Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Конштейн, И. В. Тютин, Деформации невырожденных постоянных скобки и антискобки Пуассона на суперпространстве произвольной размерности, *ТМФ*, 2008, том 155, номер 1, 109–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6196>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 12:52:57

© 2008 г.

С. Е. Конштейн*, И. В. Тютин*

ДЕФОРМАЦИИ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ПОСТОЯННЫХ СКОБКИ И АНТИСКОБКИ ПУАССОНА НА СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Рассмотрены (анти)пуассоновские супералгебры с постоянной невырожденной (анти)скобкой, заданной на гладких функциях на $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем, принимающих значения в алгебре Грассмана. Найдены деформации и центральные расширения таких супералгебр.

Ключевые слова: супералгебра Пуассона, антипуассоновская супералгебра, деформация суперскобок, когомологии супералгебры, квантование.

1. ВВЕДЕНИЕ

Надежда построить квантовую механику на нетривиальных многообразиях связана с геометрическим, или деформационным, квантованием [1]–[4]. С операторами ассоциируются функции на фазовом пространстве, а произведение и коммутатор операторов описываются ассоциативным $*$ -произведением и $*$ -коммутатором функций. Эти $*$ -произведение и $*$ -коммутатор являются деформациями обычного произведения и обычной скобки Пуассона. Имеется много публикаций, посвященных деформациям (анти)скобки Пуассона для различных функциональных пространств. В работе [5] эта проблема рассмотрена для супералгебры Пуассона, реализованной на суперпространстве полиномов, и для антискобки. Чисто грассманов случай рассмотрен в [6]. Бозонная алгебра Пуассона, реализованная на гладких функциях, рассматривалась в [7].

Результат зависит от выбора функционального пространства (подробнее см. [5]).

В данной статье изложены результаты работ [8]–[11], где был найден общий вид $*$ -коммутатора для случая пуассоновской и антипуассоновской супералгебр, реализованных на гладких функциях с компактным носителем, принимающих значения в алгебре Грассмана, а также для случая центральных расширений указанных супералгебр.

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: konstein@lpi.ru, tyutin@lpi.ru

1.1. Деформации топологических супералгебр Ли. Напомним некоторые понятия, связанные с формальными деформациями алгебр (см., например, [12]), применительно к случаю топологических супералгебр Ли. Пусть L – топологическая супералгебра Ли над $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) с суперскобкой Ли $\{\cdot, \cdot\}$, $\mathbb{K}[[\hbar^2]]$ – кольцо формальных степенных рядов по $\hbar^2$ над $\mathbb{K}$. Обозначим $\mathbb{K}[[\hbar^2]]$ -модуль формальных степенных рядов по $\hbar^2$ с коэффициентами в L через $L[[\hbar^2]]$ и снабдим $\mathbb{K}[[\hbar^2]]$ и $L[[\hbar^2]]$ топологией прямого произведения. Градуировка в L естественно определяет градуировку в $L[[\hbar^2]]$: элемент $f = f_0 + \hbar^2 f_1 + \dots$ имеет определенную четность $\varepsilon(f)$, если $\varepsilon(f) = \varepsilon(f_j)$ для всех $j = 0, 1, \dots$. Всякое p -линейное раздельно-непрерывное отображение из L^p в L (в частности, скобка $\{\cdot, \cdot\}$) единственным образом продолжается вследствие $\mathbb{K}[[\hbar^2]]$ -линейности до p -линейного раздельно-непрерывного отображения над $\mathbb{K}[[\hbar^2]]$ из $L[[\hbar^2]]^p$ в $L[[\hbar^2]]$. По определению (непрерывная) формальная деформация L – это $\mathbb{K}[[\hbar^2]]$ -билинейная непрерывная по каждому аргументу в отдельности суперскобка Ли $C(\cdot, \cdot)$ на $L[[\hbar^2]]$ такая, что $C(f, g) = \{f, g\} \bmod \hbar^2$ для любых $f, g \in L[[\hbar^2]]$. Очевидно, что всякая формальная деформация C представима в виде

$$C(f, g) = \{f, g\} + \hbar^2 C_1(f, g) + \hbar^4 C_2(f, g) + \dots, \quad f, g \in L, \quad (1)$$

где C_j – раздельно-непрерывные суперкососимметричные билинейные отображения из $L \times L$ в L (2-коцепи с коэффициентами в присоединенном представлении L). Формальные деформации C^1 и C^2 называются эквивалентными, если существует такой непрерывный $\mathbb{K}[[\hbar^2]]$ -линейный оператор $T: L[[\hbar^2]] \rightarrow L[[\hbar^2]]$, что $TC^1(f, g) = C^2(Tf, Tg)$, $f, g \in L[[\hbar^2]]$ и $T = \text{id} + \hbar^2 T_1$. Задача поиска формальных деформаций L тесно связана с задачей вычисления когомологий Шевалле–Эйленберга супералгебры L с коэффициентами в присоединенном представлении L . Пусть $\mathcal{C}_p(L)$ обозначает пространство p -линейных суперкососимметричных раздельно-непрерывных отображений из L^p в L (пространство p -коцепей с коэффициентами в присоединенном представлении L). Пространство $\mathcal{C}_p(L)$ имеет естественную $\mathbb{Z}_2$ -градуировку: по определению $M_p \in \mathcal{C}_p(L)$ имеет определенную четность $\varepsilon(M_p)$, если соотношение

$$\varepsilon(M_p(f_1, \dots, f_p)) = \varepsilon(M_p) + \varepsilon(f_1) + \dots + \varepsilon(f_p)$$

справедливо при любых $f_j \in L$ с определенными четностями $\varepsilon(f_j)$. Поскольку суперскобка Ли всегда четная, все C_j в разложении (1) должны быть четными 2-коцепями. Дифференциал d_p^{ad} определяется [13] как такой линейный оператор из $\mathcal{C}_p(L)$ в $\mathcal{C}_{p+1}(L)$, что

$$\begin{aligned} d_p^{\text{ad}} M_p(f_1, \dots, f_{p+1}) &= \\ &= - \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j+\varepsilon(f_j)|\varepsilon(f)|_{1,j-1}+\varepsilon(f_j)\varepsilon_{M_p}} \{f_j, M_p(f_1, \dots, \hat{f}_j, \dots, f_{p+1})\} - \\ &\quad - \sum_{i < j} (-1)^{j+\varepsilon(f_j)|\varepsilon(f)|_{i+1,j-1}} M_p(f_1, \dots, f_{i-1}, \{f_i, f_j\}, f_{i+1}, \dots, \hat{f}_j, \dots, f_{p+1}) \end{aligned}$$

для любых $M_p \in \mathcal{C}_p(L)$ и $f_1, \dots, f_{p+1} \in L$, имеющих определенные четности. Здесь знак $\hat{}$ обозначает отсутствие аргумента, над которым он поставлен, и использовано обозначение $|\varepsilon(f)|_{i,j} = \sum_{l=i}^j \varepsilon(f_l)$. Записывая тождество Якоби для деформации C

вида (1),

$$(-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)}C(f, C(g, h)) + \text{cycle}(f, g, h) = 0,$$

и рассматривая члены порядка $\hbar^2$, мы находим, что $d_2^{\text{ad}}C_1 = 0$. Таким образом, деформации первого порядка супералгебры L описываются 2-коциклами дифференциала d^{ad} .

1.2. Супералгебра Пуассона. Обозначим через $\mathcal{D}(\mathbb{R}^k)$ пространство гладких $\mathbb{K}$ -значных функций на $\mathbb{R}^k$ с компактным носителем, снабженное своей стандартной топологией: последовательность $\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^k)$ сходится к $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^k)$, если $\partial^\lambda \varphi_k$ сходится равномерно к $\partial^\lambda \varphi$ для любого мультииндекса λ и носители всех φ_k содержатся в некотором компактном множестве. Положим

$$D_{n_+}^{n_-} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_+}) \otimes \mathbb{G}^{n_-}, \quad E_{n_+}^{n_-} = C^\infty(\mathbb{R}^{n_+}) \otimes \mathbb{G}^{n_-},$$

где $\mathbb{G}^{n_-}$ – алгебра Грассмана с n_- образующими. Образующие алгебры Грассмана (соответственно координаты пространства $\mathbb{R}^{n_+}$) мы обозначаем через ξ_α , $\alpha = 1, 2, \dots, n_-$ (соответственно x_i , $i = 1, 2, \dots, n_+$). Мы будем также использовать коллективные переменные z_A , которые равны x_A при $A = 1, 2, \dots, n_+$ и равны ξ_{A-n_+} при $A = n_+ + 1, \dots, n_+ + n_-$. Пространства $D_{n_+}^{n_-}$ и $E_{n_+}^{n_-}$ обладают естественной градуировкой, определяемой градуировкой алгебры Грассмана. Четность элемента f этих пространств обозначается через $\varepsilon(f)$. Положим также $\varepsilon_A = 0$ для $A = 1, 2, \dots, n_+$ и $\varepsilon_A = 1$ для $A = n_+ + 1, \dots, n_+ + n_-$.

Пусть $\partial/\partial z_A$ и $\overleftarrow{\partial}/\partial z_A$ – операторы левого и правого дифференцирования. Скобка Пуассона определяется соотношением

$$\{f, g\}(z) = \sum_{A, B} f(z) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial z_A} \omega^{AB} \frac{\partial}{\partial z_B} g(z) = -(-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} \{g, f\}(z), \quad (2)$$

где симплектическая метрика $\omega^{AB} = -(-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_B} \omega^{BA}$ является постоянной невырожденной матрицей. Для определенности выберем ее в виде

$$\omega^{AB} = \begin{pmatrix} \omega^{ij} & 0 \\ 0 & \lambda_\alpha \delta^{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \quad \lambda_\alpha = \pm 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, n_+, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n_-,$$

где ω^{ij} – каноническая симплектическая форма (если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то можно выбрать $\lambda_\alpha = 1$). Невырожденность матрицы ω^{AB} означает, в частности, что n_+ четно. Скобка Пуассона удовлетворяет тождеству Якоби

$$(-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)} \{f, \{g, h\}\}(z) + \text{cycle}(f, g, h) = 0, \quad f, g, h \in E_{n_+}^{n_-}. \quad (3)$$

Супералгеброй Пуассона $\mathcal{P}_{n_+}^{n_-}$ мы называем пространство $D_{n_+}^{n_-}$ со скобкой Пуассона (2) на нем. Соотношения (2) и (3) показывают, что эта скобка действительно определяет структуру супералгебры Ли на $D_{n_+}^{n_-}$.

Интеграл на $D_{n_+}^{n_-}$ определяется соотношением

$$\bar{f} \stackrel{\text{def}}{=} \int dz f(z) = \int_{\mathbb{R}^{n_+}} dx \int d\xi f(z),$$

где интеграл по алгебре Грассмана нормирован условием $\int d\xi \xi_1 \dots \xi_{n_-} = 1$.

Введем супералгебру $Z_{n_+}^{n_-}, D_{n_+}^{n_-} \subset Z_{n_+}^{n_-} \subset E_{n_+}^{n_-}, Z_{n_+}^{n_-} = D_{n_+}^{n_-} \oplus \mathcal{C}_{D_{n_+}^{n_-}}(E_{n_+}^{n_-})$, где $\mathcal{C}_{D_{n_+}^{n_-}}(E_{n_+}^{n_-})$ – централизатор $D_{n_+}^{n_-}$ в $E_{n_+}^{n_-}$.

2. ДЕФОРМАЦИИ СУПЕРАЛГЕБРЫ ПУАССОНА

Для любого $\varkappa \in \mathbb{K}[[\hbar]]$ такого, что $c_1 \stackrel{\text{def}}{=} \hbar^2 \varkappa^2 / 6 \in \hbar^2 \mathbb{K}[[\hbar^2]]$, суперскобка Мойяла

$$\mathcal{M}_{c_1}(z \mid f, g) = \frac{1}{\hbar \varkappa} f(z) \operatorname{sh} \left(\hbar \varkappa \sum_{A,B} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial z_A} \omega^{AB} \frac{\partial}{\partial z_B} \right) g(z)$$

кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби. Следовательно, она является деформацией исходной алгебры Пуассона.

Определим билинейные отображения m_3 и m_ζ из $(D_{n_+}^{n_-})^2$ в $D_{n_+}^{n_-}$ соотношениями

$$m_3(z \mid f, g) = \mathcal{E}_z f(z) \bar{g} - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} \mathcal{E}_z g(z) \bar{f}, \quad (4)$$

$$m_\zeta(z \mid f, g) = \{\zeta(z), f(z)\} \bar{g} - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} \{\zeta(z), g(z)\} \bar{f}, \quad (5)$$

где $\mathcal{E}_z \stackrel{\text{def}}{=} 1 - z \partial_z / 2$, $z = (x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_m)$.

Для $\zeta \in E_{n_+}^{n_-}[[\hbar^2]]$ и $c_1, c \in \mathbb{K}[[\hbar^2]]$ положим

$$C_{\zeta, c_1}^{(1)}(z \mid f, g) = \mathcal{M}_{c_1}(z \mid f + \zeta \bar{f}, g + \zeta \bar{g}),$$

$$C_{\zeta, c_1, c}^{(1)}(z \mid f, g) = \mathcal{M}_{c_1}(z \mid f + \zeta \bar{f}, g + \zeta \bar{g}) + c \bar{f} \bar{g}.$$

2.1. Деформации супералгебры Пуассона при $(n_+ \mid n_-) \neq (2 \mid 2)$.

ТЕОРЕМА 1 [8], [9]. 1. Пусть $n_- = 2k$, $(n_+ \mid n_-) \neq (2 \mid 2)$. Тогда всякая непрерывная формальная деформация супералгебры Пуассона $\mathcal{P}_{n_+}^{n_-}$ эквивалентна либо суперскобке $C_{\zeta, c_1}^{(1)}(z \mid f, g)$ при некоторой четной функции $\zeta \in \hbar^2 E_{n_+}^{n_-}[[\hbar^2]]$ и $c_1 \in \hbar^2 \mathbb{K}[[\hbar^2]]$, либо суперскобке

$$C_{\zeta, c_3}^{(3)}(z \mid f, g) = \{f(z), g(z)\} + m_\zeta(z \mid f, g) + c_3 m_3(z \mid f, g) \quad (6)$$

при некоторой четной функции $\zeta \in \hbar^2 E_{n_+}^{n_-}[[\hbar^2]]$ и $c_3 \in \hbar^2 \mathbb{K}[[\hbar^2]]$. Деформации $C_{\zeta_1, c}^{(i)}$ и $C_{\zeta_2, c}^{(i)}$ эквивалентны, если $\zeta_1 - \zeta_2 \in Z_{n_+}^{n_-}[[\hbar^2]]$.

2. Пусть $n_- = 2k + 1$. Тогда всякая непрерывная формальная деформация супералгебры Пуассона $\mathcal{P}_{n_+}^{n_-}$ эквивалентна суперскобке $C_{\zeta, c_1, c}^{(1)}(z \mid f, g)$ при некоторых $c, c_1 \in \hbar^2 \mathbb{K}[[\hbar^2]]$ и нечетной функции $\zeta \in \hbar^2 E_{n_+}^{n_-}[[\hbar^2]]$ таких, что $[\mathcal{M}_{c_1}(z \mid \zeta, \zeta) + c] \in D_{n_+}^{n_-}[[\hbar^2]]$. Деформации $C_{\zeta_1, c_1, c}^{(1)}$ и $C_{\zeta_2, c_1, c}^{(1)}$ эквивалентны, если $\zeta_1 - \zeta_2 \in Z_{n_+}^{n_-}[[\hbar^2]]$.

2.2. Деформации супералгебры Пуассона при $(n_+ \mid n_-) = (2 \mid 2)$.

ТЕОРЕМА 2 [9]. Пусть $n_+ = n_- = 2$ и функция $\Lambda \in C^\infty(\mathbb{R})$ такова, что $d\Lambda/dx$ имеет компактный носитель, $\Lambda(-\infty) = 0$ и $\Lambda(+\infty) = 1$. Положим

$$\Delta(x \mid f) \stackrel{\text{def}}{=} \int d\xi f(x, \xi),$$

$$\Theta(x \mid f) \stackrel{\text{def}}{=} \int du \delta(x_1 - u_1) \theta(x_2 - u_2) f(u),$$

$$\Psi(x \mid f) \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda(x_2) \int d^2 y d\eta \theta(x_1 - y_1) f(y, \eta),$$

$$\Xi(x \mid f) \stackrel{\text{def}}{=} \Theta(x \mid f) - \Lambda(x_2) \int du \delta(x_1 - u_1) f(u),$$

где $z = (x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)$, $u = (y_1, y_2, \eta_1, \eta_2)$.

Пусть билинейные отображения m_3 и m_ζ определены формулами (4) и (5). Определим билинейное отображение m_5 из $(D_2^2)^2$ в D_2^2 соотношениями

$$\begin{aligned} m_5(z | f, g) &= m_{51}(z | f, g) + m_{52}(z | f, g) + m_{53}(z | f, g) + m_{54}(z | f, g), \\ m_{51}(z | f, g) &= f(z)\Delta(x | g) - \Delta(x | f)g(z), \\ m_{52}(z | f, g) &= 2\Theta(x | f)\partial_2 g(z) - 2\partial_2 f(z)\Theta(x | g), \\ m_{53}(z | f, g) &= -2\{f(z), \Psi(x | g)\} + 2\{g(z), \Psi(x | f)\}, \\ m_{54}(z | f, g) &= \Xi(x | \partial_2 f g - f \partial_2 g). \end{aligned}$$

Определим билинейные формы σ_3 , σ_ζ и B_ζ :

$$\begin{aligned} \sigma_3(f, g) &= 4\tilde{\Theta}(g)(\Xi(f)\partial_2 \Lambda - \Xi(f\partial_2 \Lambda)) - 4\tilde{\Theta}(f)(\Xi(g)\partial_2 \Lambda - \Xi(g\partial_2 \Lambda)), \\ \sigma_\zeta(f, g) &= A_\zeta(f)\bar{g} - A_\zeta(g)\bar{f}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_\zeta(f) &= f\Delta(\zeta) - \Delta(f)\zeta + \Xi(\partial_2 f\zeta - f\partial_2 \zeta) + 2\partial_1 \zeta \partial_2 \Lambda \tilde{\Theta}(f) + \\ &+ 2\partial_2 \zeta \Lambda \Xi(f) - 2\partial_2 f \int \theta(x_2 - y_2)\theta(y_2)\delta(x_1 - y_1)\zeta(u) du, \end{aligned}$$

$$B_\zeta(f, g) = 4(\tilde{\Theta}(f)\bar{g} - \tilde{\Theta}(g)\bar{f}) \left[\Xi(\zeta\partial_2 \Lambda) - \partial_2 \Lambda \int \theta(x_2 - y_2)\theta(y_2)\delta(x_1 - y_1)\zeta(u) du \right].$$

Тогда всякая непрерывная формальная деформация супералгебры Пуассона $\mathcal{P}_2^2$ эквивалентна одной из следующих суперскобок: $C_{\zeta, c_1}^{(1)}(z | f, g)$, $C_{\zeta, c_3}^{(3)}(z | f, g)$ (6),

$$\begin{aligned} C_{\zeta, c_5}^{(5)}(z | f, g) &= \{f(z), g(z)\} + m_\zeta(z | f, g) + c_5[m_5(z | f, g) - \sigma_\zeta(z | f, g)] + \\ &+ c_5^2[B_\zeta(z | f, g) - \sigma_3(z | f, g)], \end{aligned}$$

где $c_1, c_3, c_5 \in \hbar^2 \mathbb{K}[[\hbar^2]]$ и $\zeta \in \hbar^2 E_2^2[[\hbar^2]]$ – четная функция.

Деформации $C_{\zeta_1, c}^{(i)}$ и $C_{\zeta_2, c}^{(i)}$ эквивалентны, если $\zeta_1 - \zeta_2 \in Z_{n+}^{n-}[[\hbar^2]]$.

3. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСШИРЕНИЕ

Пусть $\mathbf{L}$ – центральное расширение супералгебры L , т.е. $\mathbf{L} = L \oplus c$, $\mathbf{f} = f + a\mathcal{J} \in \mathbf{L}$, $a\mathcal{J} \in c$, $\varepsilon(\mathcal{J}) = 0$, $a \in \mathbb{K}$. Скобку на $\mathbf{L}$ обозначим через $[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = -(-1)^{\varepsilon(\mathbf{f})\varepsilon(\mathbf{g})}[\mathbf{g}, \mathbf{f}]$,

$$[f, g] = \{f, g\} + Q(f, g)\mathcal{J}, \quad Q(f, g) \in \mathbb{K}, \quad [\mathbf{f}, \mathcal{J}] = 0.$$

Тогда $Q(f, g) = -(-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)}Q(g, f)$, $\varepsilon(Q) = 0$, и Q порождает вторую когомологию в тривиальном представлении алгебры L :

$$d_2^{\text{tr}} Q(f, g, h) \stackrel{\text{def}}{=} Q(\{f, g\}, h) - (-1)^{\varepsilon(g)\varepsilon(h)}Q(\{f, h\}, g) - Q(f, \{g, h\}) = 0.$$

ТЕОРЕМА 3 [14]. Определим билинейные формы Q_2^1 и Q_2^2 соотношениями

$$Q_2^1(f, g) = \bar{f}\bar{g},$$

$$Q_2^2(f, g) = \int dz (f(z)\mathcal{E}_z g(z) - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)}g(z)\mathcal{E}_z f(z)), \quad f, g \in D_{n+}^{n-},$$

где

$$\mathcal{E}_z \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \frac{1}{2}z^A \frac{\partial}{\partial z^A}.$$

Если n_- чётно и $n_- \neq n_+ + 4$, то $H_{\text{tr}}^2 = 0$; если $n_- = n_+ + 4$, то $H_{\text{tr}}^2 \simeq \mathbb{K}$ и форма Q_2^2 является нетривиальным коциклом; если n_- нечётно, то $H_{\text{tr}}^2 \simeq \mathbb{K}$ и форма Q_2^1 является нетривиальным коциклом.

Из теоремы 3 следует, что у супералгебры Пуассона $D_{n_+}^{n_-}$ имеется центральное расширение $\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$ либо при нечётном n_- , либо при $n_- = n_+ + 4$.

3.1. Случай $n_- = 2k + 1$.

ТЕОРЕМА 4 [10]. Пусть $n_- = 2k + 1$, где k – целое число, функции $\zeta(z), w(z) \in \hbar^2 E_{n_+}^{2k+1}[[\hbar^2]]$ при некотором c_1 удовлетворяют условиям

$$\varepsilon(\zeta) = 1, \quad \varepsilon(w) = 0, \quad (7)$$

$$w(z) = -\mathcal{M}_{c_1}(z \mid \zeta, \zeta). \quad (8)$$

Пусть $\mathbf{N}_{\zeta, c_1}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = N_{\zeta, c_1}(z \mid \mathbf{f}, \mathbf{g}) + n_{\zeta, c_1}(\mathbf{f}, \mathbf{g})\mathcal{J}$, где

$$\begin{aligned} N_{\zeta, c_1}(z \mid f, g) &= \mathcal{M}_{c_1}(z \mid f + \zeta \bar{f}, g + \zeta \bar{g}) + w(z) \bar{f} \bar{g}, \\ N_{\zeta, c_1}(z \mid f, \mathcal{J}) &= \mathcal{M}_{c_1}(z \mid w, f + \hbar^2 \zeta \bar{f}), \\ n_{\zeta, c_1}(f, g) &= \bar{f} \bar{g}, \quad n_{\zeta, c_1}(f, \mathcal{J}) = 0, \quad \mathbf{N}_{\zeta, c_1}(z \mid \mathcal{J}, \mathcal{J}) = 0. \end{aligned}$$

Тогда:

- 1) каждая непрерывная формальная деформация супералгебры $\mathbf{D}_{n_+}^{2k+1}$ эквивалентна суперскобке $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_{\zeta, c_1} = \mathbf{N}_{\zeta, c_1}(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ при некоторых $c_1 \in \hbar^2 \mathbb{K}[[\hbar^2]]$ и $\zeta(z) \in \hbar^2 E_{n_+}^{2k+1}[[\hbar^2]]$, удовлетворяющих (7), (8);
- 2) суперскобка $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_{\zeta_1, c_1}$ эквивалентна суперскобке $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_{\zeta_2, c_1}$, если $\zeta_1 - \zeta_2 \in Z_{n_+}^{n_-}[[\hbar^2]]$.

3.2. Случай $n_- = n_+ + 4$.

ТЕОРЕМА 5 [10]. Пусть $n_- = n_+ + 4$, $\zeta(z) \in \hbar^2 E_{n_+}^{n_++4}[[\hbar^2]]$, $c_3 \in \hbar^2 \mathbb{K}[[\hbar^2]]$,

$$\begin{aligned} Q(f, g) &= \int dz (f(z) \mathcal{E}_z g(z) - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} g(z) \mathcal{E}_z f(z)), \\ \mathbf{S}_{\zeta, c_3}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) &= S_{\zeta, c_3}(z \mid \mathbf{f}, \mathbf{g}) + s_{\zeta, c_3}(\mathbf{f}, \mathbf{g})\mathcal{J}, \\ S_{\zeta, c_3}(z \mid f, g) &= \{f(z), g(z)\} + c_3(\bar{f} \mathcal{E}_z g(z) - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} \bar{g} \mathcal{E}_z f(z)) + \\ &\quad + (\{\zeta(z), g(z)\} \bar{f} - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} \{\zeta(z), f(z)\} \bar{g}), \\ s_{\zeta, c_3}(f, g) &= Q(f, g) + Q(\zeta, g) \bar{f} - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} Q(\zeta, f) \bar{g}, \\ S_{\zeta, c_3}(\mathbf{f}, \mathcal{J}) &= s_{\zeta, c_3}(\mathbf{f}, \mathcal{J}) = 0. \end{aligned}$$

Тогда:

- 1) каждая непрерывная формальная деформация супералгебры $\mathbf{D}_{n_+}^{n_++4}$ эквивалентна суперскобке $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_{\zeta, c_3} = \mathbf{S}_{\zeta, c_3}(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ при некоторых $c_3 \in \hbar^2 \mathbb{K}[[\hbar^2]]$ и $\zeta(z) \in \hbar^2 E_{n_+}^{n_++4}[[\hbar^2]]$;
- 2) суперскобка $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_{\zeta_1, c_3}$ эквивалентна суперскобке $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_{\zeta_2, c_3}$, если $\zeta_1(z) - \zeta_2(z) \in Z_{n_+}^{n_-}[[\hbar^2]]$.

4. АНТИСКОБКА

На пространствах $D_{n_+}^{n_-}$ и $E_{n_+}^{n_-}$ имеется еще одна $\mathbb{Z}_2$ -градуировка ϵ (ϵ -четность), обратная ε -четности: $\epsilon = \varepsilon + 1$.

Положим $\varepsilon_A = 0$, $\epsilon_A = 1$ при $A = 1, 2, \dots, n_+$ и $\varepsilon_A = 1$, $\epsilon_A = 0$ при $A = n_+ + 1, \dots, n_+ + n_-$.

Хорошо известно, что при $n_+ = n_- = n$ скобка

$$[f, g](z) = \sum_{i=1}^n \left(f(z) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} g(z) - f(z) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial x_i} g(z) \right),$$

которую мы, следуя [15], называем *антискобкой* или *нечетной* скобкой, задает структуру супералгебры Ли на суперпространствах $D_n \stackrel{\text{def}}{=} D_n^n$ и $E_n \stackrel{\text{def}}{=} E_n^n$ с ϵ -четностью.

В самом деле, $[f, g] = -(-1)^{\epsilon(f)\epsilon(g)}[g, f]$, $\epsilon([f, g]) = \epsilon(f) + \epsilon(g)$ и выполнено тождество Якоби

$$(-1)^{\epsilon(f)\epsilon(h)}[f, [g, h]] + (-1)^{\epsilon(g)\epsilon(f)}[g, [h, f]] + (-1)^{\epsilon(h)\epsilon(g)}[h, [f, g]] = 0, \quad f, g, h \in E_n.$$

Мы будем называть эти супералгебры Ли *антипуассоновскими супералгебрами*.

Нечетная скобка Пуассона играет важную роль в лагранжевой формулировке квантовой теории калибровочных полей, известной как БВ-формализм [15], [16] (см. также [17]–[19], [5]). В физической литературе нечетная скобка была введена в [15]. По своим свойствам антискобка во многом аналогична четной скобке Пуассона и даже может быть получена при помощи “канонического формализма” с нечетным временем. Однако в отличие от случая четной скобки Пуассона, для которого имеется обширная литература, посвященная различным аспектам деформации (квантования) алгебры Пуассона, проблема деформации антискобки до сих пор недостаточно изучена.

ТЕОРЕМА 6 [11]. *С точностью до эквивалентности деформация антипуассоновской супералгебры с четным параметром $\hbar$ имеет вид*

$$[f(z), g(z)]_* = [f(z), g(z)] + (-1)^{\varepsilon(f)} \left\{ \frac{c}{1 + cN_z/2} \Delta f(z) \right\} \mathcal{E}_z g(z) + \{ \mathcal{E}_z f(z) \} \frac{c}{1 + cN_z/2} \Delta g(z),$$

где

$$N_z = \sum_A z_A \frac{\partial}{\partial z_A}, \quad \Delta = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

и $c \in \hbar^2 \mathbb{K}[[\hbar^2]]$.

4.1. Центральное расширение антипуассоновской супералгебры D_n .

ТЕОРЕМА 7 [20]. *Имеют место следующие утверждения.*

1. $H_{\text{tr}}^1 \simeq 0$.
2. Если $n \geq 2$, то $H_{\text{tr}}^2 \simeq 0$. Если $n = 1$, то $H_{\text{tr}}^2 \simeq \mathbb{K}^2$ и коцепи

$$\mu_1(f, g) = \int dz (-1)^{\varepsilon(f)} \{ \partial_x^3 \partial_\xi f(z) \} g(z), \quad \mu_2(f, g) = \int dz (-1)^{\varepsilon(f)} \{ \partial_x^2 f(z) \} g(z)$$

являются независимыми нетривиальными коциклами.

Таким образом, антипуассоновская супералгебра D_1 имеет центральные расширения.

ТЕОРЕМА 8 [11]. *Центральное расширение антипуассоновской супералгебры D_1 не имеет деформаций с четным параметром $\hbar$.*

Благодарности. Настоящая работа поддержана РФФИ (гранты № 05-01-00996 (И. Тютин), № 05-02-17217 (С. Конштейн)) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-4401.2006.2).

Список литературы

- [1] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerovich, D. Sternheimer, *Ann. Phys.*, **111**:1 (1978), 61–110; *Ann. Phys.*, **111**:1 (1978), 111–151.
- [2] М. В. Карасев, В. П. Маслов, *Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование*, Наука, М., 1991.
- [3] В. Fedosov, *Deformation Quantization and Index Theory*, Akademie, Berlin, 1996.
- [4] М. Kontsevich, *Lett. Math. Phys.*, **66**:3 (2003), 157–216; [arXiv: q-alg/9709040](#).
- [5] Д. А. Лейтес, И. М. Щепочкина, *ТМФ*, **126**:3 (2001), 339–369.
- [6] И. В. Тютин, *ТМФ*, **128**:3 (2001), 515–539.
- [7] В. В. Жаринов, *ТМФ*, **136**:2 (2003), 179–196.
- [8] С. Е. Конштейн, А. Г. Смирнов, И. В. Тютин, *ТМФ*, **148**:2 (2006), 163–178; [arXiv: hep-th/0401023](#).
- [9] S. E. Konstein, I. V. Tyutin, *General form of the deformation of Poisson superbracket on $(2, n)$ -dimensional superspace*, [arXiv: hep-th/0610308](#), предст. в ТМФ.
- [10] S. E. Konstein, I. V. Tyutin, *Deformations of the central extension of the Poisson superalgebra*, [arXiv: hep-th/0501027](#), предст. в ТМФ.
- [11] S. E. Konstein, I. V. Tyutin, *Deformations of the antibracket*, [arXiv: hep-th/0512313](#).
- [12] M. Gerstenhaber, *Ann. Math.*, **79**:1 (1964), 59–103; **99**:2 (1974), 257–276.
- [13] M. Scheunert, R. B. Zhang, *J. Math. Phys.*, **39**:9 (1998), 5024–5061; [arXiv: q-alg/9701037](#).
- [14] С. Е. Конштейн, А. Г. Смирнов, И. В. Тютин, *ТМФ*, **143**:2 (2005), 163–194; [arXiv: hep-th/0312109](#).
- [15] I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky, *Phys. Lett. B*, **120**:1–3 (1983), 166–170.
- [16] I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky, *J. Math. Phys.*, **26**:1 (1985), 172–184.
- [17] J. Gomis, J. Paris, S. Samuel, *Phys. Rep.*, **259**:1–2 (1995), 1–145; [arXiv: hep-th/9412228](#).
- [18] Д. М. Гитман, И. В. Тютин, *Каноническое квантование полей со связями*, Наука, М., 1986.
- [19] M. Henneaux, C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, University Press, Princeton, NJ, 1992.
- [20] S. E. Konstein, I. V. Tyutin, *Cohomology of antiPoisson superalgebra*, [arXiv: hep-th/0512300](#).