Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Котиков, Л. Н. Липатов, Уравнения Идена–Штаудахера и Бейсера–Идена–Штаудахера в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной калибровочной теории, *ТМФ*, 2008, том 155, номер 1, 117–129

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6197>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 17:12:15

© 2008 г.

А. В. Котиков*, Л. Н. Липатов†

УРАВНЕНИЯ ИДЕНА–ШТАУДАХЕРА И БЕЙСЕРТА–ИДЕНА–ШТАУДАХЕРА В $\mathcal{N} = 4$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ

Исследованы уравнения Идена–Штаудахера и Бейсера–Идена–Штаудахера для аномальной размерности операторов твиста 2 при больших значениях спина s в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной калибровочной теории. Эти уравнения сведены к системе линейных алгебраических уравнений, ядра которых вычислены аналитически. Показано, что в теории возмущений аномальная размерность представляет собой сумму произведений функций Эйлера $\zeta(k)$, обладающих свойством максимальной трансцендентности. Также показано, что при больших значениях постоянной взаимодействия “сингулярное” решение уравнения Бейсера–Идена–Штаудахера воспроизводит постоянные аномальных размерностей, предсказываемые струнной частью AdS/CFT-соответствия.

Ключевые слова: аномальная размерность, $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричная калибровочная теория.

1. ВВЕДЕНИЕ

Матрицы γ и $\tilde{\gamma}$ аномальных размерностей вильсоновских операторов твиста 2 в квантовой хромодинамике (КХД) определяют нарушение бьоркеновского скейлинга для структурных функций в неполяризованном и поляризованном случаях соответственно. Эти величины, вычисленные в терминах пертурбативного разложения по $a_s = \alpha_s/(4\pi)$, связаны посредством преобразования Меллина:

$$\begin{aligned}\gamma_{ab}(j) &= \int_0^1 dx x^{j-1} W_{b \rightarrow a}(x) = \gamma_{ab}^{(0)}(j) a_s + \gamma_{ab}^{(1)}(j) a_s^2 + \gamma_{ab}^{(2)}(j) a_s^3 + O(a_s^4), \\ \tilde{\gamma}_{ab}(j) &= \int_0^1 dx x^{j-1} \widetilde{W}_{b \rightarrow a}(x) = \tilde{\gamma}_{ab}^{(0)}(j) a_s + \tilde{\gamma}_{ab}^{(1)}(j) a_s^2 + \tilde{\gamma}_{ab}^{(2)}(j) a_s^3 + O(a_s^4),\end{aligned}\tag{1}$$

с $W_{b \rightarrow a}(x)$ и $\widetilde{W}_{b \rightarrow a}(x)$ – расщепляющими ядрами для уравнения Докшицера–Грибова–Липатова–Альтарелли–Паризи (ДГЛАП) [1], описывающего эволюцию партонных плотностей $f_a(x, Q^2)$ и $\tilde{f}_a(x, Q^2)$ (здесь и далее $a = \lambda, g, \phi$ для спинорных,

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: kotikov@theor.jinr.ru

†Петербургский институт ядерной физики им. Б. П. Константинова РАН, Гатчина, Россия; Institut für Theoretische Physik, Universität Hamburg, Hamburg, Germany

векторных и скалярных частиц),

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln Q^2} f_a(x, Q^2) &= \int_x^1 \frac{dy}{y} \sum_b W_{b \rightarrow a} \left(\frac{x}{y} \right) f_b(y, Q^2), \\ \frac{d}{d \ln Q^2} \tilde{f}_a(x, Q^2) &= \int_x^1 \frac{dy}{y} \sum_b \tilde{W}_{b \rightarrow a} \left(\frac{x}{y} \right) \tilde{f}_b(y, Q^2). \end{aligned} \quad (2)$$

В расширенных суперсимметричных моделях скалярные частицы вносят вклад только в усредненные по спину партонные распределения f_a . Их вклад отсутствует в случае зависящих от спина партонных распределений $\tilde{f}_a$, где теперь $a = \lambda, g$. Аномальные размерности и расщепляющие ядра в КХД известны с точностью до порядка, следующего за следующим за главным порядком (next-to-next-to-leading order, NNLO) теории возмущений (см. работу [2] и ссылки в ней).

КХД-выражения для аномальных размерностей можно преобразовать к $\mathcal{N}$ -расширенным суперсимметричным моделям Янга–Миллса (СЯМ) с использованием значений $C_A = C_F = N$, $T_f n_f = \mathcal{N}N/2$ для инвариантов C_A , C_F , T_f калибровочной $SU(N)$ -группы (n_f – число активных “кварков”). Более того, при $\mathcal{N} = 2$ и $\mathcal{N} = 4$ в аномальные размерности вильсоновских операторов вносят дополнительные вклады также диаграммы со скалярными частицами [3].

Оказывается, что выражения для собственных значений матрицы аномальных размерностей в $\mathcal{N} = 4$ модели СЯМ можно получить непосредственно из КХД-выражений для аномальных размерностей без утомительных вычислений, если использовать подход, разработанный для этой цели в работе [3] и называемый *принципом максимальной трансцендентности*. Этот метод основан на специальных свойствах интегрального ядра уравнения Балицкого–Фадиной–Кураева–Липатова (БФКЛ) [4]–[6] и на связи между уравнениями БФКЛ и ДГЛАП в этой модели (см. работу [3]). В рамках данного метода предполагалось, что коэффициенты теории возмущений для ядра БФКЛ и для универсальной аномальной размерности¹⁾ должны представлять собой линейные комбинации наиболее сложных специальных функций, которые могут появляться в каждом данном порядке. Результаты работы [3] для аномальной размерности, полученные с использованием принципа максимальной трансцендентности, были проверены путем прямых вычислений в работе [8]. На основании трехпетлевых выражений для аномальных размерностей в КХД [2] и данного принципа в работе [9] были получены собственные значения матрицы аномальной размерности для $\mathcal{N} = 4$ модели СЯМ в NNLO-приближении. Прямая проверка полученных результатов для оператора Кониши была проведена в работе [10]²⁾. Эти пертурбативные результаты важны для проверки AdS/CFT-соответствия [13], а также для проверки интегрируемости $\mathcal{N} = 4$ модели СЯМ.

¹⁾Как показано в работе [7], собственные значения матрицы аномальной размерности в ведущем порядке в $\mathcal{N} = 4$ модели СЯМ можно представить как одну и ту же аномальную размерность с различными аргументами. В работе [3] мы предположили, что это свойство верно за пределами ведущего порядка. Такая аномальная размерность была названа универсальной.

²⁾Заметим, что недавно в работе [11] с помощью Бете-анзаца [12] были получены четырехпетлевые поправки к универсальной аномальной размерности.

В прошлом году Иден и Штаудахер вывели интегральное уравнение (уравнение ИШ) для функции, определяющей поведение аномальной размерности для операторов твиста 2 в случае больших значений спинов s для всех порядков теории возмущений [14] (см. также работу [15]). Модификация данного уравнения, учитывающая дополнительный фазовый множитель в S -матрице для восстановления соответствия между конформной теорией поля и суперструнной моделью, была недавно предложена Бейсертом, Иденом и Штаудахером (уравнение БИШ) [16]. Полученные результаты находятся в согласии с вычислениями трехпетлевой аномальной размерности для оператора твиста 2 при больших значениях спина s , выполненными независимо в работе [17]³.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы проиллюстрировать аналитическое решение уравнений ИШ и БИШ, представленное в [19]. Наши результаты были частично представлены на рабочем совещании в Потсдаме [20].

Работа построена следующим образом. В разделах 2 и 3 содержится вывод системы линейных алгебраических уравнений с коэффициентами $\hat{a}_n$, возникающими в разложении решений ИШ и БИШ по функциям Бесселя. В явном виде вычислено ядро этих уравнений и рассмотрены его аналитические свойства в плоскости постоянной взаимодействия. В разделах 4–6 исследованы решения уравнений ИШ и БИШ при больших значениях постоянной взаимодействия. В случае уравнения БИШ поведение “сингулярной” аномальной размерности при больших значениях постоянной взаимодействия совпадает с результатом, предсказываемым струнной частью AdS/CFT-соответствия. Заключение содержит обсуждение полученных результатов.

2. УРАВНЕНИЕ ИШ

Аномальную размерность $\Delta - s$ операторов твиста 2 в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной калибровочной теории при больших значениях лоренцева спина $s \rightarrow \infty$ можно записать в виде

$$\Delta - s = \varphi \ln s, \quad (3)$$

где коэффициент φ в пределе 'т Хофта зависит только от постоянной взаимодействия g . Иден и Штаудахер получили для него выражение [14]

$$\varphi = 8g^2 \sigma(0) = 4g\sqrt{2} f(0), \quad (4)$$

где

$$\sigma(t) = \epsilon f(x), \quad t = \epsilon x, \quad \epsilon = \frac{1}{g\sqrt{2}}. \quad (5)$$

Функция $f(x)$ удовлетворяет уравнению [14]

$$\epsilon f(x) = \frac{t}{e^t - 1} \left(\frac{J_1(x)}{x} - \int_0^\infty dx' K(x, x') f(x') \right) \quad (6)$$

с интегральным ядром

$$K(x, y) = \frac{J_1(x)J_0(y) - J_1(y)J_0(x)}{x - y}, \quad (7)$$

³Недавно в работе [18] был найден четырехпетлевой вклад в аномальную размерность при $s \rightarrow \infty$, а также улучшена процедура работы [8] для пересуммирования теории возмущений.

где $J_n(x)$ – функции Бесселя,

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}, \quad J_1(x) = -J'_0(x). \quad (8)$$

Используя рекуррентное соотношение

$$J_{n-1}(x) = -J_{n+1}(x) + 2nx^{-1}J_n(x), \quad (9)$$

можно записать ядро в факторизованном виде

$$K(x, y) = \frac{2}{xy} \sum_{n=1}^{\infty} n J_n(x) J_n(y). \quad (10)$$

Удобно ввести новую функцию

$$\Psi(x) = \frac{e^{\epsilon x} - 1}{x} f(x). \quad (11)$$

и переписать уравнение (6) как

$$\Psi(x) = \frac{J_1(x)}{x} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{J_k(x)}{x} \int_0^{\infty} \frac{dz}{e^{\epsilon z} - 1} J_k(z) \Psi(z). \quad (12)$$

Будем искать его решение в виде

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \frac{J_n(x)}{x}. \quad (13)$$

Подставляя это равенство в уравнение (12) и сравнивая коэффициенты перед $J_k(x)$ в левой и правой частях, получаем

$$\hat{a}_k = \delta_{k,1} - 2k b_k, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} b_k &= \int_0^{\infty} \frac{dz}{e^{\epsilon z} - 1} J_k(z) \Psi(z) = \\ &= \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\infty} \frac{dt}{e^t - 1} J_k(t/\epsilon) \Psi(t/\epsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\infty} \frac{dt}{e^t - 1} J_k(t/\epsilon) \hat{a}_n \frac{J_n(t/\epsilon)}{(t/\epsilon)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Разлагая обе функции Бесселя в правой части последнего равенства в ряды в соответствии с (8) и применяя интегральное представление для ζ -функции Эйлера

$$p! \zeta(p+1) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{e^t - 1} t^p, \quad (16)$$

выразим b_k как

$$\begin{aligned} b_k &= \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s! (s+k)!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+l}}{l! (l+n)!} (2(s+l) + k + n - 1)! \times \\ &\quad \times \zeta(2(s+l) + k + n) \bar{g}^{2(s+l) + k + n}, \end{aligned}$$

где $\bar{g} = g/\sqrt{2} = 1/(2\epsilon)$.

Изменение порядка суммирования дает

$$\begin{aligned} b_k &= \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \bar{g}^{k+n} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2p+n+k)! (2p+n+k-1)! \zeta(2p+k+n)}{p! (p+n)! (p+k)! (p+n+k)!} (-\bar{g}^2)^p \equiv \\ &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n K_{k,n}(\bar{g}). \end{aligned} \quad (17)$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$\hat{a}_k = \delta_{1,k} - 2k \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \bar{g}^{k+n} K_{k,n}(\bar{g}). \quad (18)$$

Ряд, получающийся для $K_{k,n}$ по теории возмущений, имеет конечный радиус сходимости из-за особенности в точке $\bar{g}^2 = -1$. Однако его можно аналитически продолжить, если использовать представление с помощью контурного интеграла и известные соотношения для Γ -функций:

$$K_{k,n}(\bar{g}) = \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{ds}{2\pi i} \frac{\Gamma(s)(n+k-2s)!(n+k-1-2s)!\zeta(k+n-2s)}{(n-s)!(k-s)!(n+k-s)!} \bar{g}^{n+k-2s}, \quad (19)$$

где контур интегрирования проходит справа от полюса в точке $s = 0$ и слева от полюса ζ -функции в точке $s = (n+k-1)/2$.

Действительно, замыкая контур слева, можно воспроизвести равенство (17), учитывая полюсы Γ -функции при $s = -p$. Замыкая контур интегрирования в уравнении (19) справа, мы получаем четыре члена, возникающие из полюсов функций $\Gamma((n+k)/2-s)$, $\Gamma((n+k\pm 1)/2-s)$ и $\zeta(n+k-2s)$. Наиболее важные члены возникают из аргументов ζ -функции при $(n+k-2s) \rightarrow 1$. Удобно, однако, воспроизводить эти члены непосредственно из анализа уравнения ИШ при $\epsilon \rightarrow 0$, и этому посвящен раздел 4.

3. УРАВНЕНИЕ БИШ

Рассмотрим уравнение БИШ (см. уравнение (B3) из работы [16]) в виде, аналогичном (12):

$$\begin{aligned} \Psi(x) = & \frac{J_1(x)}{x} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c_{2k+1,2}(\bar{g}) \frac{J_{2k}(x)}{x} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{J_k(x)}{x} \int_0^{\infty} \frac{dz}{e^{\epsilon z} - 1} J_k(z) \Psi(z) - \\ & - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{2k}(x)}{x} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{k+s+1} c_{2k+1,2s}(\bar{g}) \int_0^{\infty} \frac{dz}{e^{\epsilon z} - 1} J_{2s-1}(z) \Psi(z), \end{aligned} \quad (20)$$

где (см. работы [16], [21]–[25])

$$\begin{aligned} c_{r,s}(\bar{g}) &= 2 \cos \left[\frac{\pi}{2} (s-r-1) \right] (r-1)(s-1) \int_0^{\infty} \frac{dt}{t(e^t - 1)} J_{r-1}(\bar{g}t) J_{s-1}(\bar{g}t) \equiv \\ &\equiv 2 \cos \left[\frac{\pi}{2} (s-r-1) \right] (r-1)(s-1) \tilde{c}_{r,s}(\bar{g}). \end{aligned} \quad (21)$$

Удобно ввести четные и нечетные компоненты $\Psi(x)$ так, что $\Psi_{\pm}(-x) = \pm \Psi_{\pm}(x)$:

$$\Psi(x) = \Psi_+(x) + \Psi_-(x), \quad \Psi_{\pm}(x) = \frac{1}{2} (\Psi(x) \pm \Psi(-x)). \quad (22)$$

Комбинируя уравнение (20) и аналогичное уравнение, в котором сделана замена $x \rightarrow -x$, получаем

$$\Psi_+(x) = \frac{J_1(x)}{x} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) \frac{J_{2k-1}(x)}{x} \int_0^{\infty} \frac{dz}{e^{\epsilon z} - 1} J_{2k-1}(z) \Psi(z), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Psi_-(x) = & 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c_{2k+1,2}(\bar{g}) \frac{J_{2k}(x)}{x} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (2k) \frac{J_{2k}(x)}{x} \int_0^{\infty} \frac{dz}{e^{\epsilon z} - 1} J_{2k}(z) \Psi(z) - \\ & - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{2k}(x)}{x} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{k+s+1} c_{2k+1,2s}(\bar{g}) \int_0^{\infty} \frac{dz}{e^{\epsilon z} - 1} J_{2s-1}(z) \Psi(z). \end{aligned} \quad (24)$$

Решения для $\Psi_{\pm}(x)$ можно найти, разлагая эти функции в ряды аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе. Коэффициенты разложения для $\Psi_+(x)$, $\Psi_-(x)$ имеют соответственно вид

$$\hat{a}_{2k-1} = \delta_{k,1} - 2(2k-1)b_{2k-1}, \quad (25)$$

$$\hat{a}_{2k} = 2(-1)^k c_{2k+1,2}(\bar{g})\delta_{k,1} - 4kb_{2k} - 4 \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{k+s+1} c_{2k+1,2s}(\bar{g})b_{2s-1}. \quad (26)$$

Таким образом, для $\hat{a}_{2k-1}$ получаем

$$\hat{a}_{2k-1} = \delta_{1,k} - (2k-1)\bar{g} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \bar{g}^{2k+n-1} K_{2k-1,n}(\bar{g}). \quad (27)$$

Чтобы получить выражение для $\hat{a}_{2k}$, мы должны вычислить $c_{2k+1,2s}(\bar{g})$. Разлагая обе функции Бесселя в (21) в ряды в соответствии с (8) и применяя интегральное представление (16) для ζ -функций Эйлера, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{2k+1,2s}(\bar{g}) = & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(m+2k)!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+l}}{l!(l+2s-1)!} (2(k+s+m+l)-1)! \times \\ & \times \zeta(2(k+s+m+l)-1) \bar{g}^{2(k+s+m+l)-1}. \end{aligned} \quad (28)$$

Изменим порядок суммирования,

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{2k+1,2s}(\bar{g}) = & \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \bar{g}^{2(p+k+s)-1} \frac{[(2p+s+k-1)!][2(p+s+k)-1]!}{p!(p+2s-1)!(p+2k)!(p+2s+2k-1)!} \times \\ & \times \zeta(2(p+k+s)-1) \equiv \frac{\bar{g}^{2(k+s)-1}}{2} K_{2k,2s-1}(\bar{g}), \end{aligned} \quad (29)$$

и получим формулу

$$c_{2k+1,2s}(\bar{g}) = k(2s-1)(-1)^{s+k} \bar{g}^{2(k+s)-1} K_{2k,2s-1}(\bar{g}), \quad (30)$$

которая согласуется с уравнением (A14) из работы [19].

Используя уравнения (18) и (30), получаем

$$\begin{aligned} \hat{a}_{2k} = & 4k\bar{g}^{2k+1} K_{2k,1}(\bar{g}) - 4k \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \bar{g}^{2k+n} K_{2k,n}(\bar{g}) + \\ & + 8k \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \bar{g}^{2k+n} \sum_{s=1}^{\infty} (2s-1) \bar{g}^{2s-2} K_{2k,2s-1}(\bar{g}) K_{2s-1,n}(\bar{g}). \end{aligned} \quad (31)$$

Заметим, что согласно уравнению (161) из работы [19] уравнения (23), (24) можно переписать в более простом виде:

$$\Psi_+(x) = \frac{J_1(x)}{x} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) \frac{J_{2k-1}(x)}{x} \int_0^{\infty} \frac{dz}{e^{\epsilon z} - 1} J_{2k-1}(z) [\Psi_+(z) + i\Psi_-(z)], \quad (32)$$

$$\Psi_{-}(x) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} (2k) \frac{J_{2k}(x)}{x} \int_0^{\infty} \frac{dz}{e^{\epsilon z} - 1} J_{2k}(z) [i\Psi_{+}(z) + \Psi_{-}(z)], \quad (33)$$

т.е. отличия от формулы (12) для уравнения ИШ порождены заменами $\Psi_{-}(z) \rightarrow i\Psi_{-}(z)$ и $\Psi_{+}(z) \rightarrow i\Psi_{+}(z)$ в правых частях (32) и (33) соответственно.

Решая эти уравнения с помощью разложения (13), получаем

$$\begin{aligned} \hat{a}_{2k-1} = & \delta_{1,k} - 2(2k-1) \sum_{m=1}^{\infty} \hat{a}_{2m-1} \bar{g}^{2k+2m-2} K_{2k-1,2m-1}(\bar{g}) - \\ & - 2i(2k-1) \sum_{m=1}^{\infty} \hat{a}_{2m} \bar{g}^{2k+2m-1} K_{2k-1,2m}(\bar{g}), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\hat{a}_{2k} = -4ki \sum_{m=1}^{\infty} \hat{a}_{2m-1} \bar{g}^{2k+2m-1} K_{2k,2m-1}(\bar{g}) - 4k \sum_{m=1}^{\infty} \hat{a}_{2m} \bar{g}^{2k+2m} K_{2k,2m}(\bar{g}), \quad (35)$$

что совпадает с системой (18) для уравнения ИШ с заменой $K_{r,s} \rightarrow iK_{r,s}$ при нечетных значениях $r+s$.

4. УРАВНЕНИЕ ИШ ПРИ $\epsilon \rightarrow 0$

В данном разделе мы получим систему линейных алгебраических уравнений для решения уравнения ИШ в пределе больших значений постоянной взаимодействия, $g \rightarrow \infty$. В этом пределе можно получить уравнения из представления Меллина–Барнса (19) для ядра $K_{k,n}$. Тем не менее полезно вывести их независимым способом.

При $\epsilon \rightarrow 0$ уравнение (6) упрощается: имеем

$$\epsilon f(x) = \frac{J_1(x)}{x} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{J_k(x)}{x} \int_0^{\infty} \frac{dz}{z} J_k(z) f(z). \quad (36)$$

Аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе, можно ввести четные и нечетные компоненты $f(x)$ так, что $f_{\pm}(-x) = \pm f_{\pm}(x)$:

$$f(x) = f_{+}(x) + f_{-}(x), \quad f_{\pm}(x) = \frac{1}{2}(f(x) \pm f(-x)). \quad (37)$$

Комбинируя уравнение (36) и аналогичное уравнение, в котором сделана замена $x \rightarrow -x$, получаем

$$\epsilon f_{+}(x) = \frac{J_1(x)}{x} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) \frac{J_{2k-1}(x)}{x} \int_0^{\infty} \frac{dz}{z} J_{2k-1}(z) f(z), \quad (38)$$

$$\epsilon f_{-}(x) = -4 \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{J_{2k}(x)}{x} \int_0^{\infty} \frac{dz}{z} J_{2k}(z) f(z). \quad (39)$$

Представим функции $f(x)$, $f_{\pm}(x)$ в виде, аналогичном (13):

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \frac{J_{n+1}(x)}{x}, \\ f_{+}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \frac{J_{2n+1}(x)}{x}, \quad f_{-}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+2} \frac{J_{2n+2}(x)}{x}. \end{aligned} \quad (40)$$

Интегралы в правых частях равенств (38), (39) можно вычислить, используя формулы

$$\int_0^\infty \frac{dz}{z^2} J_{2s}(z) J_{2l}(z) = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{s+l+1}}{[4(s+l)^2 - 1][4(s-l)^2 - 1]}, \quad (41)$$

$$\int_0^\infty \frac{dz}{z^2} J_{2s+1}(z) J_{2l+1}(z) = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{s+l+1}}{[4(s+l+1)^2 - 1][4(s-l)^2 - 1]}, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dz}{z^2} J_{2s}(z) J_{2l+1}(z) &= \frac{1}{4} \frac{\Gamma(s+l)}{\Gamma(s+l+2)\Gamma(1+s-l)\Gamma(l-s+2)} = \\ &= \begin{cases} \frac{\delta_s^l}{8s(2s+1)}, & \text{если } s = l, \\ \frac{\delta_s^{l+1}}{8s(2s-1)}, & \text{если } s = l+1. \end{cases} \end{aligned} \quad (43)$$

Отсюда получаем следующую линейную систему уравнений для коэффициентов a_k :

$$\begin{aligned} \epsilon a_{2s+1} &= \delta_{0,s} - \frac{a_{2s}(1 - \delta_{0,s})}{4s} - \frac{a_{2(s+1)}}{4(s+1)} - \\ &\quad - \frac{8(2s+1)}{\pi} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^{m+s+1} a_{2m+1}}{[4(m+s+1)^2 - 1][4(m-s)^2 - 1]}, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \epsilon a_{2s+2} &= -\frac{a_{2s+1}}{2(2s+1)} - \frac{a_{2s+3}}{2(2s+3)} - \\ &\quad - \frac{16(s+1)}{\pi} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^{m+s+1} a_{2m+2}}{[4(m+s+2)^2 - 1][4(m-s)^2 - 1]}. \end{aligned} \quad (45)$$

Первое и второе уравнения этой системы следуют из уравнений (38) и (39) соответственно. Уравнения (44) и (45) можно также получить непосредственно из (18) и (19), однако коэффициенты a_n и $\hat{a}_n$ совпадают только при $\epsilon \rightarrow 0$.

Можно искать функции $f(x)$, $f_\pm(x)$ в другом виде:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^\infty \tilde{d}_n J_n(x), \\ f_+(x) &= \sum_{n=0}^\infty \tilde{d}_{2n} J_{2n}(x), \quad f_-(x) = \sum_{n=1}^\infty \tilde{d}_{2n-1} J_{2n-1}(x). \end{aligned} \quad (46)$$

Подставляя эти разложения в (38) и (39) и используя формулы

$$\int_0^\infty \frac{dz}{z} J_{2s}(z) J_{2l}(z) = \frac{1}{4s} \delta_{s,l}, \quad (47)$$

$$\int_0^\infty \frac{dz}{z} J_{2s+1}(z) J_{2l+1}(z) = \frac{1}{2(2s-1)} \delta_{s,l}, \quad (48)$$

$$\int_0^\infty \frac{dz}{z} J_{2s}(z) J_{2l-1}(z) = \frac{2(-1)^{s+l}}{\pi[4s^2 - (2l-1)^2]}, \quad (49)$$

получаем систему уравнений для коэффициентов d_k :

$$2(2l-1)\epsilon \sum_{m=0}^{l-1} (-1)^{m+1} \tilde{d}_{2m} + O(\epsilon^2) = \delta_{l,1} - \tilde{d}_{2l-1} - \frac{4(2l-1)}{\pi} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^{m+l} \tilde{d}_{2m}}{[4m^2 - (2l-1)^2]}, \quad (50)$$

$$4l\epsilon \sum_{m=0}^{l-1} (-1)^{m+1} \tilde{d}_{2m+1} + O(\epsilon^2) = -\tilde{d}_{2l} - \frac{8l}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+l} \tilde{d}_{2m-1}}{[4l^2 - (2m-1)^2]}, \quad l \geq 1. \quad (51)$$

Уравнения (50) и (51) получены путем сравнения коэффициентов, стоящих перед функциями $J_{2l-1}(x)/x$ и $J_{2l}(x)/x$ в (38) и (39) соответственно. Эти уравнения выглядят проще, чем (44) и (45).

5. УРАВНЕНИЕ БИШ ПРИ $\epsilon \rightarrow 0$

В данном разделе мы получим из уравнения БИШ систему линейных алгебраических уравнений при больших значениях постоянной взаимодействия, т.е. при $g \rightarrow \infty$.

Введем четные и нечетные компоненты функции $f(x)$ по формулам (37). Систему уравнений для $f_{\pm}(x)$ в случае уравнения БИШ можно получить непосредственно из (38) и (39), совершив замены $f_{-}(z) \rightarrow if_{-}(z)$ в правой части (38) и $f_{+}(z) \rightarrow if_{+}(z)$ в правой части (39):

$$\epsilon f_{+}(x) = \frac{J_1(x)}{x} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) \frac{J_{2k-1}(x)}{x} \int_0^{\infty} \frac{dz}{z} J_{2k-1}(z) (f_{+}(z) + if_{-}(z)), \quad (52)$$

$$\epsilon f_{-}(x) = -4 \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{J_{2k}(x)}{x} \int_0^{\infty} \frac{dz}{z} J_{2k}(z) (if_{+}(z) + f_{-}(z)). \quad (53)$$

Начнем с разложений (46) для функций $f(x)$, $f_{+}(x)$ и $f_{-}(x)$.

Следуя приведенным выше рассуждениям, сделаем замены $\tilde{d}_{2l-1} \rightarrow i\tilde{d}_{2l-1}$ и $\tilde{d}_{2l} \rightarrow i\tilde{d}_{2l}$ в уравнениях (50) и (51) соответственно. Отсюда, опираясь на (52), (53), выведем систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов $\tilde{d}_k$ в случае уравнения БИШ:

$$\begin{aligned} 2(2l-1)\epsilon \sum_{m=0}^{l-1} (-1)^{m+1} \tilde{d}_{2m} + O(\epsilon^2) &= \delta_{l,1} - i\tilde{d}_{2l-1} - \\ &\quad - \frac{4(2l-1)}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+l} \tilde{d}_{2m}}{[4m^2 - (2l-1)^2]}, \quad (54) \\ 4l\epsilon \sum_{m=0}^{l-1} (-1)^{m+1} \tilde{d}_{2m+1} + O(\epsilon^2) &= -i\tilde{d}_{2l} - \frac{8l}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+l} \tilde{d}_{2m-1}}{[4l^2 - (2m-1)^2]}. \end{aligned}$$

Эти уравнения нетрудно получить, сравнивая коэффициенты, стоящие перед функциями $J_{2l-1}(x)/x$ и $J_{2l}(x)/x$ в (52) и (53) соответственно.

Можно также представить функцию $f(x)$ в виде (40). Подставляя формулы (41)–(43), получаем линейную систему уравнений для коэффициентов a_k

$$\begin{aligned} \epsilon a_{2s+1} &= \delta_{0,s} - i \frac{a_{2s}(1 - \delta_{0,s})}{4s} - i \frac{a_{2(s+1)}}{4(s+1)} - \\ &\quad - \frac{8(2s+1)}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{16}{\pi} \frac{(-1)^{m+s+1} a_{2m+1}}{[4(m+s+1)^2 - 1][4(m-s)^2 - 1]}, \quad (55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon a_{2s+2} = & -i \frac{a_{2s+1}}{2(2s+1)} - i \frac{a_{2s+3}}{2(2s+3)} - \\ & - \frac{16(s+1)}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{16}{\pi} \frac{(-1)^{m+s+1} a_{2m+2}}{[4(m+s+2)^2 - 1][4(m-s)^2 - 1]}, \end{aligned} \quad (56)$$

которая совпадает с системой (44), (45) с точностью до замен $a_{2s} \rightarrow ia_{2s}$ и $a_{2(s+1)} \rightarrow ia_{2(s+1)}$ в правой части (44) и $a_{2s+1} \rightarrow ia_{2s+1}$ и $a_{2s+3} \rightarrow ia_{2s+3}$ в правой части (45). Уравнения (55), (56) можно также получить непосредственно из (35) и (19). Однако, как и для уравнения ИШ, коэффициенты a_n и $\hat{a}_n$ совпадают только при $\epsilon \rightarrow 0$.

Результаты для “сингулярной” модификации уравнения БИШ (см. работу [19]) можно получить, сделав замену $a_p \rightarrow 2a_p$, $p = 2s, 2s+1, 2s+2, 2s+3$, и положив $a_{2m+1} = a_{2m+2} = 0$ в правых частях (55), (56). Поэтому уравнения для нечетных и четных коэффициентов разложения становятся похожими и записываются в более простом виде

$$\epsilon a_n = \delta_{1,n} - i \frac{a_{n-1}(1 - \delta_{1,n})}{n-1} - i \frac{a_{n+1}}{n+1}, \quad (57)$$

что совпадает с приведенными ниже формулами (60), (61) после замены $a_n = n\hat{a}_n$. Эти уравнения решены в разделе 6.

Заметим, что решение имеет поправки двух типов. Поправки первого типа возникают из последнего члена в правых частях (55), (56) и должны отвечать за различия между ϵ -поправками (см. формулу (64)) и соответствующей поправкой Фролова–Цейтлина (см. формулу (66)).

Поправки второго типа к результатам, полученным для аномальной размерности, возникают из поправок к левым частям уравнений (55), (56). Действительно, при $\epsilon \rightarrow 0$ мы удерживаем только первый член множителя $(e^{\epsilon x} - 1)/x \cdot f(x)$. Разлагая $e^{\epsilon x}$, по аналогии с (50) и (51) получаем дополнительные вклады в левые части уравнений (55) и (56):

$$\epsilon a_{2s+1} \rightarrow \epsilon a_{2s+1} + \epsilon^2(2s+1)(1 - \delta_{0,s}) \sum_{m=0}^{s-1} a_{2m+2} + O(\epsilon^3), \quad (58)$$

$$\epsilon a_{2s+2} \rightarrow \epsilon a_{2s+2} + \epsilon^2(2s+2) \sum_{m=0}^s a_{2m+1} + O(\epsilon^3). \quad (59)$$

6. “СИНГУЛЯРНОЕ” РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БИШ

При $\epsilon \rightarrow 0$ можно подставить вместо уравнений (55) и (56) их “сингулярное” решение (57)

$$\epsilon \hat{a}_1 = 1 - i\hat{a}_2, \quad (60)$$

$$n\epsilon \hat{a}_n = -i\hat{a}_{n-1} - i\hat{a}_{n+1}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (61)$$

Эти выражения соответствуют рекуррентным соотношениям для функций Бесселя $J_n(-i2\epsilon^{-1})$ и $Y_n(-i2\epsilon^{-1})$. Однако аналогично тому, как это было сделано в разделе 6 работы [19], можно утверждать, что решение приведенных выше рекуррентных соотношений должно содержать только функции Бесселя $J_n(i2\epsilon^{-1}) = i^n I_n(2\epsilon^{-1})$,

поскольку функция $Y_n(i2\epsilon^{-1})$ имеет особенности, не совместимые с разложением по теории возмущений (см. равенство (124) в работе [19]). Поэтому

$$\hat{d}_k = (-i)^{k-1} \frac{I_k(2\epsilon^{-1})}{I_0(2\epsilon^{-1})} \quad (62)$$

и

$$\gamma_{\text{sing}} = \frac{2}{\epsilon} \hat{d}_1 = \frac{2}{\epsilon} \frac{I_1(2\epsilon^{-1})}{I_0(2\epsilon^{-1})}. \quad (63)$$

В режиме сильной связи $\epsilon \rightarrow 0$ выражение для γ_{sing} существенно упрощается:

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \gamma_{\text{sing}} \approx \frac{2}{\epsilon} - \frac{1}{2} - \frac{1}{16}\epsilon = 2\sqrt{2}g - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{32g}, \quad (64)$$

поскольку при больших значениях t функция $I_n(t)$ имеет асимптотический вид

$$I_n(t) = \frac{e^t}{\sqrt{2\pi t}} \left[1 - \frac{4n^2 - 1}{8t} + \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)}{2!(8t)^2} + O\left(\frac{1}{t^3}\right) \right]. \quad (65)$$

Выражение (64) следует сравнить с результатами, предсказанными с помощью теории струн [26]:

$$\gamma_{\text{Pol}} = 2\sqrt{2}g - \frac{3}{\pi} \ln 2 \approx 2\sqrt{2}g - 0.661907. \quad (66)$$

Здесь мы в точности воспроизвели поведение γ_{Pol} в главном порядке, однако коэффициент Фролова–Цейтлина в следующем за главным порядке получен только с точностью 30%. Заметим, что имеются дополнительные поправки к уравнениям (60) и (61), которые должны отвечать за это отличие (см. предыдущий раздел и обсуждение в нем).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы представили исследование [19] уравнений ИШ и БИШ для случая аномальной размерности при больших значениях спина s . Каждое из этих интегральных уравнений было сведено к системе линейных алгебраических уравнений (14), (17) и (34), (35) с ядром, выражающимся в явном виде (19), что позволило найти радиус сходимости для разложения этого ядра в случае слабого взаимодействия и вычислить асимптотический вид ядра в случае сильного взаимодействия. В частности, в работе [19] мы доказали свойство максимальной трансцендентности разложения по теории возмущений для случая аномальной размерности в рамках гипотезы Идена–Штаудахера относительно целочисленных коэффициентов, стоящих перед произведением ζ -функций. Используя для решения обратное преобразование Лапласа, мы редуцировали уравнение ИШ к более простому “сингулярному” виду, справедливому для всех значений постоянной взаимодействия. Аналогичный вид был также получен при решении уравнения БИШ. В пределе сильного взаимодействия, упомянутое выше “сингулярное” поведение согласуется с результатами, предсказанными теорией струн (см. работу [26]). Различие в поправках к этим асимптотическим выражениям предположительно связано с упрощениями, допущенными при выводе точного сингулярного решения (см. обсуждение в предыдущем разделе). Итак, в работе [19] было показано, что AdS/CFT-соответствие вместе с интегрируемостью и трансцендентностью уравнений БИШ позволяет по-

строить асимптотическое поведение операторов с твистом 2 в случае аномальной размерности при $s \rightarrow \infty$ для $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной калибровочной теории при всех значениях постоянных взаимодействий.

Имеется также длинный список других исследований уравнения БИШ (см. работы [27]–[31] и ссылки в них), тщательный анализ которых выходит за рамки этого краткого обзора. Поэтому здесь мы рассмотрим только некоторые из этих работ.

В работе [27], опубликованной ранее нашей работы [19], но после доклада [20], было использовано разложение, аналогичное разложению (13), и получено численное решение системы, аналогичной системе, основанной на (34), (35). Авторы работы [27] получили хорошее численное согласие с результатами, предсказанными с помощью теории струн [26], включая однопетлевую поправку Фролова–Цейтлина. Более того, они также численно оценили двухпетлевую поправку к результатам, предсказанным с помощью теории струн. Однако эти оценки расходятся (даже в знаке) с точным результатом, полученным недавно в работе [28].

Некоторое продолжение исследований работы [27] было недавно предпринято в работе [29]. В этой работе при $\epsilon \rightarrow 0$ на основе численного анализа системы, аналогичной системе, которая основана на (34), (35), было получено соотношение

$$\hat{d}_{2k} = \hat{d}_{2k-1} = \frac{i(-1)^{k+1}}{2} \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k)}. \quad (67)$$

Это соотношение приводит к правильному струнному асимптотическому виду аномальной размерности φ при $g \rightarrow \infty$, однако вид функции $f(x)$ отличается от “сингулярного” вида, полученного в работе [19].

Заметим также, что в недавней работе [30] однопетлевая поправка Фролова–Цейтлина была воспроизведена аналитически из анзаца Бете.

Авторы планируют вернуться к анализу уравнений ИШ и БИШ в будущих исследованиях.

Благодарности. Работа была поддержана РФФИ (гранты № 07-02-00902-а, 07-02-01046-а). А. В. Котиков благодарен Организационному комитету Международного рабочего совещания “Классические и квантовые интегрируемые системы” за приглашение.

Список литературы

- [1] В. Н. Грибов, Л. Н. Липатов, *ЯФ*, **15** (1972), 781–807; 1218–1237; Л. Н. Липатов, *ЯФ*, **20** (1974), 181–198; G. Altarelli, G. Parisi, *Nucl. Phys. B*, **126:2** (1977), 298–318; Ю. Л. Докшицер, *ЖЭТФ*, **73** (1977), 1216–1240.
- [2] S. Moch, J. A. M. Vermaseren, A. Vogt, *Nucl. Phys. B*, **688:1–2** (2004), 101–134; A. Vogt, S. Moch, J. A. M. Vermaseren, *Nucl. Phys. B*, **691** (2004), 129–181.
- [3] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, *Nucl. Phys. B*, **661:1–2** (2003), 19–61; [hep-ph/0112346](#).
- [4] Л. Н. Липатов, *ЯФ*, **23** (1976), 642–656; V. S. Fadin, E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, *Phys. Lett. B*, **60:1** (1975), 50–52; Е. А. Кураев, Л. Н. Липатов, В. С. Фадин, *ЖЭТФ*, **71** (1976), 840–855; *ЖЭТФ*, **72:2** (1977), 377–389; И. И. Балицкий, Л. Н. Липатов, *ЯФ*, **28** (1978), 1597–1611; *Письма в ЖЭТФ*, **30** (1979), 383.
- [5] V. S. Fadin, L. N. Lipatov, *Phys. Lett. B*, **429:1–2** (1998), 127–134; G. Camici, M. Ciafaloni, *Phys. Lett. B*, **430:3–4** (1998), 349–354.
- [6] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, *Nucl. Phys. B*, **582:1–3** (2000), 19–43.

- [7] L. N. Lipatov, “Effective action for high energy processes in QCD”, *Very High Multiplicity Physics*, Proc. Int. Workshop (Dubna 2000), eds. J. Manjavidze, A. Sissakian, JINR, Dubna, 2000, 159; *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, **99** (2001), 175–179.
- [8] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, V. N. Velizhanin, *Phys. Lett. B*, **557**:1–2 (2003), 114–120.
- [9] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, A. I. Onishchenko, V. N. Velizhanin, *Phys. Lett. B*, **595**:1–4 (2004), 521–529; *Phys. Lett. B*, **632**:5–6 (2006), 754–756.
- [10] B. Eden, C. Jarczak, E. Sokatchev, *Nucl. Phys. B*, **712**:1–2 (2005), 157–195.
- [11] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, A. Rey, M. Staudacher, V. N. Velizhanin, *Dressing and Wrapping*, [arXiv: 0704.3586](#).
- [12] N. Beisert, M. Staudacher, *Nucl. Phys. B*, **727**:1–2 (2005), 1–62.
- [13] J. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2**:2 (1998), 231–252; *Internat. J. Theoret. Phys.*, **38** (1999), 1113–1133; S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov, *Phys. Lett. B*, **428**:1–2 (1998), 105–114; E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2**:2 (1998), 253–291.
- [14] B. Eden, M. Staudacher, *J. Stat. Mech.*, **11** (2006), P11014.
- [15] A. V. Belitsky, *Phys. Lett. B*, **643**:6 (2006), 354–361.
- [16] N. Beisert, B. Eden, M. Staudacher, *J. Stat. Mech.*, **1** (2007), P01021.
- [17] Z. Bern, L. J. Dixon, V. A. Smirnov, *Phys. Rev. D*, **72** (2005), 085001; F. Cachazo, M. Spradlin, A. Volovich, *Phys. Rev. D*, **75** (2007), 105011.
- [18] Z. Bern, M. Czakon, L. Dixon et al., *Phys. Rev. D*, **75** (2007), 085010; Z. Bern, J. J. M. Carrasco, H. Johansson, D. A. Kosower, *Maximally Supersymmetric Planar Yang–Mills Amplitudes at Five Loops*, [arXiv: 0705.1864](#).
- [19] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, *Nucl. Phys. B*, **769**:3 (2007), 217–255.
- [20] L. N. Lipatov, “Transcendentality and the Eden–Staudacher equation”, *Talk at the Workshop on Integrability in Gauge and String Theory* (AEI, Potsdam, Germany, July 24–28, 2006).
- [21] N. Beisert, R. Hernandez, E. Lopez, *JHEP*, **11** (2006), 070.
- [22] N. Beisert, T. Klose, *J. Stat. Mech.*, **07** (2006), P07006; C. Gomez, R. Hernandez, *Phys. Lett. B*, **644**:5–6 (2007), 375–378.
- [23] G. Arutyunov, S. Frolov, M. Staudacher, *JHEP*, **10** (2004), 016.
- [24] N. Beisert, A. A. Tseytlin, *Phys. Lett. B*, **629**:2–4 (2005), 102–110; R. Hernandez, E. Lopez, *JHEP*, **07** (2006), 004; L. Freyhult, C. Kristjansen, *Phys. Lett. B*, **638**:2–3 (2006), 258–264.
- [25] R. A. Janik, *Phys. Rev. D*, **73**:8 (2006), 086006.
- [26] S. Gubser, I. Klebanov, A. Polyakov, *Nucl. Phys. B*, **636**:1–2 (2002), 99–114; S. Frolov, A. A. Tseytlin, *JHEP*, **06** (2002), 007.
- [27] M. K. Benna, S. Benvenuti, I. R. Klebanov, A. Scardicchio, *Phys. Rev. Lett.*, **98**:13 (2007), 131603.
- [28] R. Roiban, A. Tirziu, A. A. Tseytlin, *Two-loop world-sheet corrections in $AdS_5 \times S^5$ superstring*, [arXiv: 0704.3638](#).
- [29] L. F. Alday, G. Arutyunov, M. K. Benna, B. Eden, I. R. Klebanov, *JHEP*, **04** (2007), 082.
- [30] P. Y. Casteill, C. Kristjansen, *The Strong Coupling Limit of the Scaling Function from the Quantum String Bethe Ansatz*, [arXiv: 0705.0890](#).
- [31] N. Beisert, T. McLoughlin, R. Roiban, *Phys. Rev. D*, **76** (2007), 046002; [arXiv: 0705.0321](#); N. Beisert, *PoS (Solvay)*, **002** (2007); [arXiv: 0704.0400](#); S. Ryang, *Analytic Bethe Ansatz Solutions for Highest States in the $su(1|1)$ and $su(2)$ Sectors*, [arXiv: hep-th/0703241](#); A. V. Belitsky, *Baxter equation for long-range $SL(2|1)$ magnet*, [arXiv: hep-th/0703058](#); I. Kostov, D. Serban, D. Volin, *Strong coupling limit of Bethe Ansatz equations*, [arXiv: hep-th/0703031](#); A. Rej, M. Staudacher, S. Zieme, *Nesting and Dressing*, [arXiv: hep-th/0702151](#); A. Torrielli, *Classical r -matrix of the $su(2|2)$ SYM spin-chain*, [arXiv: hep-th/0701281](#); G. Arutyunov, S. Frolov, M. Zamaklar, *JHEP*, **04** (2007), 002; S. Frolov, A. Tirziu, A. A. Tseytlin, *Nucl. Phys. B*, **766**:1–3 (2007), 232–245.