Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. З. Иоргов, В. Н. Шадура, Ю. В. Тихий, Собственные векторы $\tau^{(2)}(t_q)$ -модели Бакстера–Бажанова–Строганова с граничными условиями фиксированных спинов, *ТМФ*, 2008, том 155, номер 1, 94–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6195>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 15:52:31

© 2008 г. Н. З. Иоргов*, В. Н. Шадура*, Ю. В. Тихий*

СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ $\tau^{(2)}(t_q)$ -МОДЕЛИ БАКСТЕРА–БАЖАНОВА–СТРОГАНОВА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ФИКСИРОВАННЫХ СПИНОВ

Найдены явные формулы для собственных векторов трансфер-матрицы модели Бакстера–Бажанова–Строганова (спиновой модели, в которой спины принимают N значений) с граничными условиями фиксированных спиновых состояний. Эти формулы получены в результате предельного перехода из формул для собственных векторов периодической модели Бакстера–Бажанова–Строганова. Последние были выведены в рамках метода разделения переменных Склянина. В случае, когда значения спинов на границе фиксированы, соответствующие T - Q уравнения Бакстера на функции разделенных переменных удастся решить явно. В качестве частного случая получены собственные векторы для гамильтониана изингоподобной модели квантовой $\mathbb{Z}_N$ -цепочки.

Ключевые слова: интегрируемая квантовая цепочка, фиксированные граничные условия, метод разделения переменных.

1. ВВЕДЕНИЕ

За последние два десятилетия был достигнут значительный прогресс в применении метода разделения переменных (или функционального анзаца Бете) к широкому классу интегрируемых моделей квантовых цепочек и статистической физики. Этот прогресс был инициирован работой Склянина [1], в которой было предложено развитие метода разделения переменных для квантовой цепочки Тоды, в которой алгебраический анзац Бете оказывается неприменимым. Идея состоит в том, чтобы записать собственные векторы периодической задачи в виде линейной комбинации собственных векторов вспомогательной задачи (вспомогательная задача для периодической цепочки Тоды оказывается открытой цепочкой Тоды). Следующий шаг состоит в рекуррентном построении собственных векторов вспомогательной задачи для цепочки из m узлов в терминах собственных векторов вспомогательной задачи для цепочки из $m - 1$ узла [2], [3].

*Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Киев, Украина.
E-mail: iorgov@bitp.kiev.ua, shadura@bitp.kiev.ua, tykhyu@bitp.kiev.ua

В работе [4] эта программа была реализована для неоднородной периодической модели Бакстера–Бажанова–Строганова (ББС) (или $\tau^{(2)}(t_q)$ -модели) [5]–[8], определенной при помощи циклических L -операторов [9], [7]. Было показано, что для каждого собственного значения трансфер-матрицы (найденного из функциональных соотношений) существует явная формула для собственного вектора. Таким образом, задача построения собственных векторов сводится к задаче нахождения соответствующих собственных значений.

При специальных значениях параметров периодическую модель ББС можно интерпретировать как модель с фиксированными значениями спинов на границе [5]. В указанной работе собственные векторы этой модели выводятся из собственных векторов периодической модели ББС с помощью специального выбора соответствующих параметров. В случае граничных условий с фиксированными спинами структура собственных значений оказывается простой, и T – Q уравнения Бакстера для функций разделенных переменных могут быть явно решены в терминах циклической функции $w_p(\gamma)$ [10], которая является аналогом q -гамма-функции при корнях из единицы. Она дает формулы для собственных векторов модели ББС с фиксированными значениями спинов на границе.

В работе показано, что гамильтониан изингоподобной модели квантовой $\mathbb{Z}_N$ -цепочки с фиксированными значениями спинов на границе, найденный Бакстером [6], [11], можно получить в нашем подходе, если рассмотреть более частный выбор параметров модели. Отсюда, в частности, следует, что можно найти явные формулы для собственных векторов и собственных значений этого гамильтониана. Формула для собственных значений совпадает с формулой Бакстера, полученной из функционального соотношения для трансфер-матрицы. С помощью явных формул для собственных векторов можно доказать, что соответствующие собственные значения входят в спектр гамильтониана с единичными кратностями.

2. ФОРМУЛИРОВКИ МОДЕЛИ ББС: РЕШЕТОЧНАЯ МОДЕЛЬ И МОДЕЛЬ КВАНТОВОЙ ЦЕПОЧКИ

Следуя обозначениям работы Бакстера [5], определим модель ББС как статистическую модель коротковзаимодействующих спинов, расположенных в вершинах прямоугольной решетки. Спиновые переменные $s_{x,y}$ зависят от пары целых чисел (x, y) : $x = 1, 2, \dots, n+1$ и $y = 1, 2, \dots, m$. Каждая спиновая переменная $s_{x,y}$ может принимать N значений ($N \geq 2$): $0, 1, \dots, N-1$. Модель обладает $\mathbb{Z}_N$ -симметрией, и область допустимых значений спиновой переменной $s_{x,y}$ можно расширить на все целые числа, отождествляя два значения в случае, когда их разность кратна N . Модель включает киральное ограничение на значения соседних спинов по вертикали:

$$s_{x,y} - s_{x,y+1} = 0, 1 \pmod{N}. \quad (1)$$

В дальнейшем рассматриваются спиновые переменные на двух соседних рядах: (k, l) и $(k, l+1)$, где l фиксировано и $k = 1, 2, \dots, n+1$. Обозначим $s_{k,l} = \gamma_k$ и $s_{k,l+1} = \gamma'_k$. Модель зависит от параметров t_q и $a'_k, b'_k, c'_k, d'_k, a''_k, b''_k, c''_k, d''_k, k = 1, 2, \dots, n+1$.

Каждый элементарный квадрат решетки имеет больцмановский вес (см. рисунок)

$$W_\tau(\gamma_{k-1}, \gamma_k; \gamma'_{k-1}, \gamma'_k) = \sum_{m_{k-1}=0}^1 \omega^{m_{k-1}(\gamma'_k - \gamma_{k-1})} (-\omega t_q)^{\gamma_k - \gamma'_k - m_{k-1}} \times \\ \times F'_{k-1}(\gamma_{k-1} - \gamma'_{k-1}, m_{k-1}) F''_k(\gamma_k - \gamma'_k, m_{k-1}), \quad (2)$$

где $\omega = e^{2\pi i/N}$ и

$$F'_k(0, 0) = 1, \quad F'_k(0, 1) = -\omega t_q \frac{c'_k}{b'_k}, \quad F'_k(1, 0) = \frac{d'_k}{b'_k}, \quad F'_k(1, 1) = -\omega \frac{a'_k}{b'_k},$$

а выражения для $F''_k(\gamma_k - \gamma'_k, m_{k-1})$ получаются из $F'_k(\gamma_k - \gamma'_k, m_k)$ с помощью подстановок $a'_k, b'_k, c'_k, d'_k \rightarrow a''_k, b''_k, c''_k, d''_k$.

Треугольник с вершинами, в которых находятся спиновые переменные γ_{k-1} , γ'_{k-1} , m_{k-1} , отвечает функции $F'_{k-1}(\gamma_{k-1} - \gamma'_{k-1}, m_{k-1})$ в (2); треугольник γ_k , γ'_k , m_{k-1} отвечает $F''_k(\gamma_k - \gamma'_k, m_{k-1})$.

Рассмотрим периодические граничные условия $\gamma_{n+2} = \gamma_1$, $\gamma'_{n+2} = \gamma'_1$, где $n+1$ — число узлов на горизонтальных рядах решетки. Трансфер-матрица периодической модели ББС представляет собой матрицу размера $(N^{n+1} \times N^{n+1})$ с матричными элементами

$$\mathbf{t}_{n+1}(\gamma, \gamma') = \prod_{k=2}^{n+2} W_\tau(\gamma_{k-1}, \gamma_k; \gamma'_{k-1}, \gamma'_k), \quad (3)$$

пронумерованными наборами спиновых переменных $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+1}\}$ и $\gamma' = \{\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_{n+1}\}$ на двух соседних рядах.

Рассматривая величины m_k , $k = 1, 2, \dots, n+1$, в (2) в качестве вспомогательных спиновых переменных, принимающих два значения 0 и 1, трансфер-матрицу (3) можно переписать в вертексной формулировке, ассоциируя статистические веса не с элементарными квадратами, а с вертексами, каждый из которых связывает четыре спина: m_{k-1} , m_k , γ_k , γ'_k (см. рисунок). Тогда вес, связанный с k -м вертексом, имеет вид

$$\ell_k(t_q; m_{k-1}, m_k; \gamma_k, \gamma'_k) = \omega^{m_{k-1}\gamma'_k - m_k\gamma_k} (-\omega t_q)^{\gamma_k - \gamma'_k - m_{k-1}} \times \\ \times F''_k(\gamma_k - \gamma'_k, m_{k-1}) F'_k(\gamma_k - \gamma'_k, m_k), \quad (4)$$

и трансфер-матрицу (3) можно переписать в виде

$$\mathbf{t}_{n+1}(\gamma, \gamma') = \sum_{m_1, \dots, m_{n+1}} \prod_{k=2}^{n+2} \ell_k(t_q; m_{k-1}, m_k; \gamma_k, \gamma'_k). \quad (5)$$

Для нашей конструкции собственных векторов трансфер-матрицы модели ББС используется представление этой модели как модели квантовой цепочки. На каждом узле k квантовой цепочки задается циклический L -оператор [9], [7], действующий в двумерном вспомогательном пространстве:

$$L_k(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 + \lambda \varkappa_k \mathbf{v}_k & \lambda \mathbf{u}_k^{-1}(a_k - b_k \mathbf{v}_k) \\ \mathbf{u}_k(c_k - d_k \mathbf{v}_k) & \lambda a_k c_k + \mathbf{v}_k b_k d_k / \varkappa_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n+1, \quad (6)$$

где λ – спектральный параметр, и в каждом узле имеются пять параметров $\varkappa_k$, a_k , b_k , c_k , d_k . В каждом узле k задаются ультралокальные вейлевские элементы $\mathbf{u}_k$ и $\mathbf{v}_k$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям и нормировке

$$\mathbf{u}_j \mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k \mathbf{u}_j, \quad \mathbf{v}_j \mathbf{v}_k = \mathbf{v}_k \mathbf{v}_j, \quad \mathbf{u}_j \mathbf{v}_k = \omega^{\delta_{j,k}} \mathbf{v}_k \mathbf{u}_j, \quad \omega = e^{2\pi i/N}, \quad \mathbf{u}_k^N = \mathbf{v}_k^N = 1, \quad (7)$$

N -мерное линейное пространство (квантовое пространство) $\mathcal{V}_k$ с базисом $|\gamma\rangle_k$, $\gamma \in \mathbb{Z}_N$, и естественное скалярное произведение ${}_k\langle\gamma'|\gamma\rangle_k = \delta_{\gamma', \gamma}$. Вейлевские элементы $\mathbf{u}_k$ и $\mathbf{v}_k$ действуют в пространстве $\mathcal{V}_k$ следующим образом:

$$\mathbf{u}_k |\gamma\rangle_k = \omega^\gamma |\gamma\rangle_k, \quad \mathbf{v}_k |\gamma\rangle_k = |\gamma+1\rangle_k. \quad (8)$$

Соответствие между решеточной моделью ББС и квантовой цепочкой устанавливается с помощью соотношения

$$\ell_k(t_q; m_{k-1}, m_k; \gamma_k, \gamma'_k) = {}_k\langle\gamma_k|L_k(\lambda)_{m_{k-1}, m_k}|\gamma'_k\rangle_k \quad (9)$$

и следующей связи между параметрами этих моделей:

$$\lambda = -\omega t_q, \quad \varkappa_k = \frac{d'_k d''_k}{b'_k b''_k}, \quad a_k = \frac{c'_k}{b''_k}, \quad b_k = \omega \frac{d'_k a''_k}{b'_k b''_k}, \quad c_k = \frac{c'_k}{b'_k}, \quad d_k = \frac{a'_k d''_k}{b'_k b''_k}. \quad (10)$$

Доопределим действие операторов $\mathbf{u}_k$, $\mathbf{v}_k$ на $\mathcal{V}^{(n+1)} = \mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{V}_{n+1}$, полагая это действие тривиальным на всех $\mathcal{V}_s$ с $s \neq k$. Матрица монодромии квантовой цепочки из $n+1$ узлов задается формулой

$$T_{n+1}(\lambda) = L_1(\lambda) L_2(\lambda) \dots L_{n+1}(\lambda) = \begin{pmatrix} A_{n+1}(\lambda) & B_{n+1}(\lambda) \\ C_{n+1}(\lambda) & D_{n+1}(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Трансфер-матрица (5) получается в результате вычисления следа по вспомогательному пространству:

$$\mathbf{t}_{n+1}(\lambda) = \text{tr } T_{n+1}(\lambda) = A_{n+1}(\lambda) + D_{n+1}(\lambda). \quad (12)$$

Эта квантовая цепочка является интегрируемой, поскольку L -операторы (6) сплетаются с помощью твистованной R -матрицы шестивершинной модели:

$$R(\lambda, \nu) = \begin{pmatrix} \lambda - \omega\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega(\lambda - \nu) & \lambda(1 - \omega) & 0 \\ 0 & \nu(1 - \omega) & \lambda - \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - \omega\nu \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$R(\lambda, \nu) L_k^{(1)}(\lambda) L_k^{(2)}(\nu) = L_k^{(2)}(\nu) L_k^{(1)}(\lambda) R(\lambda, \nu), \quad (14)$$

где $L_k^{(1)}(\lambda) = L_k(\lambda) \otimes \mathbb{I}$, $L_k^{(2)}(\nu) = \mathbb{I} \otimes L_k(\nu)$. Из соотношения (14) следует, что $[\mathbf{t}_{n+1}(\lambda), \mathbf{t}_{n+1}(\mu)] = 0$. Таким образом, $\mathbf{t}_{n+1}(\lambda)$ представляет собой производящую функцию для набора коммутирующих нелокальных и неэрмитовых гамильтонианов модели. Кроме того, из сплетающего соотношения (14) также следует, что $[B_{n+1}(\lambda), B_{n+1}(\mu)] = 0$, а тогда $B_{n+1}(\lambda)$ также представляет собой производящую функцию для другого набора коммутирующих операторов.

Модель ББС с граничными условиями фиксированных спинов можно получить, начиная с периодической неоднородной модели ББС с $n+1$ узлами (в каждом ряду, если рассматривать решеточную формулировку), если зафиксировать в ней параметры $a'_{n+1} = d'_{n+1} = 0$. В этом случае $F'_{n+1}(\gamma_{n+1} - \gamma'_{n+1}, m) = 0$, если только не выполняется равенство $\gamma_{n+1} = \gamma'_{n+1}$. Отсюда следует, что $\mathbf{t}_{n+1}(\lambda)$ с такими параметрами и фиксированным значением γ_{n+1} можно интерпретировать как трансфер-матрицу ББС модели с n узлами, в которой первый и последний (n -й) спины взаимодействуют с фиксированным спином γ_{n+1} (граничное условие фиксированных спинов).

Рассмотрим L -операторную формулировку такой модели. В силу (10) из соотношений $a'_{n+1} = d'_{n+1} = 0$ следует, что $\varkappa_{n+1} = b_{n+1} = d_{n+1} = 0$ и $b_{n+1}d_{n+1}/\varkappa_{n+1} = 0$. Поэтому имеем

$$L_{n+1}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \mathbf{u}_{n+1}^{-1} a_{n+1} \\ \mathbf{u}_{n+1} c_{n+1} & \lambda a_{n+1} c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ \mathbf{u}_{n+1} c_{n+1} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \mathbf{u}_{n+1}^{-1} a_{n+1} \\ 0 & \lambda a_{n+1} c_{n+1} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Так как $\mathbf{t}_{n+1}(\lambda)$ коммутирует с $\mathbf{u}_{n+1}$, пространство состояний задачи с $n+1$ узлом можно ограничить на состояния с фиксированным собственным значением $\mathbf{u}_{n+1} = \omega^{\gamma_{n+1}}$, что дает задачу на n узлах. Чтобы ввести различные фиксированные спины на двух границах, введем еще один L -оператор $L_0(\lambda)$, имеющий вид (15), но с оператором $\mathbf{u}_0$ и параметрами a_0 и c_0 . На состояниях с фиксированными собственными значениями $\mathbf{u}_{n+1} = \omega^{\gamma_{n+1}}$ и $\mathbf{u}_0 = \omega^{\gamma_0}$ получим

$$L_{n+1}(\lambda)L_0(\lambda) = (1 + \lambda \omega^{\gamma_0 - \gamma_{n+1}} a_{n+1} c_0) \begin{pmatrix} 1 & \lambda a_0 \omega^{-\gamma_0} \\ c_{n+1} \omega^{\gamma_{n+1}} & \lambda a_0 c_{n+1} \omega^{\gamma_{n+1} - \gamma_0} \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что различные граничные спины на двух границах можно учесть с помощью единственного L -оператора

$$L_{n+1}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \mathbf{u}_{n+1}^{-1} a_0 \omega^{\gamma_{n+1} - \gamma_0} \\ \mathbf{u}_{n+1} c_{n+1} & \lambda a_0 c_{n+1} \omega^{\gamma_{n+1} - \gamma_0} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

который имеет вид (6) со специально подобранными параметрами. Таким образом, в данной работе рассматривается матрица монодромии, определенная соотношением (11) для квантовой цепочки с $n+1$ узлами, где $L_{n+1}(\lambda)$ задается в (16). Соответствующая трансфер-матрица с фиксированными значениями спинов на границе имеет вид

$$\mathbf{t}^B(\lambda) = \text{tr } T_{n+1}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \omega^{-\gamma_0} a_0 \\ 0 & \lambda a_0 c_{n+1} \omega^{\gamma_{n+1} - \gamma_0} \end{pmatrix} L_1(\lambda) L_2(\lambda) \dots L_n(\lambda) \begin{pmatrix} 1 & \\ \omega^{\gamma_{n+1}} c_{n+1} & \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Задача построения собственных векторов трансфер-матрицы $\mathbf{t}^B(\lambda)$ решается следующим образом. Сначала находятся собственные векторы оператора $B_1(\lambda)$. Затем собственные векторы оператора $B_m(\lambda)$ строятся рекуррентно в виде линейных

комбинаций собственных векторов оператора $B_{m-1}(\lambda)$. После этого собственные векторы трансфер-матрицы (17) строятся как линейные комбинации собственных векторов оператора $B_{n+1}(\lambda)$ (вспомогательная задача). Коэффициенты этого разложения оказываются функциями многих переменных, но допускают разделение переменных и могут быть записаны как произведения функций одной переменной, каждая из которых удовлетворяет разностному уравнению Бакстера, которое уже может быть решено явно.

3. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ ОПЕРАТОРА $B_m(\lambda)$

3.1. Собственные значения оператора $B_m(\lambda)$. Начнем с задачи построения собственных векторов оператора $B_m(\lambda)$. Поскольку $[B_m(\lambda), B_m(\mu)] = 0$, будем искать не зависящие от λ собственные векторы оператора $B_m(\lambda)$ с собственными значениями, являющимися полиномами по λ . Факторизуя этот многочлен, получим

$$B_m(\lambda)\Psi_{\rho_m} = \lambda r_{m,0}\omega^{-\rho_{m,0}} \prod_{s=1}^{m-1} (\lambda + r_{m,s}\omega^{-\rho_{m,s}})\Psi_{\rho_m}, \quad (18)$$

где $r_{m,s}$, $s = 0, 1, \dots, m-1$, – набор констант, а фазы

$$\rho_m = (\rho_{m,0}, \dots, \rho_{m,m-1}) \in (\mathbb{Z}_N)^m \quad (19)$$

используются для нумерации собственных векторов. Эти формулы справедливы при всех $m = 1, \dots, n+1$, т.е. и для цепочки с граничным L -оператором (16). Как будет показано ниже, в последнем случае допустимы не все фазы ρ_{n+1} , а только те, которые удовлетворяют следующему ограничению, связанному с граничным спином γ_0 :

$$\tilde{\rho}_{n+1} := \sum_{s=0}^n \rho_{n+1,s} = \gamma_0 + 1 \pmod{N}. \quad (20)$$

Определим “усредненную” величину $\mathcal{O}(\lambda^N)$, соответствующую квантовому циклическому оператору $O(\lambda)$, с помощью процедуры усреднения [12]

$$\mathcal{O}(\lambda^N) = \langle O \rangle(\lambda^N) = \prod_{s \in \mathbb{Z}_N} O(\omega^s \lambda) \quad (21)$$

и применим эту процедуру к элементам квантового L -оператора (6). Обозначим результат через $\mathcal{L}_k(\lambda^N)$:

$$\mathcal{L}_k(\lambda^N) = \begin{pmatrix} 1 - \epsilon \lambda^N \lambda^N & -\epsilon \lambda^N (a_k^N - b_k^N) \\ c_k^N - d_k^N & b_k^N d_k^N / \lambda_k^N - \epsilon \lambda^N a_k^N c_k^N \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где $\epsilon = (-1)^N$, и будем называть его *усредненным* $\mathcal{L}$ -оператором модели ББС. В частности, усредняя (16), получим

$$\mathcal{L}_{n+1}(\lambda^N) = \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \lambda^N a_0^N \\ c_{n+1}^N & -\epsilon \lambda^N a_0^N c_{n+1}^N \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Соответственно усредненная матрица монодромии $\mathcal{T}_m$ цепочки из m узлов имеет вид

$$\mathcal{T}_m(\lambda^N) = \mathcal{L}_1(\lambda^N) \mathcal{L}_2(\lambda^N) \dots \mathcal{L}_m(\lambda^N) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_m(\lambda^N) & \mathcal{B}_m(\lambda^N) \\ \mathcal{C}_m(\lambda^N) & \mathcal{D}_m(\lambda^N) \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где элементы оказываются многочленами от λ^N . Согласно предложению 1.5 работы [12] (см. также [13]) эти многочлены совпадают со средними $\langle A_m \rangle$, $\langle B_m \rangle$, $\langle C_m \rangle$ и $\langle D_m \rangle$ от элементов (11). Указанное предложение описывает способ, которым можно найти N -е степени амплитуд $r_{m,s}$: выполняя усреднение (21) выражения (18), получим

$$\mathcal{B}_m(\lambda^N) = (-\epsilon)^m \lambda^N r_{m,0}^N \prod_{s=1}^{m-1} (\lambda^N - \epsilon r_{m,s}^N). \quad (25)$$

С помощью этого соотношения, а также формул (22) и (24) можно найти $r_{m,s}^N$ в терминах параметров a_k^N , b_k^N , c_k^N , d_k^N и $\varkappa_k^N$, $k = 1, 2, \dots, m$. Задача нахождения амплитуд $r_{m,s}$ тем самым сводится к задаче разрешения алгебраического уравнения $(m-1)$ -й степени. Как показано в работе [4], в случае однородной цепочки ББС задача сводится к нахождению корней всего лишь квадратного уравнения. Описанная процедура позволяет вычислить амплитуды $r_{m,s}$ с точностью до некоторых корней из единицы. На самом деле эти фазы можно фиксировать произвольным образом, поскольку это приводит просто к перенумерации собственных векторов. В дальнейшем мы будем предполагать некоторое решение $\{r_{m,s}\}$ фиксированным с помощью задания параметров a_k^N , b_k^N , c_k^N , d_k^N и $\varkappa_k^N$. В случае $m = n+1$ мы снова не можем выбирать фазу $r_{n+1,0}$ произвольным образом. Она будет фиксироваться соотношением

$$\tilde{r}_{n+1} := \prod_{s=0}^n r_{n+1,s} = \omega a_0. \quad (26)$$

Тогда из соотношений (20) и (26) получается правильный коэффициент $a_0 \omega^{-\gamma_0}$ при λ (член самого низкого порядка) в выражении для собственного значения оператора $B_{n+1}(\lambda)$.

3.2. Собственные векторы вспомогательной задачи для одного узла.

В модели ББС оказывается весьма важной циклическая функция $w_p(\gamma)$ [10], которая зависит от переменной $\gamma \in \mathbb{Z}_N$ и от точки $p = (x, y)$, лежащей на кривой Ферма $x^N + y^N = 1$. Зададим $w_p(\gamma)$ разностным уравнением

$$\frac{w_p(\gamma)}{w_p(\gamma-1)} = \frac{y}{1 - \omega^\gamma x}, \quad w_p(0) = 1, \quad \gamma \in \mathbb{Z}_N.$$

Выполнение уравнения Ферма обеспечивает свойство цикличности $w_p(\gamma + N) = w_p(\gamma)$. Функция $w_p(\gamma)$ при этом оказывается аналогом q -гамма-функции при корне из единицы.

Удобно преобразовать базисы в пространствах $\mathcal{V}_k$. Вместо $|\gamma\rangle_k$, $\gamma \in \mathbb{Z}_N$, будем использовать векторы

$$\psi_{\rho_k}^{(k)} = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_N} w_{p_k}(\gamma - \rho_k) |\gamma\rangle_k, \quad \rho_k \in \mathbb{Z}_N, \quad (27)$$

представляющие собой собственные векторы наддиагонального матричного элемента оператора $L_k(\lambda)$:

$$\lambda \mathbf{u}_k^{-1} (a_k - b_k \mathbf{v}_k) \psi_{\rho_k}^{(k)} = \lambda r_k \omega^{-\rho_k} \psi_{\rho_k}^{(k)}. \quad (28)$$

Координаты точек кривой Ферма $p_k = (x_k, y_k)$ можно определить следующим образом. Зафиксируем некоторое значение r_k так, чтобы оно удовлетворяло соотношению $r_k^N = a_k^N - b_k^N$. Тогда $x_k = r_k/a_k$, $y_k = b_k/a_k$.

Если $k = n + 1$, т.е. в случае, когда L -оператор имеет вид (16), выражение для собственных векторов (27) упрощается следующим образом. Зафиксируем $x_{n+1} = \omega^{\gamma_0 - \gamma_{n+1}}$, $y_{n+1} = 0$, $r_{n+1} = a_0$. Это дает с точностью до несущественного постоянного множителя соотношение $w_{p_{n+1}}(\gamma) = \delta_{\gamma, \gamma_{n+1} - \gamma_0}$, а потому $\psi_{\rho_{n+1}}^{(n+1)} = |\rho_{n+1} + \gamma_{n+1} - \gamma_0\rangle_{n+1}$. Вектор $\psi_{\rho_{n+1}}^{(n+1)}$ удовлетворяет соотношению (28) при $k = n + 1$. На состояниях с фиксированным собственным значением $\mathbf{u}_{n+1} = \omega^{\gamma_{n+1}}$ необходимо отождествить $\rho_{n+1} = \gamma_0$.

Заметим, что при $r_k = 0$ (в частности, в суперинтегрируемом случае) это приводит к тому, что $x_k = 0$, $y_k = 1$. В этом случае циклическая функция $w_p(\gamma)$ вырождается, и соотношения (27) не задают новый базис в пространстве $\mathcal{V}_k$. Учитывая это, мы будем рассматривать случай параметров общего положения, для которых $r_k \neq 0$.

Оператор $\mathbf{v}_k$ действует как циклический повышающий оператор:

$$\mathbf{v}_k \psi_{\rho_k}^{(k)} = \psi_{\rho_{k+1}}^{(k)}.$$

Применяя (28) при $k = 1$ и сравнивая с (18), запишем теперь собственный вектор для одного узла как $\Psi_{\rho_{1,0}} := \psi_{\rho_{1,0}}^{(1)}$. При $r_{1,0} = r_1$ имеем

$$B_1(\lambda) \Psi_{\rho_{1,0}} = \lambda r_{1,0} \omega^{-\rho_{1,0}} \Psi_{\rho_{1,0}}, \quad A_1(\lambda) \Psi_{\rho_{1,0}} = \Psi_{\rho_{1,0}} + \lambda \varkappa_1 \Psi_{\rho_{1,0}+1}. \quad (29)$$

3.3. Точки кривой Ферма в формулах для собственных векторов оператора $B_m(\lambda)$. Формула для собственных векторов оператора $B_m(\lambda)$ задается при помощи функции $w_p(\gamma)$, зависящей от четырех типов точек на кривой Ферма $x^N + y^N = 1$:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_m &= (\tilde{x}_m, \tilde{y}_m), & p_{m,s} &= (x_{m,s}, y_{m,s}), \\ \tilde{p}_{m,s} &= (\tilde{x}_{m,s}, \tilde{y}_{m,s}), & p_{m',s'}^{m,s} &= (x_{m',s'}^{m,s}, y_{m',s'}^{m,s}). \end{aligned} \quad (30)$$

Координаты этих точек выражаются через амплитуды $r_{m,s}$, $m = 1, 2, \dots, n + 1$, $s = 0, 1, \dots, m - 1$ (определяемые как некоторые решения уравнений (25), $m = 1, 2, \dots, n + 1$) с помощью формулы

$$x_{m',s'}^{m,s} = \frac{r_{m,s}}{r_{m',s'}}, \quad x_{m,s} = \frac{a_m \varkappa_m r_{m,s}}{b_m}, \quad \tilde{x}_{m,s} = \frac{d_m}{\varkappa_m c_m r_{m,s}}, \quad s, s' \geq 1. \quad (31)$$

Конструкция собственных векторов оператора $B_m(\lambda)$ требует знания следующих точек $p_{m,s}$ и $\tilde{p}_{m,s}$, $s \geq 1$, только при $m \leq n$. Для всех остальных типов точек индекс m принимает все значения до $n + 1$.

Величины $y_{m',s'}^{m,s}$, $y_{m,s}$, $\tilde{y}_{m,s}$ задаются условием, что точки $p_{m',s'}^{m,s}$, $p_{m,s}$, $\tilde{p}_{m,s}$ лежат на кривой Ферма, и следующими соотношениями ($1 \leq l \leq m - 2$) на фазы координат y :

$$\frac{\tilde{r}_{m-1} r_{m,0} r_{m-1}}{\tilde{r}_{m-2} r_{m-1,0} r_{m-1} b_{m-1} c_{m-1} y_{m-1,l} \tilde{y}_{m-1,l}} \prod_{s \neq l}^{m-2} \frac{y_{m-1,s}^{m-1,l}}{y_{m-1,l}^{m-1,s}} \frac{\prod_{k=1}^{m-1} y_{m-1,l}^{m,k}}{\prod_{s=1}^{m-3} y_{m-2,s}^{m-1,l}} = 1, \quad (32)$$

где $\tilde{r}_m = r_{m,0}r_{m,1} \dots r_{m,m-1}$. На практике величины $y_{m',s}^{m,s}$, $y_{m,s}$ можно задать произвольным образом, а координаты $\tilde{y}_{m,s}$ – с помощью соотношения (32). Тогда вследствие условия (25) точки $\tilde{p}_{m,s}$ будут автоматически принадлежать кривой Ферма (см. [4]).

Координаты точек $p_{m,0}$ и $\tilde{p}_m$, $1 \leq m \leq n$, задаются условиями

$$x_{m,0}r_{m,0} = r_{m-1,0}a_m c_m, \quad y_{m,0}r_{m,0} = \varkappa_1 \varkappa_2 \dots \varkappa_{m-1} r_m, \quad (33)$$

$$\tilde{x}_m \tilde{r}_m = r_m, \quad \tilde{y}_m \tilde{r}_m = \frac{b_m d_m \tilde{r}_{m-1}}{\varkappa_m}. \quad (34)$$

В случае $m = n + 1$ используются те же формулы. В силу справедливости формулы (26) и условия $r_{n+1} = a_0$ решение соотношения (34) имеет вид $\tilde{x}_{n+1} = \omega^{-1}$, $\tilde{y}_{n+1} = 0$. Если произвести предельный переход корректным образом, получим $(w_{\tilde{p}_m}(\rho))^{-1} = \delta_{\rho,0}$. Координаты точки $p_{n+1,0}$ на кривой Ферма определяются как

$$x_{n+1,0}r_{n+1,0} = r_{n,0}a_0 c_{n+1}, \quad y_{n+1,0}r_{n+1,0} = \varkappa_1 \varkappa_2 \dots \varkappa_n a_0. \quad (35)$$

Заметим, что из соотношения (33) следует, что точки $x_{n+1,0}$ определяются из условия $x_{n+1,0}r_{n+1,0} = r_{n,0}a_0 c_{n+1}\omega^{\gamma_{n+1}-\gamma_0}$, но при этом удобно избежать введения зависимости от граничных спинов в определение точек на кривой Ферма. Такое изменение определения точек $x_{n+1,0}$ означает, что вместо $w_{(x_{n+1,0}, y_{n+1,0})}(\rho)$ следует применять соотношение

$$w_{(x_{n+1,0}\omega^{\gamma_{n+1}-\gamma_0}, y_{n+1,0})}(\rho) = \frac{w_{p_{n+1,0}}(\rho + \gamma_{n+1} - \gamma_0)}{w_{p_{n+1,0}}(\gamma_{n+1} - \gamma_0)}, \quad (36)$$

в котором точка $p_{n+1,0}$ задается формулой (35). Это соотношение позволяет перенести зависимость от величин граничных спинов γ_0 и γ_{n+1} в аргумент $w_{(x_{n+1,0}, y_{n+1,0})}(\rho)$.

3.4. Рекуррентные соотношения для собственных векторов оператора $B_m(\lambda)$. Напомним, что из (29) следует, что вектор $\Psi_{\rho_{1,0}} := \psi_{\rho_{1,0}}^{(1)} \in \mathcal{V}_1$ представляет собой собственный вектор для $B_1(\lambda)$, а из (18), (19) вытекает, что собственные векторы Ψ_{ρ_m} оператора $B_m(\lambda)$ нумеруются целочисленным вектором $\rho_m = (\rho_{m,0}, \dots, \rho_{m,m-1}) \in (\mathbb{Z}_N)^m$. Определим следующие величины:

$$\tilde{\rho}_m = \sum_{k=0}^{m-1} \rho_{m,k}, \quad \tilde{\rho}'_m = \sum_{k=1}^{m-1} \rho_{m,k}, \quad \rho'_m = (\rho_{m,1}, \dots, \rho_{m,m-1}) \in (\mathbb{Z}_N)^{m-1}. \quad (37)$$

Вектор $\rho_m^{\pm k}$ обозначает вектор ρ_m , в котором $\rho_{m,k}$ заменено на $\rho_{m,k} \pm 1$, т.е.

$$\rho_m^{\pm k} = (\rho_{m,0}, \dots, \rho_{m,k} \pm 1, \dots, \rho_{m,m-1}), \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Приведенная ниже теорема 1, доказанная в работе [4], задает рекуррентную процедуру построения собственных векторов $\Psi_{\rho_m} \in \mathcal{V}^{(m)}$, $2 \leq m \leq n$, оператора $B_m(\lambda)$ из собственных векторов $\Psi_{\rho_{m-1}} \in \mathcal{V}^{(m-1)}$ оператора $B_{m-1}(\lambda)$ и векторов на отдельном узле $\psi_{\rho_m}^{(m)} \in \mathcal{V}_m$, задаваемых формулой (27). Рекуррентная процедура начинается с уже построенного вектора $\Psi_{\rho_{1,0}}$. Теорема 1 справедлива, если выполнено условие $r_m^N \neq 0$, нули многочленов $\mathcal{B}_m(\lambda^N)/\lambda^N$, $m = 2, 3, \dots, n$, имеют единичную кратность и не равны нулю и $\det \mathcal{T}_n(\epsilon r_{m,s}^N) \neq 0$ (ср. с определением B -представления в работе [12]).

ТЕОРЕМА 1. *Вектор*

$$\Psi_{\rho_m} = \sum_{\substack{\rho_{m-1} \in (\mathbb{Z}_N)^{m-1} \\ \rho_m \in \mathbb{Z}_N}} Q(\rho_{m-1}, \rho_m \mid \rho_m) \Psi_{\rho_{m-1}} \otimes \psi_{\rho_m}^{(m)}, \quad (38)$$

где

$$Q(\rho_{m-1}, \rho_m \mid \rho_m) = \frac{\omega^{(\tilde{\rho}_m - \tilde{\rho}_{m-1})(\rho_m - \rho_{m,0})}}{w_{p_{m,0}}(\rho_{m,0} - \rho_{m-1,0} - 1) w_{\tilde{p}_m}(\tilde{\rho}_m - \rho_m - 1)} \times \\ \times \frac{\prod_{l=1}^{m-2} \prod_{k=1}^{m-1} w_{p_{m-1,l}^{m,k}}(\rho_{m-1,l} - \rho_{m,k})}{\prod_{\substack{j,l=1 \\ (j \neq l)}}^{m-2} w_{p_{m-1,j}^{m-1,l}}(\rho_{m-1,j} - \rho_{m-1,l})} \prod_{l=1}^{m-2} \frac{w_{p_{m-1,l}}(-\rho_{m-1,l})}{w_{\tilde{p}_{m-1,l}}(\rho_{m-1,l})}, \quad (39)$$

представляет собой собственный вектор оператора $B_m(\lambda)$:

$$B_m(\lambda) \Psi_{\rho_m} = \lambda r_{m,0} \omega^{-\rho_{m,0}} \prod_{k=1}^{m-1} (\lambda + r_{m,k} \omega^{-\rho_{m,k}}) \Psi_{\rho_m}. \quad (40)$$

В $m-1$ нулях $\lambda_{m,k}$ многочлена, задающего собственное значение оператора $B_m(\lambda)$,

$$\lambda_{m,k} = -r_{m,k} \omega^{-\rho_{m,k}}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \quad (41)$$

операторы A_m и D_m действуют как операторы сдвига для k -го (и 0-го для D_m) индекса Ψ_{ρ_m} :

$$A_m(\lambda_{m,k}) \Psi_{\rho_m} = \varphi_k(\rho'_m) \Psi_{\rho_m^{+k}}, \quad D_m(\lambda_{m,k}) \Psi_{\rho_m} = \tilde{\varphi}_k(\rho'_m) \Psi_{\rho_m^{+0,-k}}, \quad (42)$$

где

$$\varphi_k(\rho'_m) = -\frac{\tilde{r}_{m-1}}{r_m} \omega^{-\tilde{\rho}'_m} F_m\left(\frac{\lambda_{m,k}}{\omega}\right) \prod_{s=1}^{m-2} y_{m-1,s}^{m,k}, \\ \tilde{\varphi}_k(\rho'_m) = -\frac{r_m}{\tilde{r}_{m-1}} \frac{\omega^{\tilde{\rho}'_m - 1}}{\prod_{s=1}^{m-2} y_{m-1,s}^{m,k}} \prod_{s=1}^{m-1} F_s(\lambda_{m,k}), \\ F_s(\lambda) = (b_s + \omega a_s \varkappa_s \lambda) \left(\lambda c_s + \frac{d_s}{\varkappa_s} \right).$$

Из теоремы 2 (см. ниже) следует формула для собственных векторов оператора $B_{n+1}(\lambda)$ в пространстве $\mathcal{V}^{(n)}$ (которое является ограничением исходного пространства состояний $\mathcal{V}^{(n+1)}$ на подпространство с фиксированным значением γ_{n+1} спина на $(n+1)$ -м узле), определяющая их через собственные векторы оператора $B_n(\lambda)$. Как объяснялось выше, компоненты ρ_{n+1} не являются независимыми и удовлетворяют условию (20). Поэтому собственные векторы $\Psi_{\rho_{n+1}}^B$ оператора $B_{n+1}(\lambda)$ нумеруются набором $\rho'_{n+1} = (\rho_{n+1,1}, \dots, \rho_{n+1,n})$. Тогда $\rho_{n+1,0} = \gamma_0 + 1 - \tilde{\rho}'_{n+1}$.

ТЕОРЕМА 2. *Вектор*

$$\Psi_{\rho'_{n+1}}^B = \sum_{\rho_n \in (\mathbb{Z}_N)^n} Q^B(\rho_n \mid \rho'_{n+1}) \Psi_{\rho_n}, \quad (43)$$

где

$$Q^B(\rho_n | \rho'_{n+1}) = \frac{\omega^{(\gamma_0+1-\tilde{\rho}_n)(\tilde{\rho}'_{n+1}-1)}}{w_{p_{n+1},0}(\gamma_{n+1} - \tilde{\rho}'_{n+1} - \rho_{n,0})} \times \\ \times \frac{\prod_{l=1}^{n-1} \prod_{k=1}^n w_{p_{n,l}^{n+1,k}}(\rho_{n,l} - \rho_{n+1,k})}{\prod_{\substack{j,l=1 \\ (j \neq l)}}^{n-1} w_{p_{n,j}^{n,l}}(\rho_{n,j} - \rho_{n,l})} \prod_{l=1}^{n-1} \frac{w_{p_{n,l}}(-\rho_{n,l})}{w_{\tilde{p}_{n,l}}(\rho_{n,l})}, \quad (44)$$

есть собственный вектор оператора $B_{n+1}(\lambda)$:

$$B_{n+1}(\lambda) \Psi_{\rho'_{n+1}}^B = \lambda r_{n+1,0} \omega^{-\rho_{n+1,0}} \prod_{k=1}^n (\lambda + r_{n+1,k} \omega^{-\rho_{n+1,k}}) \Psi_{\rho'_{n+1}}^B. \quad (45)$$

В n нулях $\lambda_{n+1,k}$ многочлена, задающего собственное значение оператора $B_{n+1}(\lambda)$,

$$\lambda_{n+1,k} = -r_{n+1,k} \omega^{-\rho_{n+1,k}}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (46)$$

операторы A_{n+1} и D_{n+1} действуют следующим образом:

$$A_{n+1}(\lambda_{n+1,k}) \Psi_{\rho'_{n+1}}^B = 0, \quad D_{n+1}(\lambda_{n+1,k}) \Psi_{\rho'_{n+1}}^B = \tilde{\varphi}_k(\rho'_{n+1}) \Psi_{\rho'_{n+1}-k}^B. \quad (47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула для собственных векторов $\Psi_{\rho'_{n+1}}^B$ оператора $B_{n+1}(\lambda)$ может быть получена из формул (38) и (39) при $m = n + 1$ после выполнения следующей предельной процедуры: множитель $w_{\tilde{p}_{n+1}}(\tilde{\rho}_{n+1} - \rho_{n+1} - 1)$ устраняет суммирование по ρ_{n+1} (при фиксированном $\rho_{n+1} = \gamma_0$) и дает 1, множитель $w_{p_{n+1},0}(\rho_{n+1,0} - \rho_{n,0} - 1)$ в силу (36) дает $w_{p_{n+1},0}(\gamma_{n+1} - \tilde{\rho}'_{n+1} - \rho_{n,0})$ с точностью до несущественного постоянного множителя $w_{p_{n+1},0}(\gamma_{n+1} - \gamma_0)$. Формула для действия оператора A_{n+1} следует из тождества $\lambda a_0 \omega^{-\gamma_0} A_{n+1}(\lambda) = B_{n+1}(\lambda)$.

4. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ ГРАНИЧНОЙ ТРАНСФЕР-МАТРИЦЫ $t^B(\lambda)$

После того как с помощью теоремы 2 были определены собственные векторы $\Psi_{\rho'_{n+1}}^B$ вспомогательной задачи, будем искать собственные векторы $t^B(\lambda)$ из формулы (17) в виде линейных комбинаций собственных векторов $\Psi_{\rho'_{n+1}}^B$.

Из выражений для L -операторов можно увидеть, что собственное значение $t^B(\lambda)$ имеет вид

$$t^B(\lambda | \gamma_0, \gamma_{n+1}, \mathbf{E}) = E_0 + E_1 \lambda + \dots + E_n \lambda^n + E_{n+1} \lambda^{n+1}, \quad (48)$$

где $\mathbf{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$, а E_0 и E_{n+1} принимают значения

$$E_0 = 1, \quad E_{n+1} = \prod_{m=1}^n a_m c_m \cdot a_0 c_{n+1} \omega^{\gamma_{n+1} - \gamma_0}. \quad (49)$$

Возможные значения $\mathbf{E}$ могут быть найдены из функциональных соотношений. Определим следующие многочлены, зависящие от набора неизвестных $\mathbf{E}$: $\tau^{(0)}(\lambda) = 0$, $\tau^{(1)}(\lambda) = 1$, $\tau^{(2)}(\lambda) = t^B(\lambda)$, при помощи рекуррентного соотношения:

$$\tau^{(j+1)}(\lambda) = \tau^{(2)}(\omega^{j-1} \lambda) \tau^{(j)}(\lambda) - \omega^\rho z(\omega^{j-1} \lambda) \tau^{(j-1)}(\lambda), \quad j = 2, 3, \dots, N, \quad (50)$$

где $z(\lambda) = \prod_{m=1}^{n+1} F_m(\lambda/\omega)$. Тогда тождество “усечения”

$$\tau^{(N+1)}(\lambda) - \omega^\rho z(\lambda) \tau^{(N-1)}(\omega\lambda) = \mathcal{A}_{n+1}(\lambda^N) + \mathcal{D}_{n+1}(\lambda^N) \quad (51)$$

определяет возможные значения $\mathbf{E}$. Заметим, что многочлен $\mathcal{A}_{n+1}(\lambda^N) + \mathcal{D}_{n+1}(\lambda^N)$ отвечает $\alpha_q + \bar{\alpha}_q$ в работе [5].

Как было отмечено в работе [5], в случае параметров, рассмотренных в данной работе, мы имеем $z(\lambda) = 0$ (поскольку $F_{n+1}(\lambda) = 0$), и поэтому весь набор функциональных соотношений сводится к единственному соотношению (здесь использовано усреднение (21))

$$\langle t^B \rangle(\lambda^N) = \mathcal{A}_{n+1}(\lambda^N) + \mathcal{D}_{n+1}(\lambda^N) \quad (52)$$

или, эквивалентно, $\langle A_{n+1} + D_{n+1} \rangle = \langle A_{n+1} \rangle + \langle D_{n+1} \rangle$. Отсюда естественно предположить формулу для собственных значений трансфер-матрицы [5]:

$$t^B(\lambda \mid \sigma_{n+1}) = \prod_{j=1}^{n+1} \left(\frac{\lambda}{s_j \omega^{-\sigma_j}} + 1 \right), \quad (53)$$

где $\sigma_{n+1} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n+1}) \in (\mathbb{Z}_N)^{n+1}$ и

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_{n+1} = \gamma_{n+1} - \gamma_0 \pmod{N}. \quad (54)$$

Числа s_j , $j = 1, 2, \dots, n+1$, удовлетворяют двум соотношениям:

$$\prod_{j=1}^{n+1} s_j^{-1} = \prod_{m=1}^n a_m c_m \cdot a_0 c_{n+1}, \quad (55)$$

$$\prod_{j=1}^{n+1} \left(1 - (-1)^N \frac{\lambda^N}{s_j^N} \right) = \mathcal{A}_{n+1}(\lambda^N) + \mathcal{D}_{n+1}(\lambda^N). \quad (56)$$

Формула (56) следует из функционального соотношения (52) и усреднения выражения (53). Соотношение (56) означает, что $(-1)^N s_j^N$ суть корни многочлена $\mathcal{A}_{n+1}(\lambda^N) + \mathcal{D}_{n+1}(\lambda^N)$ относительно переменной λ^N . Заметим, что из соотношений (54) и (55) следует правильное значение E_{n+1} в формуле (49).

Бакстер [5] предположил, что каждому набору σ_{n+1} , удовлетворяющему условию (54), соответствует собственный вектор $\Phi_{\sigma_{n+1}}$ трансфер-матрицы $t^B(\lambda)$ с собственным значением (53). Метод функциональных соотношений дает ответ для собственных значений без учета их кратностей (0, 1 или более). Метод разделения переменных, развитый в работе [4] для модели ББС, позволяет получить формулы для собственных векторов, если известны собственные значения. В частности, можно получить более точную информацию относительно кратностей собственных значений.

Следуя работе [4], будем искать $\Phi_{\sigma_{n+1}}$ в виде

$$\Phi_{\sigma_{n+1}} = \sum_{\rho'_{n+1}} Q^B(\rho'_{n+1} \mid \sigma_{n+1}) \Psi_{\rho'_{n+1}}^B, \quad (57)$$

где

$$Q^B(\rho'_{n+1} \mid \sigma_{n+1}) = \frac{\prod_{k=1}^n \tilde{q}_k(\rho_{n+1,k})}{\prod_{\substack{m,m'=1 \\ (m \neq m')}}^n w_{p_{n+1,m}^{n+1,m'}}(\rho_{n+1,m} - \rho_{n+1,m'})}$$

– функции разделенных переменных $\tilde{q}_k(\rho_{n+1,k})$, удовлетворяющих разностным уравнениям типа уравнения Бакстера, $k = 1, 2, \dots, n$:

$$t^B(\lambda_{n+1,k} \mid \sigma_{n+1}) \tilde{q}_k(\rho_{n+1,k}) = \Delta_k^+(\lambda_{n,k}) \tilde{q}_k(\rho_{n+1,k} + 1) + \Delta_k^-(\omega \lambda_{n+1,k}) \tilde{q}_k(\rho_{n+1,k} - 1), \quad (58)$$

где

$$\Delta_k^+(\lambda) = \chi_k^{-1} \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^{-n} \prod_{m=1}^n F_m \left(\frac{\lambda}{\omega} \right), \quad \Delta_k^-(\lambda) = \chi_k \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^n F_{n+1} \left(\frac{\lambda}{\omega} \right),$$

$$\chi_k = \frac{r_{n+1,0} \tilde{r}_n}{a_0 \tilde{r}_{n+1}} \left(\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \frac{y_{n+1,k}^{n+1,m}}{y_{n+1,m}^{n+1,k}} \right) \prod_{m=1}^{n-1} y_{n,m}^{n+1,k}.$$

Так как в случае выбора параметров, реализованного в данной работе, мы имеем $F_{n+1}(\lambda) = 0$, то получаем, что $\Delta_k^-(\lambda) = 0$, и уравнения (58) могут быть решены явно в терминах функций $w_p(\gamma)$. Выражение для $Q^B(\rho'_{n+1} \mid \sigma_{n+1})$ имеет вид

$$Q^B(\rho'_{n+1} \mid \sigma_{n+1}) = \frac{\prod_{k=1}^n \prod_{j=1}^{n+1} w_{p_{j,k}^{BB}}(\sigma_j - \rho_{n+1,k})}{\prod_{\substack{m,m'=1 \\ (m \neq m')}}^n w_{p_{n+1,m}^{n+1,m'}}(\rho_{n+1,m} - \rho_{n+1,m'})} \prod_{k=1}^n \prod_{m=1}^n \frac{w_{p_{m,k}^B}(\rho_{n+1,k} - 1)}{w_{\tilde{p}_{m,k}^B}(-\rho_{n+1,k} - 1)}, \quad (59)$$

где точки кривой Ферма $p_{j,k}^{BB}$, $p_{m,k}^B$ и $\tilde{p}_{m,k}^B$ задаются условиями

$$x_{j,k}^{BB} = \frac{r_{n+1,k}}{s_j}, \quad x_{m,k}^B = \frac{b_m}{a_m \varkappa_m r_{n+1,k}}, \quad \tilde{x}_{m,k}^B = \frac{r_{n+1,k} c_m \varkappa_m}{d_m}$$

и условиями на дискретные фазы величин $y_{j,k}^{BB}$, $y_{m,k}^B$, $\tilde{y}_{m,k}^B$:

$$\prod_{m=1}^n \omega a_m d_m y_{m,k}^B \tilde{y}_{m,k}^B = \chi_k \prod_{j=1}^n y_{j,k}^{BB}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Справедливость этих соотношений с точностью до N -го корня из единицы обеспечивается соотношением (56). Прямыми вычислениями получим

$$t^B(\lambda) \Phi_{\sigma_{n+1}} = t^B(\lambda \mid \sigma_{n+1}) \Phi_{\sigma_{n+1}},$$

где собственные векторы $\Phi_{\sigma_{n+1}}$ и соответствующие собственные значения задаются формулами (57), (59), (53).

5. ИЗИНГОПОДОБНАЯ МОДЕЛЬ КВАНТОВОЙ $\mathbb{Z}_N$ -ЦЕПОЧКИ С ФИКСИРОВАННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ СПИНОВ НА ГРАНИЦЕ

В этом разделе фиксируются специальные значения параметров $b_k = d_k = 0$ L -операторов (6):

$$L_k(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 + \lambda \varkappa_k \mathbf{v}_k & \lambda \mathbf{u}_k^{-1} a_k \\ \mathbf{u}_k c_k & \lambda a_k c_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (60)$$

и рассматривается трансфер-матрица (17) модели ББС с фиксированными значениями спинов на границе. Коэффициенты разложения этой трансфер-матрицы по λ

задают набор коммутирующих операторов. В предыдущем разделе была приведена формула для общих собственных векторов этого набора. Коэффициент при λ представляет собой гамильтониан изингоподобной модели квантовой $\mathbb{Z}_N$ -цепочки с фиксированными спинами на границе [6], [11]

$$\mathbf{H}_1 = \sum_{k=1}^n \varkappa_k \mathbf{v}_k + \sum_{k=0}^{n+1} a_k c_{k+1} \mathbf{u}_k^{-1} \mathbf{u}_{k+1}, \quad (61)$$

где $\mathbf{u}_0 = \omega^{\gamma_0}$, $\mathbf{u}_{n+1} = \omega^{\gamma_{n+1}}$ – заданные граничные спины. Соответствующее собственное значение

$$E_1 = \sum_{j=1}^{n+1} s_j^{-1} \omega^{\sigma_j}$$

следует из формулы (53), набор σ_{n+1} удовлетворяет условию (54), а амплитуды s_j можно найти из соотношений (55) и (56). Применяя явные выражения для усредненных L -операторов (22) с $b_k = d_k = 0$ и (23), правую часть выражения (56) можно переписать в виде

$$\mathcal{A}_{n+1}(\lambda^N) + \mathcal{D}_{n+1}(\lambda^N) = \text{tr } \mathcal{T}_{n+1}(\lambda^N) = \text{tr } \tilde{\mathcal{L}}_1(\lambda^N) \dots \tilde{\mathcal{L}}_{n+1}(\lambda^N),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_k(\lambda^N) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_k^{-N} \end{pmatrix} \mathcal{L}_k(\lambda^N) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_{k+1}^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \epsilon \lambda^N \beta_{2k}^2 & -\epsilon \lambda^N \beta_{2k+1}^2 \\ 1 & -\epsilon \lambda^N \beta_{2k+1}^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \lambda^N \beta_{2k}^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \lambda^N \beta_{2k+1}^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$\epsilon = (-1)^N$, $\beta_{2k+1} = (a_k c_{k+1})^{N/2}$, $\beta_{2k} = \varkappa_k^{N/2}$. Окончательно получим

$$\text{tr } \mathcal{T}_{n+1}(\lambda^N) = (1 - \epsilon \lambda^N \beta_1^2) \left\{ \prod_{k=1}^n \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \lambda^N \beta_{2k}^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \lambda^N \beta_{2k+1}^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где сомножители в произведении упорядочены слева направо по возрастающему индексу k . Перепишав это произведение в виде определителя трехдиагональной матрицы размера $(2n+2) \times (2n+2)$, получим $s_1^N, \dots, s_{n+1}^N$ из задачи на собственные значения для двухдиагональной матрицы размера $(2n+2) \times (2n+2)$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & \beta_2 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \beta_{2n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{2n+1} & 0 \end{pmatrix},$$

у которой имеется $2n+2$ собственных значений $\pm s_j^{-N/2}$, $j = 1, 2, \dots, n+1$. Метод построения собственных значений гамильтониана (61) при помощи собственных значений матрицы B был разработан в работе [11].

Другая модель, в которой функция $A_n(\lambda)$ выступала в роли производящей функции для гамильтонианов с аналогичными граничными условиями, рассматривалась в работе [14]. Широкий класс моделей с интегрируемыми граничными условиями можно получить в подходе уравнения отражений с использованием циклических L -операторов (6), поэтому представляется интересным построить собственные векторы трансфер-матриц таких моделей. В частном случае модели релятивистской цепочки Тоды при корнях из единицы с интегрируемыми граничными условиями формулы для собственных векторов трансфер-матрицы были получены в работе [15].

Благодарности. Авторы благодарны организаторам международной конференции “Классические и квантовые интегрируемые системы” за гостеприимство и превосходную организацию конференции. Работа была частично поддержана INTAS (грант № 05-1000008-7865), Целевой программой фундаментальных исследований Отделения физики и астрономии НАН Украины, грантом 10/07-Н НАН Украины и грантом Ф/16-457-2007 ГФФИ Украины. Работа В.Н. Шадуры также частично поддержана проектом SCOPES-IB7320-110848 Национального научного фонда Швейцарии.

Список литературы

- [1] E. Sklyanin, “The quantum Toda chain”, *Nonlinear equations in classical and quantum field theory*, Proc. Semin. (Paris 1983–1984), Lecture Notes in Phys., **226**, Springer, Berlin, 1985, 196–233.
- [2] С. Харчев, Д. Лебедев, *Письма в ЖЭТФ*, **71** (2000), 338–343.
- [3] S. Derkachev, G. Korchemsky, A. Manashov, *Nucl. Phys. B*, **617**:1–3 (2001), 375–440.
- [4] G. von Gehlen, N. Iorgov, S. Pakuliak, V. Shadura, *J. Phys. A*, **39**:23 (2006), 7257–7282; [arXiv: nlin.SI/0603028](#).
- [5] R. J. Baxter, *J. Statist. Phys.*, **117**:1–2 (2004), 1–25; [arXiv: cond-mat/0409493](#).
- [6] R. J. Baxter, *J. Statist. Phys.*, **57**:1–2 (1989), 1–39.
- [7] V. V. Bazhanov, Yu. G. Stroganov, *J. Statist. Phys.*, **59**:3–4 (1990), 799–817.
- [8] R. J. Baxter, V. V. Bazhanov, J. H. H. Perk, *Internat. J. Modern. Phys. B*, **4**:5 (1990), 803–870.
- [9] И. Г. Корепанов, *Скрытые симметрии в 6-вершинной модели*, Деп. ВИНТИ № 1472-V87, Челябинский политехнический институт, 1987; *Записки науч. сем. ПОМИ*, **215**:14 (1994), 163–177; [arXiv: hep-th/9410066](#).
- [10] V. V. Bazhanov, R. J. Baxter, *J. Statist. Phys.*, **69**:3–4 (1992), 453–485.
- [11] R. J. Baxter, *Phys. Lett. A*, **140**:4 (1989), 155–157.
- [12] V. O. Tarasov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **7**: Suppl. 1B (1992), 963–975.
- [13] S. Roan, *J. Phys. A*, **40**:7 (2007), 1481–1511.
- [14] N. Iorgov, *SIGMA*, **2** (2006), 019; [arXiv: nlin.SI/0602010](#).
- [15] N. Iorgov, V. Roubtsov, V. Shadura, Yu. Tykhyy, *SIGMA*, **3** (2007), 013; [arXiv: nlin.SI/0701040](#).