C + e^{-(t-t_0)}}.\end{aligned}\quad (26)$$

Чтобы сравнить полученные решения с изначальными решениями (12), введем новый параметр: $t_1 = t_0 + t_{00}$, где

$$t_{00} \equiv -\frac{1}{2} \ln(C^2 + 4A^2). \quad (27)$$

Теперь функции $\phi(t)$ и $\xi(t)$ имеют вид

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \frac{A(e^{t-t_1} - e^{-(t-t_1)})}{e^{t-t_1} + 2C/\sqrt{C^2 + 4A^2} + e^{-(t-t_1)}}, \\ \xi(t) &= \frac{4A^2}{\sqrt{C^2 + 4A^2}(e^{t-t_1} + 2C/\sqrt{C^2 + 4A^2} + e^{-(t-t_1)})}.\end{aligned}\quad (28)$$

Рассмотрим решения с $t_1 = 0$. Легко видеть, что в этом случае

$$\phi(0) = 0, \quad \dot{\phi}(0) = \frac{A\sqrt{C^2 + 4A^2}}{C + \sqrt{C^2 + 4A^2}} > 0 \quad \text{и} \quad \dot{\xi}(0) = 0. \quad (29)$$

Напомним, что мы используем условие $A > 0$. Из формулы (3) следует, что $\dot{H}(0) > 0$, а из формулы (18) получаем, что $H(0) = 0$. Таким образом, решения с $t_1 = 0$ и произвольным C являются космологическими решениями типа баунс (bounce), иными словами, $a(t)$ имеет баунс в точке $t = 0$ (о подобных решениях в космологических моделях с двумя скалярными полями см., например, [45]).

Рассмотрим зависимость поведения параметра Хаббла H от значения параметра C . В случае $C = 0$ имеем решения

$$\phi_0(t) = A \operatorname{th}(t - t_1), \quad \xi_0(t) = \frac{A}{\operatorname{ch}(t - t_1)}. \quad (30)$$

Рис. 1. Поля ϕ и ξ (а), параметр Хаббла H (б), параметр состояния w_{DE} при $C = 0$, $t_1 = 0$ (в).

При $t_1 = 0$ мы получаем решения (12) с $\omega = 1$. Соответствующий параметр Хаббла

$$H_0 = \frac{A^2}{6m_p^2} (3 \operatorname{th} t - 2 \operatorname{th}^3 t) \quad (31)$$

имеет максимум в точке $t_{\max} = -\ln(\sqrt{2} - 1) \simeq 0.881$ и убывает при $t \rightarrow \infty$. Поля ϕ_0 и ξ_0 , параметр Хаббла H_0 и параметр состояния w_{DE} представлены на рис. 1 (при построении рис. 1–3 мы положили $A = 1$, $\omega = 1$ и $m_p^2 = 1/6$). При произвольном C

параметр Хаббла имеет вид

$$H = \frac{A^2(e^{t_0-t} + (C^2 + 4A^2)e^{t-t_0})^2}{6m_p^2(e^{t_0-t} + 2C + (C^2 + 4A^2)e^{t-t_0})^3} (e^{2(t_0-t)} + 6Ce^{t_0-t} + 10(C^2 + 4A^2) + 6C(C^2 + 4A^2)e^{t-t_0} + (C^2 + 4A^2)^2e^{2(t-t_0)}). \quad (32)$$

Прямые вычисления показывают, что для всех C , кроме $C = \pm 2A$, $\dot{H}(t) = 0$ в четырех точках:

$$t_{m_k} = t_0 - \ln\left(-\frac{4A^2 + C^2 \pm 2A\sqrt{8A^2 + 2C^2}}{(C \pm 2A)(C^2 + 4A^2)}\right), \quad k = 1, \dots, 4, \quad (33)$$

где два символа “ $\pm$ ” независимы. Отметим, что при $C \neq \pm 2A$ выполняется условие $\ddot{H}(t_{m_k}) \neq 0$. Следовательно, в точках t_{m_k} параметр Хаббла $H(t)$ имеет экстремумы.

При $C > 2A$ ни одна из четырех точек t_{m_k} не принадлежит действительной оси.

Если $C = 2A$, то $\dot{H}(t)$ равняется нулю в двух точках, не принадлежащих действительной оси:

$$\tilde{t}_{m_1} = t_0 - \ln(-2A), \quad \tilde{t}_{m_2} = t_0 - \ln(-4A). \quad (34)$$

Таким образом, при $C \geq 2A$ параметр Хаббла $H(t)$ является монотонно возрастающей функцией, и его поведение напоминает поведение параметра Хаббла в однополевой фантомной модели [18].

При $-2A < C < 2A$ функция $H(t)$ имеет экстремумы в двух точках. Если $t_1 = 0$, то $\phi(t)$ – нечетная функция, а $\xi(t)$ – четная. Следовательно, соответствующий параметр Хаббла, вычисленный с помощью формулы (18), является нечетной функцией. Легко проверить, что на полуоси $t > 0$ параметр Хаббла $H(t)$ положителен и, следовательно, имеет максимум (см. рис. 2). Таким образом, поведение функции $H(t)$ при $-2A < C < 2A$ похоже на ее поведение при $C = 0$.

Если $C = -2A$, то $\dot{H}(t)$ равняется нулю в двух точках:

$$\tilde{t}_{m_3} = t_0 - \ln(2A), \quad \tilde{t}_{m_4} = t_0 - \ln(4A). \quad (35)$$

Легко проверить, что в этих точках $\ddot{H} = \pm 16A^2/m_p^2 \neq 0$, следовательно, поведение параметра Хаббла качественно не отличается от приведенного на рис. 1 и 2.

Рассмотрим случай $C < -2A$. Все четыре точки экстремума (33) действительны. Таким образом, выбрав $C < -2A$, мы получаем качественно иное поведение параметра Хаббла.

Если $t_1 = 0$, то, как отмечалось выше, параметр Хаббла является нечетной функцией. Производная параметра Хаббла в нуле положительна, следовательно, $H(t)$ имеет максимум в некоторой точке $t_{m_1} > 0$, минимум в некоторой точке $t_{m_2} > t_{m_1}$ и монотонно возрастает при $t > t_{m_2}$. Отметим, что $w_{DE} < -1$ при $t > t_{m_2}$. Таким образом, найдены точные решения, соответствующие немонотонной функции $H(t)$ с фантомным поведением при больших временах (см. рис. 3).

Итак, используя метод суперпотенциала, мы нашли для модели с потенциалом

$$\tilde{V} = \omega^2 \left(\frac{1}{8}(1 - \phi^2 + \xi^2)^2 - \frac{1}{2A^2}\phi^2\xi^2 + \frac{3\phi^2}{4m_p^2} \left(\frac{A}{2} \left(1 - \frac{\phi^2}{3A^2} \right) + \frac{\xi^2}{2A} \right)^2 \right) \quad (36)$$

Рис. 2. Поля ϕ и ξ (а), параметр Хаббла H (б), параметр состояния w_{DE} при $C = 1$, $t_1 = 0$ (в).

двухпараметрическое множество точных решений. Отметим, что полученные решения имеют одинаковые асимптотические условия, тогда как поведение параметра состояния w_{DE} при больших временах оказывается различным. Таким образом, можно сделать вывод о том, что связанная с теорией струн модель с полиномиальным потенциалом допускает как $w_{\text{DE}} > -1$, так и $w_{\text{DE}} < -1$ при больших временах.

Рис. 3. Поля ϕ и ξ (а), параметр Хаббла H (б), параметр состояния w_{DE} при $C = -5$, $t_1 = 0$ (в).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье мы исследовали динамику двухполевой модели темной энергии с одним фантомным полем и одним обычным скалярным полем. Построенная космологическая модель обладает полиномиальным потенциалом $V(\phi, \xi)$, происхождение которого связано с теорией струн. Найдено двухпараметрическое множество точных решений, которое может быть разделено на два подмножества таким образом, что одно подмножество соответствует при больших временах однополевым моделям квинтэссенции, а другое подмножество – однополевым фантомным моделям. Отме-

тим, что оба подмножества полностью состоят из решений, удовлетворяющих одним и тем же асимптотическим условиям.

В статье мы активно используем метод суперпотенциала и показываем, что он позволяет не только строить потенциал для данного решения, но также и находить новые решения. Метод суперпотенциала позволяет расширить однопараметрическое множество решений до двухпараметрического. Использование метода суперпотенциала позволяет разделить исходную систему уравнений движения (2)–(4) на две части. Одна часть – уравнение для суперпотенциала (11), которое в общем случае неинтегрируемо, но для многих полиномиальных потенциалов имеет специальные решения в виде полинома. Подстановка этих решений в систему (10) дает систему однородных дифференциальных уравнений, обычно интегрируемых по крайней мере в квадратурах. Таким образом, метод суперпотенциала позволяет выделить из неинтегрируемой системы уравнений Фридмана интегрируемую подсистему. Отметим, что системы типа (10) активно исследуются в механике. С другой стороны, этот метод позволяет выбрать такую настройку параметров рассматриваемой гравитационной модели, (например, коэффициентов потенциала), что точные решения существуют в явном виде.

Для решения с $H(0) = 0$ мы получаем $\dot{H}(0) > 0$. Данные решения известны как баунс-решения (см. работу [45]). Отметим, что точные решения типа баунс могут быть получены и в нелокальных струнных космологических моделях [46].

Благодарности. Автор благодарит А. А. Андрианова, И. Я. Арефьеву и А. Ю. Каменщика за полезные обсуждения. Работа частично поддержана РФФИ (грант № 05-01-00758) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-8122.2006.2).

Список литературы

- [1] A. Riess et al., *Astron. J.*, **116**:3 (1998), 1009–1038; [arXiv: astro-ph/9805201](#).
- [2] D. N. Spergel et al., *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **148**:1 (2003), 175–194; [arXiv: astro-ph/0302209](#); *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **170**:2 (2007), 377–408; [arXiv: astro-ph/0603449](#).
- [3] M. Tegmark et al., *Phys. Rev. D*, **69**:10 (2004), 103501; [arXiv: astro-ph/0310723](#).
- [4] P. Astier et al., *Astron. Astrophys.*, **447**:1 (2006), 31–48; [arXiv: astro-ph/0510447](#).
- [5] E. J. Copeland, M. Sami, Sh. Tsujikawa, *Internat. J. Modern Phys. D*, **15**:11 (2006), 1753–1935; [arXiv: hep-th/0603057](#).
- [6] Y. Gong, A. Wang, *Phys. Rev. D*, **75** (2007), 043520; [arXiv: astro-ph/0612196](#).
- [7] U. Alam, V. Sahni, A. A. Starobinsky, *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, 2007, № 02, 011; [arXiv: astro-ph/0612381](#).
- [8] V. Sahni, A. A. Starobinsky, *Internat. J. Modern Phys. D*, **15**:12 (2006), 2105–2132; [arXiv: astro-ph/0610026](#).
- [9] U. Alam, V. Sahni, T. D. Saina, A. A. Starobinsky, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **354**:1 (2004), 275–291; [arXiv: astro-ph/0311364](#).
- [10] A. Vikman, *Phys. Rev. D*, **71**:2 (2005), 023515; [arXiv: astro-ph/0407107](#).
- [11] Sh. Nojiri, S. D. Odintsov, *J. Phys.*, **66**:1 (2007), 012005; [arXiv: hep-th/0611071](#); *Phys. Lett. B*, **639**:3–4 (2006), 144–150; [arXiv: hep-th/0606025](#); *Gen. Relativ. Gravitation*, **38**:8 (2006), 1285–1304; [arXiv: hep-th/0506212](#); *Phys. Rev. D*, **72**:2 (2005), 023003; [arXiv: hep-th/0505215](#).

- [12] Sh. Nojiri, S. D. Odintsov, Sh. Tsujikawa, *Phys. Rev. D*, **71**:6 (2005), 063004; [arXiv: hep-th/0501025](#); Sh. Tsujikawa, *Phys. Rev. D*, **72**:8 (2005), 083512; [arXiv: astro-ph/0508542](#); S. Nesseris, L. Perivolaropoulos, *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, 2007, №01, 018; [arXiv: astro-ph/0610092](#); R. Gannouji, D. Polarski, A. Ranquet, A. A. Starobinsky, *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, 2006, №09, 016; [arXiv: astro-ph/0606287](#); B. A. Pyбаков, *TMФ*, **149**:3 (2006), 409–426; [arXiv: hep-th/0604153](#); H. Mohseni Sadjadi, M. Alimohammadi, *Phys. Rev. D*, **74**:10 (2006), 103007; [arXiv: gr-qc/0610080](#); M. Alimohammadi, H. Mohseni Sadjadi, *Phys. Lett. B*, **648**:2–3 (2007), 113–118; [arXiv: gr-qc/0608016](#); H. Mohseni Sadjadi, M. Alimohammadi, *Phys. Rev. D*, **74**:4 (2006), 043506; [arXiv: gr-qc/0605143](#); P. S. Apostolopoulos, N. Tetradis, *Phys. Rev. D*, **74**:6 (2006), 064021; [arXiv: hep-th/0604014](#); V. Sahni, Yu. Shtanov, *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, 2003, №11, 014; [arXiv: astro-ph/0202346](#); Wen Zhao, Yang Zhang, *Phys. Rev. D*, **73**:12 (2006), 123509; [arXiv: astro-ph/0604460](#); Bo Feng, Xiulian Wang, Xinmin Zhang, *Phys. Lett. B*, **607**:1–2 (2005), 35–41; [arXiv: astro-ph/0404224](#); Zong-Kuan Guo, Yun-Song Piao, Xinmin Zhang, Yuan-Zhong Zhang, *Phys. Lett. B*, **608**:3–4 (2005), 177–182; [arXiv: astro-ph/0410654](#); Xiao-Fei Zhang, Hong Li, Yun-Song Piao, *Modern Phys. Lett. A*, **21**:3 (2006), 231–241; [arXiv: astro-ph/0501652](#); Ming-zhe Li, Bo Feng, Xin-min Zhang, *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, 2005, №12, 002; [arXiv: hep-ph/0503268](#); Hrvoje Stefancic, *Phys. Rev. D*, **71**:12 (2005), 124036; [arXiv: astro-ph/0504518](#); Rong-Gen Cai, Hong-Sheng Zhang, Anzhong Wang, *Commun. Theor. Phys.*, **44** (2005), 948; [arXiv: hep-th/0505186](#); Yi-Fu Cai, Hong Li, Yun-Song Piao, Xinmin Zhang, *Phys. Lett. B*, **646**:4 (2007), 141–144; [arXiv: gr-qc/0609039](#); Xin Zhang, *Phys. Rev. D*, **74**:10 (2006), 103505; [arXiv: astro-ph/0609699](#); Hongsheng Zhang, Zong-Hong Zhu, *Phys. Rev. D*, **75**:2 (2007), 023510; [arXiv: astro-ph/0611834](#).
- [13] A. A. Andrianov, F. Cannata, A. Yu. Kamenshchik, *J. Phys. A*, **39**:32 (2006), 9975–9982; [arXiv: gr-qc/0604126](#).
- [14] I. Ya. Aref'eva, A. S. Koshelev, *JHEP*, 2007, №02, 041; [arXiv: hep-th/0605085](#).
- [15] V. K. Onemli, R. P. Woodard, *Class. Q. Grav.*, **19**:17 (2002), 4607–4626; [arXiv: gr-qc/0204065](#); S. M. Carroll, M. Hoffman, M. Trodden, *Phys. Rev. D*, **68**:2 (2003), 023509; [arXiv: astro-ph/0301273](#); St. D. H. Hsu, A. Jenkins, M. B. Wise, *Phys. Lett. B*, **597**:3–4 (2004), 270–274; [arXiv: astro-ph/0406043](#); R. V. Buniy, St. D. H. Hsu, B. M. Murray, *Phys. Rev. D*, **74**:6 (2006), 063518; [arXiv: hep-th/0606091](#); B. McInnes, *Nucl. Phys. B*, **718**:1–2 (2005), 55–82; [arXiv: hep-th/0502209](#); V. Gorini, A. Yu. Kamenshchik, U. Moschella, V. Pasquier, A. A. Starobinsky, *Phys. Rev. D*, **72**:10 (2005), 103518; [arXiv: astro-ph/0504576](#); E. O. Kahya, V. K. Onemli, *Phys. Rev. D*, **76**:4 (2007), 043512; [arXiv: gr-qc/0612026](#).
- [16] I. Ya. Aref'eva, I. V. Volovich, *On the null energy condition and cosmology*, [arXiv: hep-th/0612098](#).
- [17] I. Ya. Aref'eva, “Nonlocal string tachyon as a model for cosmological dark energy”, *p-Adic Mathematical Physics: 2nd International Conference*, AIP Conf. Proc., **826**, eds. A. Yu. Khrennikov, Z. Rakic, I. V. Volovich, Amer. Inst. Phys., Melville, NY, 2006, 301–311; [arXiv: astro-ph/0410443](#).
- [18] И. Я. Арефьева, А. С. Кошелев, С. Ю. Вернов, *TMФ*, **148**:1 (2006), 23–41; [arXiv: astro-ph/0412619](#).
- [19] A. Sen, *Internat. J. Modern Phys. A*, **20**:24 (2005), 5513–5656; [arXiv: hep-th/0410103](#); K. Ohmori, *A review on tachyon condensation in open string field theories*, [arXiv: hep-th/0102085](#); I. Ya. Aref'eva, D. M. Belov, A. A. Girayevets, A. S. Koshelev, P. B. Medvedev, “Noncommutative field theories and (super)string field theories”, *Particles and Fields*, Proc. 11th Jorge André Swieca summer school (São Paulo, Brazil, January 14–27, 2001), ed. A. V. Gilvan, World Scientific, Singapore, 2002, 1–164; [arXiv:](#)

- hep-th/0111208; W. Taylor, *Lectures on D-branes, tachyon condensation an string field theory*, arXiv: hep-th/0301094.
- [20] I. Ya. Aref'eva, A. S. Koshelev, S. Yu. Vernov, *Phys. Rev. D*, **72**:6 (2005), 064017; arXiv: astro-ph/0507067.
- [21] I. Ya. Aref'eva, L. V. Joukovskaya, *JHEP*, 2005, № 10, 087; arXiv: hep-th/0504200.
- [22] L. V. Joukovskaya, Ya. I. Volovich, *Energy flow from open to closed strings in a toy model of rolling tachyon*, arXiv: math-ph/0308034.
- [23] I. Ya. Aref'eva, A. S. Koshelev, S. Yu. Vernov, *Phys. Lett. B*, **628**:1–2 (2005), 1–10; arXiv: astro-ph/0505605.
- [24] I. Ya. Aref'eva, A. S. Koshelev, S. Yu. Vernov, *Bulg. J. Phys.*, **33**:Suppl. 1 (2006), 360–367.
- [25] I. Ya. Arefeva, D. M. Belov, A. S. Koshelev, P. B. Medvedev, *Nucl. Phys. B*, **638**:1–2 (2002), 3–20; arXiv: hep-th/0011117.
- [26] I. Ya. Arefeva, D. M. Belov, A. S. Koshelev, P. B. Medvedev, *Nucl. Phys. B*, **638**:1–2 (2002), 21–40; arXiv: hep-th/0107197.
- [27] E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **268**:2 (1986), 253–294; *Nucl. Phys. B*, **276**:2 (1986), 291–324.
- [28] I. Ya. Aref'eva, P. B. Medvedev, A. P. Zubarev, *Phys. Lett. B*, **240**:3–4 (1990), 356–362; *Nucl. Phys. B*, **341**:2 (1990), 464–498.
- [29] C. R. Preitschopf, C. B. Thorn, S. A. Yost, *Nucl. Phys. B*, **337**:2 (1990), 363–433.
- [30] N. Berkovits, A. Sen, B. Zwiebach, *Nucl. Phys. B*, **587**:1–3 (2000), 147–178; arXiv: hep-th/0002211.
- [31] I. Ya. Aref'eva, L. V. Joukovskaya, A. S. Koshelev, *JHEP*, 2003, № 9, 012; arXiv: hep-th/0301137; I. Ya. Aref'eva, *Fortschr. Phys.*, **51**:7–8 (2003), 652–657.
- [32] K. Ohmori, *Phys. Rev. D*, **69**:2 (2004), 026008; arXiv: hep-th/0306096.
- [33] B. Zwiebach, *Ann. Phys.*, **267**:2 (1998), 193–248; arXiv: hep-th/9705241.
- [34] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser, A. Karch, *Phys. Rev. D*, **62**:4 (2000), 046008; arXiv: hep-th/9909134.
- [35] A. G. Muslimov, *Class. Q. Grav.*, **7**:2 (1990), 231–237.
- [36] D. S. Salopek, J. R. Bond, *Phys. Rev. D*, **42**:12 (1990), 3936–3962.
- [37] A. R. Liddle, D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [38] D. Bazeia, M. J. dos Santos, R. F. Ribeiro, *Phys. Lett. A*, **208**:1–2 (1995), 84–88; arXiv: hep-th/0311265.
- [39] D. Bazeia, F. A. Brito, *Phys. Rev. D*, **61**:10 (2000), 105019; arXiv: hep-th/9912015.
- [40] A. Brandhuber, K. Sfetsos, *JHEP*, 1999, № 10, 013; arXiv: hep-th/9908116.
- [41] Е. Б. Богомольный, *ЯФ*, **24**:4 (1976), 861–870.
- [42] D. Bazeia, C. B. Gomes, L. Losano, R. Menezes, *Phys. Lett. B*, **633**:4–5 (2006), 415–419; arXiv: astro-ph/0512197; D. Bazeia, L. Losano, J. J. Rodrigues, *First-order formalism for scalar field in cosmology*, arXiv: hep-th/0610028.
- [43] D. Bazeia, L. Losano, J. J. Rodrigues, R. Rosenfeld, *First-order formalism for dust*, arXiv: astro-ph/0611770.
- [44] A. S. Mikhailov, Yu. S. Mikhailov, M. N. Smolyakov, I. P. Volobuev, *Class. Q. Grav.*, **24**:1 (2007), 231–242; arXiv: hep-th/0602143.
- [45] Yi-Fu Cai, Taotao Qiu, Yun-Song Piao, Mingzhe Li, Xinmin Zhang, *JHEP*, 2007, № 10, 071; arXiv: 0704.1090.
- [46] I. Ya. Aref'eva, L. V. Joukovskaya, S. Yu. Vernov, *JHEP*, 2007, № 07, 087; arXiv: hep-th/0701184; *Dynamics in nonlocal linear models in the Friedmann–Robertson–Walker metric*, arXiv: 0711.1364.