Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Гердт, Ю. Г. Палий, А. М. Хведелидзе, Механика
Янга–Миллса на световом конусе: $SU(2)$ вместо $SU(3)$,
ТМФ, 2008, том 155, номер 1, 62–73

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6193>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 13:33:05

© 2008 г. В. П. Гердт*, Ю. Г. Палий^{*,†}, А. М. Хведелидзе^{*,‡}

МЕХАНИКА ЯНГА–МИЛЛСА НА СВЕТОВОМ КОНУСЕ: $SU(2)$ ВМЕСТО $SU(3)$

Исследуется $SU(n)$ -механика Янга–Миллса на световом конусе, определенная как ведущий порядок длинноволнового приближения в теории полей Янга–Миллса на нуль-плоскости. В рамках формализма Дирака для вырожденных гамильтоновых систем определен полный набор и дана классификация связей в моделях со структурными группами $SU(2)$ и $SU(3)$. Показано, что механика на световом конусе обладает расширенной симметрией: помимо локальных $SU(n)$ -вращений существуют дополнительные, не связанные с изотопической группой, локальные двухпараметрические абелевы преобразования, оставляющие лагранжиан системы неизменным. Расширенная инвариантность имеет одно замечательное следствие. Оказывается, что в противоположность хорошо известной $SU(2)$ -механике Янга–Миллса в мгновенной форме $SU(2)$ -модель на световом конусе представляет собой классически интегрируемую систему. Расчеты проводились с использованием техники базисов Гребнера теории полиномиальных идеалов.

Ключевые слова: калибровочная симметрия, гамильтоновы системы, базис Гребнера.

1. ВВЕДЕНИЕ

Дирак в концептуальной работе 1949 г. [1], где он ввел принципиально новое понятие о трех формах релятивистской динамики, писал (см. также [2]): “Решающего аргумента в пользу одной или другой из форм нет. Даже если можно было бы решить, что одна из них наиболее удобна, она не была бы обязана быть той, которую выбрала природа, в случае, если только одна из них возможна для атомных систем. Поэтому надо разрабатывать дальше все три формы”. Последовавшие за этой выдающейся работой исследования полевых теорий выявили принципиальную несхожесть введенных форм динамики. Уже простейший пример теории свободного скалярного поля, сформулированной во фронтальной форме, явно демонстрирует

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: gerd@jinr.ru

[†]Институт прикладной физики АН Молдовы, Кишинев, Молдова. E-mail: palii@jinr.ru

[‡]Математический институт им. А. М. Размадзе, Тбилиси, Грузия.
E-mail: akhved@jinr.ru

это различие. Здесь, в противоположность эволюции в мгновенной форме, теория вырождается вследствие выбора светоподобной переменной x^+ в качестве временного параметра. При этом соответствующие *нулевые моды* фурье-разложения полей по координате x^- (см. [3]) играют определяющую роль в согласованном описании взаимодействий в формулировке теории поля на нуль-плоскости. В данной статье мы намерены обсудить один из аспектов динамики нулевых мод, связанный с реализацией локальной симметрии в калибровочных теориях. Мы рассматриваем механическую модель, *калибровочную $SU(n)$ -механику Янга–Миллса на световом конусе*, которая описывает динамику нулевых мод $SU(n)$ -глюодинамики во фронтальной форме, полностью отделенных от остальных нормальных мод. Другими словами, мы изучаем низший порядок длинноволнового приближения теории полей Янга–Миллса на нуль-плоскости. Оказывается, что по сравнению с хорошо известным длинноволновым приближением в мгновенной форме¹⁾, $SU(n)$ -механика Янга–Миллса на световом конусе имеет ряд новых, непривычных свойств. Среди них отметим такие, как зависимость структуры и набора связей от ранга изотопической группы, присутствие дополнительных связей первого рода, порожденных новой локальной симметрией модели. Помимо этого, оказалось, что в результате разрешения всех связей $SU(2)$ -механика Янга–Миллса на световом конусе является классически интегрируемой моделью. Краткое обсуждение этих вопросов будет предметом дальнейшего изложения.

В следующем разделе дана формулировка $SU(n)$ -механики Янга–Миллса на световом конусе, представлены полные наборы связей для случаев структурных групп $SU(2)$ и $SU(3)$. В третьем разделе строится генератор калибровочных преобразований с учетом новой локальной симметрии механики на световом конусе. В четвертом разделе представлены результаты гамильтоновой редукции модели со структурной группой $SU(2)$. Поскольку в случае группы $SU(3)$ расчеты становятся крайне сложными и громоздкими, вычисления проводились с использованием программ компьютерной алгебры. Для этого были развиты и применены методы расчетов на основе алгоритмического подхода к коммутативной алгебре – техники базисов Гребнера [16]–[23]. Построенный с этой целью специальный однородный базис Гребнера приведен в приложении.

2. МЕХАНИКА ЯНГА–МИЛЛСА НА СВЕТОВОМ КОНУСЕ

Ниже приводится формулировка $SU(n)$ -механики Янга–Миллса на световом конусе как модели, определенной ведущим порядком длинноволнового приближения $SU(n)$ теории поля Янга–Миллса на нуль-плоскости.

Бескоординатное представление действия для поля Янга–Миллса в четырехмерном пространстве времени Минковского M_4 , снабженного метрикой η , записывается

¹⁾Мгновенная форма $SU(n)$ -механики Янга–Миллса была предложена более тридцати лет назад и до сих пор интенсивно изучается как пример модели, демонстрирующей крайне интересные особенности динамики как на классическом, так и на квантовом уровнях (см., например, обсуждение и ссылки в [4]–[15]).

в виде

$$S := \frac{1}{g_0^2} \int_{M_4} \text{tr} F \wedge *F, \quad (1)$$

где g_0 есть константа взаимодействия, а 2-форма кривизны $F := dA + A \wedge A$ построена из 1-формы связности A . Связность и кривизна принимают значения в алгебре Ли $su(n)$, в которой выбран некоторый базис T^a :

$$A = A^a T^a, \quad F = F^a T^a, \quad a = 1, 2, \dots, n^2 - 1.$$

Метрика η входит в действие через дуальный тензор напряженности

$$*F_{\mu\nu} := \frac{1}{2} \sqrt{-\det \eta} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

с полностью антисимметричным 4-символом Леви-Чивиты $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$.

Для формулировки $SU(n)$ -механики на световом конусе мы запишем 1-форму связности A в так называемом базисе нуль-плоскости

$$A := A_+ dx^+ + A_- dx^- + A_k dx^k, \quad k = 1, 2, \quad (2)$$

где базисные 1-формы $dx^\pm$ дуальны векторам $e_\pm := (e_0 \pm e_3)/\sqrt{2}$, касательным к световому конусу. Соответствующие координаты светового конуса $x^\mu = (x^+, x^-, x^\perp)$ заданы в виде

$$x^\pm := \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 \pm x^3), \quad x^\perp := x^k, \quad k = 1, 2.$$

При этом ненулевыми компонентами метрики являются $\eta_{+-} = \eta_{-+} = -\eta_{11} = -\eta_{22} = 1$.

В предположении, что компоненты 1-формы связности A в (2) зависят только от временной координаты x^+ :

$$A_\pm = A_\pm(x^+), \quad A_k = A_k(x^+),$$

действие (1) после факторизации пространственного объема $V^{(3)}$ имеет вид

$$S_{lc} := \frac{V^{(3)}}{2g_0^2} \int dx^+ (F_{+-}^a F_{+-}^a + 2F_{+k}^a F_{-k}^a - F_{12}^a F_{12}^a). \quad (3)$$

Фиксируя отношение констант $g_0^2/V^{(3)} = 1$, мы примем (3) в качестве действия $SU(n)$ -механики Янга–Миллса на световом конусе с лагранжианом

$$L := \frac{1}{2} (F_{+-}^a F_{+-}^a + 2F_{+k}^a F_{-k}^a - F_{12}^a F_{12}^a). \quad (4)$$

Лагранжиан (4) записан через следующие компоненты тензора напряженности в метрике светового фронта:

$$\begin{aligned} F_{+-}^a &:= \frac{\partial A_-^a}{\partial x^+} + f^{abc} A_+^b A_-^c, & F_{+k}^a &:= \frac{\partial A_k^a}{\partial x^+} + f^{abc} A_+^b A_k^c, \\ F_{-k}^a &:= f^{abc} A_-^b A_k^c, \\ F_{ij}^a &:= f^{abc} A_i^b A_j^c, & i, j, k &= 1, 2, \end{aligned}$$

где f^{abc} – структурные константы группы $SU(n)$. Лагранжиан (4) определяет $SU(n)$ -механику Янга–Миллса на световом конусе с $4(n^2 - 1)$ степенями свободы $A_{\pm}$, A_k и эволюционным параметром $\tau := x^+$ – временем в динамике светового фронта. Так как теория Янга–Миллса обладает калибровочной инвариантностью и в динамике светового фронта мгновенные состояния определяются на характеристиках светового конуса, не все уравнения движения содержат вторые производные по τ (см., например, обсуждение в [3], [24]). Иными словами, часть уравнений Эйлера–Лагранжа, которые получаются с помощью лагранжиана (4), представляют собой связи в конфигурационном пространстве. В гамильтоновом описании в этом можно убедиться следующим образом. Преобразование Лежандра задает импульсы π_a^- , канонически сопряженные к A_-^a :

$$\pi_a^- := \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_-^a} = \dot{A}_-^a + f^{abc} A_+^b A_-^c.$$

Однако уравнения для импульсов π_a^+ и π_a^k , канонически сопряженных к A_+^a и A_k^a , приводят к набору первичных связей

$$\varphi_a^{(1)} := \pi_a^+ = 0, \quad (5)$$

$$\chi_k^a := \pi_a^k - f^{abc} A_-^b A_k^c = 0. \quad (6)$$

Наличие первичных связей влияет на динамику вырожденной системы. Ее эволюция задается полным гамильтонианом

$$H_t := H_c + U_a(\tau) \varphi_a^{(1)} + V_k^a(\tau) \chi_k^a,$$

который отличается от функции Гамильтона

$$H_c = \frac{1}{2} \pi_a^- \pi_a^- - f^{abc} A_+^b (A_-^c \pi_a^- + A_k^c \pi_a^k) + \frac{1}{2} F_{12}^a F_{12}^a$$

линейной комбинацией первичных связей с неопределенными множителями Лагранжа $U_a(\tau)$ и $V_k^a(\tau)$.

Динамическая непротиворечивость первичных связей (5) должна быть проверена с помощью полного гамильтониана и канонических скобок Пуассона фазовых переменных:

$$\{A_{\pm}^a, \pi_b^{\pm}\} = \delta_b^a, \quad \{A_k^a, \pi_b^l\} = \delta_k^l \delta_b^a.$$

Из условия сохранения первичных связей $\varphi_a^{(1)}$ имеем

$$0 = \dot{\varphi}_a^{(1)} = \{\pi_a^+, H_t\} = f^{abc} (A_-^b \pi_c^- + A_k^b \pi_c^k), \quad (7)$$

тогда как та же процедура для первичных связей χ_k^a приводит к следующим условиям на множители Лагранжа $V_k^a(\tau)$:

$$0 = \dot{\chi}_k^a = \{\chi_k^a, H_c\} - 2f^{abc} A_-^b V_k^c. \quad (8)$$

Тем самым уравнения (7) определяют $n^2 - 1$ вторичных связей

$$\varphi_a^{(2)} := f^{abc} (A_-^b \pi_c^- + A_k^b \pi_c^k) = 0, \quad (9)$$

удовлетворяющих алгебре $su(n)$:

$$\{\varphi_a^{(2)}, \varphi_b^{(2)}\} = f^{abc} \varphi_c^{(2)}.$$

Однако анализ условий (8) представляет собой более сложную задачу. Прежде всего количество множителей Лагранжа, которые могут быть определены из (8), зависит от ранга структурной группы. Это непосредственно следует из вида скобок Пуассона связей χ_i^a :

$$\{\chi_i^a, \chi_j^b\} = 2f^{abc} A_-^c \delta_{ij}.$$

Простейший случай первого ранга (специальной унитарной группы $SU(2)$) был изучен в наших предыдущих работах. Анализ связей в $SU(2)$ -модели, включая их разделение на связи первого и второго рода, проведен в работах [20]–[22]. Далее мы кратко изложим полученные ранее результаты, а затем детально обсудим модель с первой нетривиальной структурной группой второго ранга – $SU(3)$ -механику Янга–Миллса на световом конусе.

2.1. Структурная группа $SU(2)$. В качестве базиса для алгебры $su(2)$ мы выбираем матрицы Паули $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. При этом структурные константы даются полностью антисимметричным трехмерным символом Леви-Чивиты:

$$f^{abc} := \epsilon^{abc}, \quad \epsilon^{123} = 1.$$

Согласно уравнениям (5) и (6) имеется $(2^2 - 1) + (2^2 - 1) \times 2 = 9$ первичных связей $\varphi_a^{(1)}$ и χ_k^a . Условия совместимости (8) для первичных связей χ_k^a приводят к следующей картине связей, имеющих в модели.

1. Кроме указанных связей первого рода (абелевых π_a^+ и неабелевых $\varphi_a^{(2)}$) есть еще две абелевы связи, не имеющие аналога в мгновенной форме $SU(2)$ -механики $\psi_k := A_-^a \chi_k^a$. Заметим, что изовектор A_-^a является *нулевым вектором* матрицы $C_{ab} := \epsilon_{abc} A_-^c$, составленной из скобок Пуассона связей χ_k^a .

2. Оставшиеся четыре связи из набора χ_k^a , образующие ортогональное дополнение по отношению к связям ψ_k , $\chi_{k\perp}^a := \chi_k^a - A_-^a (A_-^b \chi_k^b)$, являются связями второго рода и удовлетворяют соотношениям

$$\{\chi_{i\perp}^a, \chi_{j\perp}^b\} = 2\epsilon^{abc} A_-^c \delta_{ij}, \quad \{\varphi_a^{(2)}, \chi_{k\perp}^b\} = \epsilon^{abc} \chi_{k\perp}^c.$$

Дальнейший анализ показывает, что кроме связей $\varphi_a^{(2)}$, выражающих закон Гаусса, других вторичных связей в модели нет. Действительно, абелевы связи ψ_i не порождают новых:

$$\{\psi_i, H_t\} = -A_i^a \varphi_a^{(2)} + \pi_a^- \chi_i^a + \epsilon_{abc} A_i^a A_k^b \chi_k^c \approx 0,$$

а условия совместимости (8) для связей $\chi_{i\perp}^a$ позволяют определить соответствующие четыре множителя Лагранжа $V_\perp(\tau)$. В итоге $SU(2)$ -механика Янга–Миллса на световом конусе содержит восемь функционально независимых связей первого рода $\varphi_a^{(1)}$, ψ_k , $\varphi_a^{(2)}$ и четыре связи второго рода $\chi_{k\perp}^a$.

2.2. Структурная группа $SU(3)$. Поскольку ранг алгебры $su(3)$ равен двум, нуль-пространство матрицы $C_{ab} = f_{abc}A_-^c$ двумерно²⁾. В качестве его базиса выберем следующие нуль-векторы – один линейный и второй квадратичный по координатам:

$$e_a^{(1)} := A_-^a, \quad e_a^{(2)} := d_{abc}A_-^b A_-^c, \quad a, b, c = 1, 2, \dots, 8.$$

Используя векторы $e_a^{(1)}$ и $e_a^{(2)}$, набор из $2 \times (3^2 - 1) = 16$ первичных связей χ_k^a можно разбить следующим образом:

$$\chi_i^a = (\chi_{i\perp}^a, \psi_i, \varsigma_i), \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

где

$$\psi_i := e_a^{(1)} \chi_i^a, \quad \varsigma_i := e_a^{(2)} \chi_i^a.$$

В силу простых скобок Пуассона

$$\{\chi_k^a, \psi_i\} = 0, \quad \{\chi_k^a, \varsigma_i\} = 0, \quad \{\psi_i, \varsigma_k\} = 0, \quad \{\psi_i, \psi_j\} = 0, \quad \{\varsigma_i, \varsigma_k\} = 0$$

разложение (10) оказывается удобным для последующих расчетов.

Условие совместимости (8) позволяет найти множители Лагранжа $V_{k\perp}^a$, соответствующие разбиению (10), и приводит к следующим равенствам, справедливым по модулю первичных связей:

$$\{\psi_i, H_t\} = -A_i^a \varphi_a^{(2)} + \text{первичные связи}, \quad (11)$$

$$\{\varsigma_i, H_t\} = d_{abc}A_i^a F_{-k}^b F_{-k}^c - 2d_{abc}A_-^a A_i^b \varphi_c^{(2)} + \text{первичные связи}. \quad (12)$$

Согласно (11) связи ψ_i не порождают новых вторичных связей. В то же время анализ уравнения (12) показывает, что есть две новые вторичные связи

$$\zeta_i = d_{abc}A_i^a F_{-k}^b F_{-k}^c. \quad (13)$$

Связи ζ_i коммутируют, $\{\zeta_i, \zeta_j\} = 0$, и удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \{\psi_i, \zeta_j\} &= \delta_{ij} d_{abc} A_-^a \left(F_{-k}^b \chi_k^c - \frac{1}{2} A_-^b \varphi_c^{(2)} \right), \\ \{\varsigma_i, \zeta_j\} &= -\delta_{ij} d_{abc} d_{cpq} A_-^a A_-^b F_{-k}^p F_{-k}^q. \end{aligned} \quad (14)$$

Дальнейшие расчеты, проведенные с помощью техники базисов Гребнера, показали, что правая часть равенства (14) не обращается в нуль по модулю всех известных связей, и привели к выводу об отсутствии в модели третичных связей. Условия совместимости³⁾

$$\{\zeta_i, H_t\} \stackrel{\Sigma_2}{=} \{\zeta_i, H_c\} + \{\zeta_i, \varsigma_k\} V_k^\varsigma = 0$$

позволяют определить две неизвестные функции V_k^ς из соответствующего разложения набора множителей Лагранжа $V_k^a = (V_{k\perp}^a, V_k^\psi, V_k^\varsigma)$.

²⁾Используемые здесь структурные константы f_{abc} и d_{abc} соответствуют стандартному базису Гелл-Манна для алгебры $su(3)$.

³⁾Символ Σ_2 означает выполнение равенства на поверхности первичных и вторичных связей.

Таким образом, полный набор связей в $SU(3)$ -механике Янга–Миллса включает в себя:

- а) π_a^+ , $\varphi_a^{(2)}$ и ψ_k – восемнадцать связей первого рода;
- б) $\chi_{k\perp}^a$, ς_k и ζ_k – шестнадцать связей второго рода.

Приведенные здесь результаты основаны на громоздких вычислениях скобок Пуассона с их последующим разложением по полному набору связей. Для этой цели использовался специально построенный базис Гребнера, краткое описание которого дано в приложении.

3. ЛОКАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ

Наличие двух новых связей первого рода ψ_i ставит вопрос о существовании новой локальной инвариантности модели кроме ожидаемой остаточной калибровочной симметрии, связанной с исходной группой изотопических $SU(n)$ -вращений. Для нахождения этой дополнительной симметрии мы переходим к вопросу построения генератора инфинитезимальных преобразований локальной симметрии. Ограничимся обсуждением случая $n = 2$. Локальные симметрии порождаются связями первого рода [25], однако существование в теории связей второго рода делает задачу построения явного вида преобразований симметрии крайне запутанной. Чтобы обойти эти трудности, поступим следующим образом. Прежде всего эффективно исключим связи второго рода за счет введения скобок Дирака. Это означает, что в дальнейшем все выражения понимаются по модулю связей второго рода⁴⁾. После этого согласно методу [26], основанному на указанной выше гипотезе Дирака, генератор локальных преобразований G представляется в виде линейной комбинации всех связей первого рода

$$G = \sum_{a=1}^3 \varepsilon_a^{(1)} \varphi_a^{(1)} + \sum_{i=1}^2 \eta_i \psi_i + \sum_{a=1}^3 \varepsilon_a^{(2)} \varphi_a^{(2)} \quad (15)$$

с восемью функциями $\varepsilon_a^{(1)}(\tau)$, $\varepsilon_a^{(2)}(\tau)$ и $\eta_i(\tau)$, зависящими от времени. Генератор (15) сохраняется на поверхности связей первого рода

$$\frac{dG}{d\tau} \stackrel{\Sigma_1}{=} 0, \quad (16)$$

и, как следствие, не все функции $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, η_i независимы. Действительно, вычисляя полную производную в (16), получаем соотношение

$$\dot{\varepsilon}_a^{(2)} + \varepsilon_a^{(1)} - \epsilon_{abc} \varepsilon_b^{(2)} A_+^c - \eta_i A_i^a = 0.$$

Выражая отсюда $\varepsilon_a^{(1)}$ через остальные функции $\varepsilon_a^{(2)}$ и η_i , генератор локальных преобразований представляем окончательно в виде

$$G = (-\dot{\varepsilon}_a^{(2)} + \epsilon_{abc} \varepsilon_b^{(2)} A_+^c + \eta_i A_i^a) \varphi_a^{(1)} + \eta_i \psi_i + \varepsilon_a^{(2)} \varphi_a^{(2)}. \quad (17)$$

⁴⁾Эта операция, будучи в высшей степени нетривиальной, может быть проделана с использованием базиса Гребнера.

С помощью (17) инфинитезимальные преобразования локальной симметрии координат фазового пространства задаются следующими скобками Дирака:

$$\delta A_\mu = \{G, A_\mu\}_D, \quad \delta \pi^\mu = \{G, \pi^\mu\}_D.$$

Детальное обсуждение всех преобразований симметрии и их связь с инвариантностью исходной теории Янга–Миллса будет изложено в отдельной публикации. Здесь же мы лишь кратко опишем ту новую локальную симметрию механики Янга–Миллса на световом конусе, которая не имеет аналога в мгновенной форме. Наш результат состоит в том, что лагранжиан модели на световом конусе (4) инвариантен, т.е. $\delta_G L_{lc} = 0$, относительно пятипараметрических преобразований локальной симметрии двух типов:

1) ожидаемых локальных изотопических $SU(2)$ -вращений:

$$\delta_\varepsilon A_+^a = \dot{\varepsilon}_a(\tau) - \varepsilon_{abc}\varepsilon_b(\tau)A_+^c, \quad \delta_\varepsilon A_-^a = -\varepsilon_{abc}\varepsilon_b(\tau)A_-^c, \quad \delta_\varepsilon A_i^a = -\varepsilon_{abc}\varepsilon_b(\tau)A_i^c;$$

2) новых локальных неизотопических вариаций вида

$$\delta_\eta A_+^a = \eta_i(\tau)A_i^a, \quad \delta_\eta A_-^a = 0, \quad \delta_\eta A_i^a = \eta_i(\tau)A_-^a.$$

Теперь, имея генератор локальных преобразований, мы можем поставить вопрос о поиске такой координатизации фазового пространства, при которой часть переменных представляет собой инварианты данной симметрии. Решив этот вопрос, мы будем в состоянии осуществить явную редукцию гамильтоновой системы на поверхность связей. В следующем разделе мы обсудим некоторые результаты, полученные в этом направлении для простой модели со структурной группой $SU(2)$.

4. КЛАССИЧЕСКАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

$SU(2)$ -МЕХАНИКИ ЯНГА–МИЛЛСА НА СВЕТОМ КОНУСЕ

$SU(2)$ -механика Янга–Миллса в мгновенной форме после исключения калибровочных степеней свободы представляет собой невырожденную гамильтонову систему размерности 2×6 . Ее функция Гамильтона соответствует так называемой многочастичной системе Эйлера–Калоджеро–Мозера типа ID_3 с внешним потенциалом четвертого порядка⁵⁾

$$H_I := \frac{1}{2} \sum_{a=1}^3 p_a^2 + \frac{1}{2} \sum_{\text{cyclic}} \xi_a^2 \left[\frac{1}{(x_b - x_c)^2} + \frac{1}{(x_b + x_c)^2} \right] + \frac{1}{2} \sum_{a < b} x_a^2 x_b^2,$$

где (x_a, p_a) являются каноническими координатами трех частиц, $\{x_a, p_b\} = \delta_{ab}$, а переменные ξ_a описывают спиновые степени, удовлетворяющие алгебре $so(3)$, $\{\xi_a, \xi_b\} = \varepsilon_{abc}\xi_c$.

Тест на интегрируемость этой системы указывает на сложное хаотическое поведение классических траекторий (см. обсуждение и ссылки в [7]–[9]). Верно ли это

⁵⁾Подробнее о гамильтоновой редукции см. в [11], [14].

же утверждение для динамики нулевых мод на световом конусе? Здесь мы кратко обсуждаем отрицательный ответ, ссылаясь на работу [21], где показано, что в противоположность мгновенной форме механика Янга–Миллса на световом конусе редуцируется к свободному движению одной нерелятивистской частицы.

Кратко опишем, следуя [21], основные этапы гамильтоновой редукции. Чтобы записать явно редуцированную форму $SU(2)$ -механики Янга–Миллса на световом конусе, воспользуемся компактной записью, введя (3×3) -матрицу A_{ab} , составленную из столбцов: $A := \|A_a^1, A_a^2, A_a^3\|$. Исключение локальных степеней свободы, соответствующих связям $\varphi_a^{(2)}$, достигается за счет *полярного разложения* матрицы A : $A = OS$, где S – положительно определенная симметрическая (3×3) -матрица и O – ортогональная матрица. Три угла, параметризующие ее, являются калибровочными степенями свободы, ассоциируемыми со связями $\varphi_a^{(2)}$. Чтобы найти такие же циклические координаты, соответствующие связям ψ_1, ψ_2 , приведем матрицу S к главным осям:

$$S = R^t(\chi_1, \chi_2, \chi_3) \text{diag}(q_1, q_2, q_3) R(\chi_1, \chi_2, \chi_3),$$

с помощью ортогональной матрицы R , зависящей от трех углов Эйлера. Анализ показывает, что два из них, например углы χ_1 и χ_2 , могут быть отождествлены с оставшимися чисто калибровочными степенями свободы.

Дальнейшее разрешение четырех связей второго рода $\chi_{i\perp}^\alpha$ приводит к невырожденной системе, которая представляет собой одномерную *свободную частицу*, или, если допустить комплексные решения этих связей (подробнее см. [21]), к более интересной модели – к так называемой *конформной механике*. В последнем случае с учетом комплексных решений связей второго рода редуцированный гамильтониан имеет вид

$$H_{lc} = \frac{1}{2} \left(p_1^2 + \frac{\kappa^2}{q_1^2} \right), \quad (18)$$

где $\kappa^2 = (p_{\chi_3}/2)^2$. Так как угол χ_3 оказался циклическим, то сопряженный импульс p_{χ_3} представляет собой интеграл движения, и гамильтониан (18) действительно описывает конформную механику с “константой взаимодействия” κ^2 ⁶⁾.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели $SU(n)$ калибровочную теорию Янга–Миллса на нуль-плоскости, предположив, что калибровочные потенциалы в классическом действии являются только функциями времени. Оказалось, что динамика таких нулевых мод существенно отличается от механики Янга–Миллса в мгновенной форме. Механика на световом конусе имеет гораздо более сложное описание как система со связями. Используя формализм Дирака для описания вырожденных гамильтоновых систем, мы нашли, что кроме связей, генерирующих ожидаемые однородные преобразования калибровочной группы $SU(n)$, существует дополнительный набор связей первого и второго рода. Более того, оказалось, что как количество, так и тип связей зависит от

⁶⁾ Константа κ является параметром, задающим отклонение от вещественных траекторий. Все они лежат в подпространстве $\det \|A\| = 0$ и соответствуют движению свободной частицы.

ТАБЛИЦА 1

Г-степень	Связи $(i, k = 1, 2)$
2	$\chi_k^a = \pi_a^k - f_{abc} A_-^b A_k^c$
3	$\varphi_a^{(2)} = f_{abc} (A_-^b \pi_c^- + A_k^b \pi_c^k)$
5	$\zeta_i = d_{abc} f_{bpq} f^{cst} A_i^a A_-^p A_k^q A_-^s A_k^t$

ранга структурной группы $SU(n)$. Так, например, для $SU(3)$ -группы в сравнении со случаем $SU(2)$ есть дополнительная пара вторичных связей второго рода. Для сравнения отметим, что в мгновенной форме существуют лишь первичные связи $\varphi_a^{(1)}$ и вторичные связи $\varphi_a^{(2)}$ первого рода для всех групп $SU(n)$. В $SU(2)$ -механике на световом конусе из-за новых связей происходит существенное сокращение количества “истинных” степеней свободы, в результате чего модель оказывается классически интегрируемой. Верно ли последнее утверждение для $SU(n)$ -механики Янга–Миллса на световом конусе при $n > 2$, представляет собой открытый вопрос.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Базис Гребнера для $SU(3)$ -механики Янга–Миллса на световом конусе

Первоначально для определения и классификации связей в механике с группой $SU(2)$ стандартная процедура Дирака–Бергмана была алгоритмически реализована в системе компьютерной алгебры MAPLE [19], [23] с помощью встроенной функции GroebnerBasis с мономиальным упорядочением DegreeReverseLexicographic [16]–[18]. Однако для группы $SU(3)$ из-за значительного увеличения числа ненулевых структурных констант f_{abc} и d_{abc} памяти компьютера оказалось недостаточно. Поэтому была написана специальная программа в системе компьютерной алгебры Mathematica, позволяющая последовательно строить однородный базис Гребнера (см. [16], § 10.2) в соответствии с выбранной градуировкой переменных. Ниже кратко описаны основные шаги примененного алгоритма.

Введем градуировку Γ , задав следующие значения весов переменных π_a^μ и A_μ^a :

$$\Gamma(\pi_a^\mu) = 2, \quad \Gamma(A_\mu^a) = 1, \quad a = 1, 2, \dots, 8, \quad \mu = -, 1, 2.$$

Связи χ_k^a , $\varphi_a^{(2)}$ и ζ_i (см. соответственно (6), (9) и (13)), представляющие теперь набор Γ -однородных многочленов, приведены в табл. 1 с указанием соответствующей Γ -степени.

Далее, выберем Γ -совместимое градуированное лексикографическое упорядочение, обеспечивающее минимальное начальное число S -многочленов, в виде

$$\pi_a^- \succ \pi_b^1 \succ \pi_c^2 \succ A_-^a \succ A_1^b \succ A_2^c, \quad a, b, c = 1, 2, \dots, 8,$$

а в случае одинакового пространственного индекса μ определим его следующим образом:

$$\pi_a^\mu \succ \pi_b^\mu \succ A_\mu^a \succ A_\mu^b, \quad \text{если} \quad a < b.$$

ТАБЛИЦА 2

G_n	Число элементов	Связи и S -многочлены
G_2	16	χ_k^a
G_3	8	$\varphi_a^{(2)}$
G_4	15	(G_3, G_3)
G_5	14	$\zeta_i, (\zeta_i, G_j), i = 1, 2, j = 2, 3, 4$ $(G_2, G_4), (G_3, G_3), (G_3, G_4), (G_4, G_4)$
G_6	13	$(G_2, G_5), (G_3, G_5), (G_4, G_5), (G_5, G_5)$ $(G_3, G_4), (G_4, G_4)$

При таком упорядочении связи χ_k^a и $\varphi^{(2)}$ образуют низшие компоненты G_2 и G_3 однородного базиса Гребнера степеней 2 и 3 соответственно. Компоненты высших степеней строятся последовательно в порядке возрастания степени согласно алгоритму:

- а) вычислить S -многочлены для элементов из G_i и G_j : (G_i, G_j) ;
- б) исключить лишние S -многочлены согласно критериям Бухбергера [16]–[18];
- в) вычислить нормальные формы для оставшихся S -многочленов относительно уже найденных низших компонент.

В табл. 2 приведены результаты расчетов, где указано число S -многочленов с отличной от нуля нормальной формой в компоненте G_n и пары компонент, из которых брались элементы для образования этих S -многочленов.

Программа была написана на языке системы компьютерной алгебры *Mathematica* (версия 5.0), вычисления проводились на машине с процессором 2xOpteron-242 (1.6 ГГц) и объемом оперативной памяти 6 ГБ. Следует отметить, что приведенные элементы – это лишь необходимые для данной работы низшие компоненты базиса Гребнера. Дальнейшие вычисления не проводились из-за резкого, от степени к степени, роста времени счета: для расчета G_4 – это примерно час, для G_5 – 1.5 суток, а для G_6 – уже месяц.

Благодарности. Авторы выражают признательность Т. Хайнзл, Д. Младенову и С. Кривоносу за плодотворные обсуждения тем, относящихся к данной работе. А. М. Хведелидзе благодарит организационный комитет конференции “Классические и квантовые интегрируемые системы” (Дубна, 2007) за проведение столь интересного и стимулирующего мероприятия.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 07-01-00660) и Министерства образования и науки Российской Федерации (грант № 5362.2006.2).

Список литературы

- [1] P. A. M. Dirac, *Rev. Modern Phys.*, **21**:3 (1949), 392–399.
- [2] П. А. М. Дирак, *К созданию квантовой теории поля*, Наука, М., 1990.
- [3] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics. With applications to Yang–Mills theory, general relativity, classical spin, dual string model*, Lecture Notes in Phys., **169**, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1982.

- [4] Г.З. Басеян, С.Г. Матинян, Г.К. Саввиди, *Письма в ЖЭТФ*, **29** (1979), 641.
- [5] M. Lüscher, *Nucl. Phys. B*, **219**:1 (1983), 233–261.
- [6] B. Simon, *Ann. Phys.*, **146**:1 (1983), 209–220.
- [7] Б.В. Чириков, Д.Л. Шепелянский, *Письма в ЖЭТФ*, **34** (1981), 171; Е.С. Николаевский, Л.Н. Шур, *Письма в ЖЭТФ*, **36** (1982), 176.
- [8] Б.В. Медведев, *ТМФ*, **60**:2 (1984), 224–244.
- [9] I. Ya. Aref'eva, A. S. Koshelev, P. B. Medvedev, *Modern Phys. Lett. A*, **13**:31 (1998), 2481–2493.
- [10] B. Dahmen, B. Raabe, *Nucl. Phys. B*, **384**:1–2 (1992), 352–380.
- [11] S. A. Gogilidze, A. M. Khvedelidze, D. M. Mladenov, H. P. Pavel, *Phys. Rev. D*, **57**:12 (1998), 7488–7500.
- [12] A. M. Khvedelidze, H. P. Pavel, G. Röpke, *Phys. Rev. D*, **61**:2 (2000), 025017.
- [13] A. M. Khvedelidze, H. P. Pavel, *Phys. Lett. A*, **267**:2–3 (2000), 96–100.
- [14] A. M. Khvedelidze, D. M. Mladenov, *Phys. Rev. D*, **62**:12 (2000), 125016.
- [15] H.-P. Pavel, *Phys. Lett. B*, **648**:1 (2007), 97–106; [arXiv: hep-th/0701283](#).
- [16] T. Becker, V. Weispfenning, *Gröbner Bases: A Computational Approach to Commutative Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, **141**, Springer, New York, 1993.
- [17] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, 2nd ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 1996.
- [18] B. Buchberger, F. Winkler (eds.), *Gröbner Bases and Applications*, Papers from the Conference on 33 Years of Grobner Bases held at the University of Linz (Linz, February 2–4, 1998), London Mathematical Society Lecture Note Series, **251**, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [19] V. P. Gerdt, S. A. Gogilidze, “Constrained Hamiltonian systems and Gröbner bases”, *Computer Algebra in Scientific Computing, CASC'99*. Proc. 2nd Workshop (Munich, Germany, May 31–June 4, 1999), eds. V. G. Ganzha, E. W. Mayr, E. V. Vorozhtsov, Springer, Berlin, 1999, 138–146; [arXiv: math/9909113](#).
- [20] V. Gerdt, A. Khvedelidze, D. Mladenov, “Analysis of constraints in light-cone version of $SU(2)$ Yang-Mills mechanics”, *Computer Algebra and its Applications to Physics. CAAP-2001*, Proc. Int. Workshop (Dubna, Russia, June 28–30, 2001), ed. V. P. Gerdt, JINR, Dubna, 2002, 83–92; [arXiv: hep-th/0209107](#).
- [21] V. Gerdt, A. Khvedelidze, D. Mladenov, *Light-cone $SU(2)$ Yang-Mills theory and conformal mechanics*, [arXiv: hep-th/0210022](#).
- [22] V. Gerdt, A. Khvedelidze, D. Mladenov, “On application of involutivity analysis of differential equations to constrained dynamical systems”, *Symmetries and Integrable Systems*, Selected Papers of the Seminar, 2000–2005, v. I, ed. A. N. Sissakian, JINR, Dubna, 2006, 132–150; [arXiv: hep-th/0311174](#).
- [23] V. Gerdt, A. Khvedelidze, Yu. Pali, “Towards an algorithmisation of the Dirac constraint formalism”, *Global Integrability of Field Theories*, Proc. GIFT 2006, eds. J. Calmet, W. M. Seiler, R. W. Tucker, Cockcroft Institute, Daresbury, UK, 2006, 135–154; [arXiv: math-ph/0611021](#).
- [24] T. Heinzl, “Light-cone quantization: Foundations and applications”, *Lecture Notes in Phys.*, **572**, Springer, Berlin, 2001, 55–142.
- [25] M. Henneaux, C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992.
- [26] S. A. Gogilidze, V. V. Sanadze, Yu. S. Surovtsev, F. G. Tkebuchava, *J. Phys. A*, **27**:19 (1994), 6509–6523.