Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Нерсисян, В. Р. Оганян, Многоцентровые системы
МИКЗ–Кеплера, *ТМФ*, 2008, том 155, номер 1, 130–139

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6198>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 05:12:24

© 2008 г.

А. П. Нерсисян^{*,†}, В. Р. Оганян^{*,‡}

МНОГОЦЕНТРОВЫЕ СИСТЕМЫ МИКЗ–КЕПЛЕРА

Получены решения двухцентральной задачи МИКЗ–Кеплера и задачи МИКЗ–Кеплера–Штарка. Предложена модель многоцентральной системы МИКЗ–Кеплера на произвольном конформно плоском сферически-симметричном трехмерном пространстве.

Ключевые слова: многоцентровые системы МИКЗ–Кеплера, монополь, интегрируемость.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, кулоновская система (задача Кеплера) занимает особое место среди конечномерных интегрируемых классических и квантовых систем. С одной стороны, она имеет большое количество физических приложений, с другой – является одной из основных систем со скрытой симметрией [1]. За последнее столетие было построено множество обобщений задачи Кеплера. Среди них следует отметить задачи Кеплера на сфере и гиперboloиде [2] и их многомерные обобщения. Важное обобщение задачи Кеплера было предложено Макинтошем и Кизнеросом и независимо Цванцигером [3]. В этой системе кулоновский центр был заменен на дион Дирака (дираковский монополь, обладающий электрическим зарядом [4]). Для сохранения скрытой симметрии исходной системы к гамильтониану был добавлен центробежный потенциал $s^2/(2\mu r^2)$, где $s = eg/c$ есть монопольное число (e – электрический заряд пробной частицы, g – магнитный заряд монополя), μ – масса пробной частицы. Полученная таким образом система унаследовала многие отличительные особенности кеплеровой задачи и в настоящее время известна как система МИКЗ–Кеплера. К примеру, система МИКЗ–Кеплера, кроме обычной вращательной симметрии, обладает также и скрытой симметрией обычной задачи Кеплера, порождаемой вектором Рунге–Ленца. Как и в задаче Кеплера, траектории в системе МИКЗ–Кеплера являются коническими сечениями. Также много общего имеется и между соответствующими квантово-механическими системами. Например, обе системы обладают совершенно идентичным спектром, с той лишь разницей, что

^{*}Ереванский государственный университет, Ереван, Армения; Ереванский физический институт, Ереван, Армения. E-mail: arnerses@yerphi.am, ohanyan@yerphi.am

[†]Арцахский государственный университет, Степанакерт

[‡]Российско-Армянский государственный университет, Ереван, Армения

в задаче МИКЗ–Кеплера нижняя граница допустимых значений орбитального квантового числа смещается с 0 до $|s|$.

Система МИКЗ–Кеплера описывает движение скалярной электрически заряженной частицы в электромагнитном поле дираковского диона. Дополнительный центробежный потенциал $s^2/(2\mu r^2)$ также может быть интерпретирован в этом контексте. Именно, в присутствии магнитного поля монополя $\mathbf{B} = g\mathbf{r}/r^3$ орбитальный момент системы приобретает дополнительный “спиноподобный” член, $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\pi} - s\mathbf{r}/r$, где $\boldsymbol{\pi}$ есть динамический импульс, содержащий вектор-потенциал магнитного поля монополя. С другой стороны, между орбитальным и магнитным моментами частицы существует следующее соотношение: $\mathcal{M} = e\mathbf{J}/(2\mu c)$. Поэтому энергия взаимодействия магнитного момента с магнитным полем диона $\mathbf{B}$ имеет следующий вид:

$$U_{\mathbf{B}} = -\mathcal{M}\mathbf{B} = -\frac{eg}{2\mu c}\mathbf{J}\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{s^2}{2\mu r^2},$$

т.е. совпадает с центробежным потенциальным членом системы МИКЗ–Кеплера [5]. Однако дополнительный вклад в орбитальный момент системы, пропорциональный s , обусловлен орбитальным моментом самого электромагнитного поля, а не дополнительными свойствами, приобретаемыми пробной частицей. Таким образом, в данном случае не вполне корректная интерпретация приводит к правильному результату. Отметим также, что система МИКЗ–Кеплера может описывать и относительное движение двух дираковских дионов, электрические и магнитные заряды которых (e_1, g_1) и (e_2, g_2) подчиняются следующему условию: $e_1g_2 - e_2g_1 = cs$. Подобно приведенному случаю центробежный потенциал $s^2/(2\mu r^2)$ может быть интерпретирован как энергия взаимодействия между индуцированными дипольным и магнитным моментами с электрическим и магнитным полями (μ в этом случае становится приведенной массой системы двух дионов).

Аналогия между системой МИКЗ–Кеплера и задачей Кулона имеет естественное объяснение в терминах четырехмерного пространства: обе системы могут быть получены из гамильтониана четырехмерного осциллятора посредством редукции по действию группы $U(1)$ [6]. Аналогичным образом может быть построен пятимерный аналог задачи МИКЗ–Кеплера, в котором вместо дираковского диона фигурирует $SU(2)$ -монополь Янга [7]: он получается гамильтоновой редукцией восьмимерного осциллятора по действию группы $SU(2)$. В двумерном случае также возможно построение аналога системы МИКЗ–Кеплера из осциллятора: для этого необходимо осуществить редукцию двумерного (квантового) осциллятора по действию группы $\mathbb{Z}_2$. В построенной таким образом системе аналогом монополя Дирака является квантованный магнитный поток, порождающий в системе спин $1/2$ ($\mathbb{Z}_2$ -монополь) [8]. Отмеченные процедуры редукции тесным образом связаны с отображениями Хопфа (см., например, [9]). Для подробного ознакомления с квантово-механическими аспектами этих вопросов читатель может обратиться к [10].

Системы МИКЗ–Кеплера на трехмерной сфере [11], дву-, трех- и пятимерных двуполостных гиперболоидах [12], равно как и их обобщения на произвольные высшие размерности [13], также имеют множество прямых аналогий с соответствующими кулоновскими системами. К примеру, аналогично плоскому случаю единствен-

ным различием между их квантово-механическими свойствами является сдвиг вверх допустимых значений орбитального квантового числа, что, в свою очередь, приводит к вырождению основного состояния. В действительности, любая трехмерная сферически-симметричная система (без монополей) сохраняет свои основные свойства после включения дираковского монополя в центр координатной системы при следующей модификации потенциала:

$$U(r) \rightarrow U(r) + \frac{s^2}{2Gr^2}, \quad (1)$$

где $G(r)$ есть конформно-плоская метрика конфигурационного пространства, т.е. $ds^2 = G(r)(d\mathbf{r})^2$. В частности, вид траекторий $\varphi = \varphi(r)$ остается неизменным при такой модификации задачи, в то время как орбитальная плоскость уже не будет ортогональной вектору орбитального момента: угол между ними определяется выражением $\cos \theta = s/J$ [9]. Квантово-механический спектр системы с монополем отличается от спектра исходной системы (без монополя) лишь областью допустимых значений орбитального и магнитного квантовых чисел j, m : $j = |s|, |s| + 1, \dots$, $m = -j, -j + 1, \dots, j$ [14].

Задача о движении частицы в поле двух кулоновских центров (двухцентровая задача Кеплера) была решена Якоби в середине XIX века. Им была установлена интегрируемость двухцентровой задачи Кеплера и ее предельного случая, когда один из силовых центров расположен в бесконечно удаленной точке (мы будем называть такую систему системой Кеплера–Штарка) в эллиптических и параболических координатах соответственно. Однако обобщение этих задач на случай замены кулоновских центров дионами не было известно до последнего времени. В нашей работе с Кривоносом [15] была предложена добавка к потенциалу, обобщающая подстановку (1) при наделении N силовых центров магнитными зарядами дионами (монополями):

$$U(\mathbf{r}) \rightarrow \frac{1}{2G} \left(\frac{s_1}{r_1} + \dots + \frac{s_n}{r_n} \right)^2 + U(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Здесь $s_i = eg_i$, $r_i = |\mathbf{r} - \mathbf{a}_i|$, а g_i – магнитный заряд i -го монополя, локализованного в точке с координатами $\mathbf{a}_i$.

Преобразование (2) имеет следующие важные особенности.

1. Система (без монополей), допускающая разделение переменных в эллиптических (параболических) координатах, сохраняет данное свойство при введении монополей в фокусы соответствующих координатных систем при одновременной замене потенциала согласно правилу (2).

2. Система допускает $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричное расширение при следующем выборе потенциала:

$$U_0 = \frac{\kappa}{G} \left(\sum_I \frac{g_I}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}_i|} + \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{r} \right) + \frac{\kappa^2}{2G}. \quad (3)$$

Соответствующая суперсимметричная система была построена Ивановым и Лехтенфельдом [16].

Итак, в евклидовом пространстве подстановка (2) приводит к следующему обобщению многоцентральной кулоновской системы, описывающей движение частицы с зарядом e в поле N неподвижных дираковских дионов:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{p} - \sum_{i=1}^N eg_i \mathbf{A}_D(\mathbf{r} - \mathbf{a}_i) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \frac{eg_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}_i|} \right)^2 + \sum_{i=1}^N \frac{eq_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}_i|}, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{A}_D(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{n}}{r(r - \mathbf{n}\mathbf{r})}$$

есть векторный потенциал дираковского монополя, $g_i(q_i)$ – магнитный (электрический) заряд i -го диона, а $\mathbf{n}_i$ – единичный вектор, направленный вдоль оси сингулярности. Поскольку двухцентровые системы Кеплера (Кеплера–Штарка) допускают разделение переменных в эллиптических (параболических) координатах, то приведенное выше выражение при $N = 2$ приводит к интегрируемой двухцентральной системе МИКЗ–Кеплера. Более того, когда отношение величин электрических и магнитных зарядов имеет одинаковое значение для всех дионов (т.е. подчиняется тривиальному условию квантования зарядов Дирака–Швингера–Цванцигера), потенциал системы (4) принадлежит классу (3). Это означает, что система допускает $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричное расширение. Однако даже классические траектории двухцентральной системы МИКЗ–Кеплера не были исследованы в работе [15]. Кроме того, подстановка (2) имеет следующий явный недостаток: она неприменима к системам типа МИКЗ–Кеплера на сфере и гиперboloиде. Именно, обобщая одно- и двухцентровые системы Кеплера на сфере и гиперboloиде согласно правилу (2), мы приходим к системам, неразделяемым априори в тех же системах координат, что исходные системы. К тому же они не будут принадлежать к классу систем, допускающих $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричные расширения.

Именно эти вопросы обсуждаются в настоящей работе.

В разделе 2 дано детальное описание двухцентральной системы МИКЗ–Кеплера и системы МИКЗ–Кеплера–Штарка и приведены их классические решения. В разделе 3 представлена альтернативная модель многоцентральной системы МИКЗ–Кеплера на трехмерных сфере и гиперboloиде, а также на произвольном $so(3)$ -инвариантном пространстве.

2. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ДВУХЦЕНТРОВОЙ СИСТЕМЫ МИКЗ–КЕПЛЕРА

Докажем классическую интегрируемость двухцентральной системы МИКЗ–Кеплера и построим ее решения. Пусть два диона с магнитными (электрическими) зарядами $g_{1,2}$ и $q_{1,2}$ зафиксированы на оси z в точках с координатами $(0, 0, -a)$ и $(0, 0, a)$ соответственно. Выбрав подходящую калибровку для векторного потенциала монополя в сферических координатах,

$$A_r^{1,2} = A_\theta^{1,2} = 0, \quad A_\varphi^{1,2} = g_{1,2} \cos \theta_{1,2},$$

мы получим следующий гамильтониан:

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2} + \frac{(p_\varphi - s_1 \cos \theta_1 - s_2 \cos \theta_2)^2}{2r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{2} \left(\frac{s_1}{r_1} + \frac{s_2}{r_2} \right)^2 + \frac{eq_1}{r_1} + \frac{eq_2}{r_2}. \quad (5)$$

Благодаря наличию дополнительного потенциального члена система допускает разделение переменных в эллиптических координатах

$$\xi = \frac{r_1 + r_2}{2a}, \quad \eta = \frac{r_1 - r_2}{2a}, \quad \varphi = \varphi.$$

Используя общие кинематические соотношения, следующие из геометрии задачи,

$$\begin{aligned} r_1 \sin \theta_1 &= r \sin \theta, & r_2 \sin \theta_2 &= r \sin \theta, \\ \cos(\theta_1 - \theta_2) &= \frac{4a^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2}, \\ \cos \theta_1 &= \frac{r \cos \theta + a}{r_1}, & \cos \theta_2 &= \frac{r \cos \theta - a}{r_2}, \end{aligned}$$

мы получаем следующее выражение для гамильтониана (5):

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2a^2(\xi^2 - \eta^2)}((\xi^2 - 1)p_\xi^2 + (1 - \eta^2)p_\eta^2 + \mathcal{V}(\xi) + \mathcal{W}(\eta)),$$

где

$$\mathcal{V}(\xi) = \frac{p_\varphi^2 + s_+^2 - 2p_\varphi s_- \xi}{\xi^2 - 1} + 2aeq_+ \xi, \quad \mathcal{W}(\eta) = \frac{p_\varphi^2 + s_-^2 - 2p_\varphi s_+ \eta}{1 - \eta^2} + 2aeq_- \eta, \quad (6)$$

а также $q_\pm = q_1 \pm q_2$, $s_\pm = s_1 \pm s_2$. Выбрав производящую функцию системы вида $S = \varphi p_\varphi + S_1(\xi) + S_2(\eta) - Et$, мы получим следующие уравнения Гамильтона–Якоби:

$$\begin{aligned} (\xi^2 - 1) \left(\frac{dS_1}{d\xi} \right)^2 + \mathcal{V}(\xi) - 2a^2 E(\xi^2 - 1) &= n, \\ (1 - \eta^2) \left(\frac{dS_2}{d\eta} \right)^2 + \mathcal{W}(\eta) - 2a^2 E(1 - \eta^2) &= -n, \end{aligned} \quad (7)$$

где n есть константа разделения, задающая значение интеграла движения

$$\mathcal{I}_e = -\frac{1}{\xi^2 - \eta^2}(\eta^2((\xi^2 - 1)p_\xi^2 + \mathcal{V}(\xi)) + \xi^2((1 - \eta^2)p_\eta^2 - \mathcal{W}(\eta))).$$

Далее, интегрируя уравнения (7), мы получаем выражение для производящей функции системы

$$\begin{aligned} S &= p_\varphi \varphi - Et + \int \sqrt{2a^2 E + \frac{n - 2aeq_+ \xi}{\xi^2 - 1} - \frac{p_\varphi^2 + s_+^2 - 2p_\varphi s_- \xi}{(\xi^2 - 1)^2}} d\xi + \\ &+ \int \sqrt{2a^2 E - \frac{n + 2aeq_- \eta}{1 - \eta^2} - \frac{p_\varphi^2 + s_-^2 - 2p_\varphi s_+ \eta}{(1 - \eta^2)^2}} d\eta. \end{aligned}$$

Итак, мы доказали интегрируемость классической двухцентровой задачи МИКЗ–Кеплера.

Чтобы найти классические решения системы, необходимо продифференцировать производящую функцию по интегралам движения, $\partial S / \partial p_\varphi$, $\partial S / \partial n$, $\partial S / \partial E$, и положить полученные выражения равными константам (без потери общности мы примем

их равными нулю). В результате мы получим классические траектории системы, задаваемые выражениями

$$\int \frac{d\xi}{(\xi^2 - 1)\sqrt{2a^2E + (n - \mathcal{V}(\xi))/(\xi^2 - 1)}} = \int \frac{d\eta}{(1 - \eta^2)\sqrt{2a^2E - (n + \mathcal{W}(\eta))/(1 - \eta^2)}},$$

$$\varphi = \int \frac{(p_\varphi - s_- \xi) d\xi}{(\xi^2 - 1)^2 \sqrt{2a^2E + (n - \mathcal{V}(\xi))/(\xi^2 - 1)}} +$$

$$+ \int \frac{(p_\varphi - s_+ \eta) d\eta}{(1 - \eta^2)^2 \sqrt{2a^2E - (n + \mathcal{W}(\eta))/(1 - \eta^2)}},$$

и временную эволюцию системы, задаваемую выражением

$$t = a^2 \int \frac{d\xi}{\sqrt{2a^2E + (n - \mathcal{V}(\xi))/(\xi^2 - 1)}} + a^2 \int \frac{d\eta}{\sqrt{2a^2E - (n + \mathcal{W}(\eta))/(1 - \eta^2)}},$$

где t есть время, а $\mathcal{V}(\xi)$ и $\mathcal{W}(\eta)$ определены выражениями (6).

2.1. Система МИКЗ–Кеплера–Штарка–Зеемана. Описанная выше система обладает важным предельным случаем. Поместив один из дионов в бесконечно удаленную точку, мы получим гамильтониан заряженной частицы, движущейся в поле фиксированного диона при наличии однородных электрического и магнитного полей:

$$\mathcal{H} = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A}_D - e\mathbf{B} \times \mathbf{r}/2)^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{r} + e\mathbf{B}\mathbf{r} \right)^2 + \frac{eq}{r} - e\mathcal{E}\mathbf{r}, \quad \mathcal{E} \parallel \mathbf{B}.$$

Из-за наличия постоянных однородных электрического и магнитного полей мы будем называть эту систему системой МИКЗ–Кеплера–Штарка–Зеемана. Как и в предыдущем случае, мы имеем дело с интегрируемой системой: представленная система допускает разделение переменных в параболических координатах. Чтобы продемонстрировать это, перейдем сначала к сферическим координатам, в которых вектор-потенциал постоянного однородного магнитного поля, направленного вдоль оси z , имеет вид

$$A_r = A_\theta = 0, \quad A_\varphi = \frac{1}{2} B r^2 \sin^2 \theta.$$

В этих координатах гамильтониан запишется следующим образом:

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2} + \frac{(p_\varphi - s \cos \theta - \frac{1}{2} e B r^2 \sin^2 \theta)^2}{2r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{r} + e B z \right)^2 + \frac{eq}{r} - e\mathcal{E}z.$$

Благодаря дополнительному потенциальному члену, возникающему из МИКЗ-подстановки, уравнение Гамильтона–Якоби допускает разделение переменных в параболических координатах

$$\xi = r + z, \quad \eta = r - z.$$

В этих координатах гамильтониан принимает вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2(\xi + \eta)} (4\xi p_\xi^2 + 4\eta p_\eta^2 + \mathcal{V}(\xi) + \mathcal{W}(\eta)) - \frac{1}{2} p_\varphi e B, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\xi) &= \frac{(p_\varphi + s)^2}{\xi} + 3seB\xi - e\mathcal{E}\xi^2 + \frac{e^2B^2}{4}\xi^3 + 2eq, \\ \mathcal{W}(\eta) &= \frac{(p_\varphi - s)^2}{\eta} - 3seB\eta + eE\eta^2 + \frac{e^2B^2}{4}\eta^3 + 2eq.\end{aligned}\quad (9)$$

Выбрав производящую функцию вида $S = \varphi p_\varphi + S_1(\xi) + S_2(\eta) - (E - p_\varphi eB/2)t$, мы получим следующую систему уравнений Гамильтона–Якоби:

$$4\xi\left(\frac{dS_1}{d\xi}\right)^2 + \mathcal{V}(\xi) - 2E\xi = n, \quad 4\eta\left(\frac{dS_2}{d\eta}\right)^2 + \mathcal{W}(\eta) - 2E\eta = -n. \quad (10)$$

Здесь, как обычно, n обозначает константу разделения, фиксирующую значения интеграла движения, ответственного за разделение переменных. Его явное выражение легко находится из уравнений (8) и (10):

$$\mathcal{I}_p = \frac{1}{\xi + \eta} (4\xi\eta(p_\xi^2 - p_\eta^2) + \eta\mathcal{V}(\xi) - \xi\mathcal{W}(\eta)).$$

Интегрируя уравнения Гамильтона–Якоби, получим следующий вид производящей функции:

$$\begin{aligned}S &= \varphi p_\varphi - \left(E - \frac{1}{2}p_\varphi B\right)t + \\ &+ \frac{1}{2} \int \sqrt{2E - 3seB - \frac{(p_\varphi + s)^2}{\xi^2} + \frac{n - 2eq}{\xi} + e\mathcal{E}\xi - \frac{e^2B^2}{4}\xi^2} d\xi + \\ &+ \frac{1}{2} \int \sqrt{2E + 3seB - \frac{(p_\varphi - s)^2}{\eta^2} - \frac{n + 2eq}{\eta} - e\mathcal{E}\eta - \frac{e^2B^2}{4}\eta^2} d\eta.\end{aligned}$$

Итак, мы доказали интегрируемость классической системы МИКЗ–Кеплера–Штарка–Зеемана. Из приведенного вида производящей функции находим выражения для траекторий системы:

$$\begin{aligned}\int \frac{d\xi}{\xi \sqrt{2E + (n - \mathcal{V}(\xi))/\xi}} &= \int \frac{d\eta}{\eta \sqrt{2E - (n + \mathcal{W}(\eta))/\eta}}, \\ \varphi &= \frac{1}{2}Bt + \frac{1}{2} \int \frac{(p_\varphi + s) d\xi}{\xi \sqrt{2E + (n - \mathcal{V}(\xi))/\xi}} + \frac{1}{2} \int \frac{(p_\varphi - s) d\eta}{\eta \sqrt{2E - (n + \mathcal{W}(\eta))/\eta}},\end{aligned}$$

и ее временной эволюции

$$t = \int \frac{d\xi}{\sqrt{2E + (n - \mathcal{V}(\xi))/\xi}} + \int \frac{d\eta}{\sqrt{2E - (n + \mathcal{W}(\eta))/\eta}},$$

где $\mathcal{V}(\xi)$ и $\mathcal{W}(\eta)$ определены выражениями (9).

3. МНОГОЦЕНТРОВЫЕ СИСТЕМЫ МИКЗ–КЕПЛЕРА НА ИСКРИВЛЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Как было отмечено в разделе 1, любая система (на конформно-плоском пространстве) без монополей, допускающая разделение переменных в эллиптических

(параболических) координатах, сохраняет это свойство после введения магнитных монополей, сопровождаемого модификацией потенциальных членов, согласно выражению (2). Двухцентровая система МИКЗ–Кеплера, рассмотренная в разделе 2, является частным примером такой системы. Однако эта схема включения монополей в механические системы оказывается непригодной для кулоновских систем на сферах и псевдосферах (двуполостных гиперboloидах). Из-за наличия скрытой симметрии, связанной с сохранением вектора Рунге–Ленца, переменные в кулоновской системе (в евклидовом пространстве) разделяются в сферических, эллиптических и параболических координатах. Кулоновские системы на псевдосферах также обладают скрытой симметрией, связанной с сохранением аналога вектора Рунге–Ленца. Аналогично евклидовому случаю эта скрытая симметрия приводит к разделению переменных сразу в нескольких координатных системах. В плоском пределе эти координатные системы переходят в сферическую, эллиптическую и параболическую системы координат. При этом связь между сферическими и евклидовыми координатами на сфере такая же, как и для евклидова пространства, в то время как для эллиптических и параболических координат нет полной аналогии с евклидовым случаем (см. [17] и приведенные там ссылки). Следовательно, утверждение из раздела 2 о разделении переменных в МИКЗ–расширенных системах неприменимо к кулоновским системам на псевдосферах. Более того, есть основания полагать, что замена потенциала (2) плохо определена на неевклидовых пространствах, включая псевдосферы. В пользу этого свидетельствуют следующие доводы. Когда магнитные и электрические заряды дионов подчиняются тривиальному условию Дирака–Швингера–Цванцигера

$$g_i q_j - g_j q_i = 0, \quad (11)$$

потенциал евклидовой многоцентральной системы МИКЗ–Кеплера принадлежит (с точностью до несущественной константы) классу потенциалов (3), допускающих $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричные расширения. Однако потенциал многоцентральной кулоновской системы на псевдосфере

$$U(\mathbf{r}) = e\phi_{q_1, \dots, q_N} = e \sum_{i=1}^N q_i \phi(r_i), \quad \phi(r) = \frac{1}{2r_0} \frac{1 - \epsilon r^2}{r}, \quad r_i = |\mathbf{r} - \mathbf{a}_i|, \quad (12)$$

не принадлежит классу (3). Здесь $\epsilon = 1$ соответствует случаю сферы, $\epsilon = -1$ – случаю псевдосферы, в то время как элемент длины выглядит следующим образом:

$$ds^2 = \frac{4r_0^2 (d\mathbf{r})^2}{(1 + \epsilon r^2)^2}. \quad (13)$$

Заметим, что (одноцентральный) кулоновский потенциал на евклидовом пространстве, на сфере и псевдосфере есть не что иное как $so(3)$ -инвариантная функция Грина оператора Лапласа, определенного согласно соответствующей метрике, $\Delta_g \phi_C = \delta(\mathbf{r})$, тогда как векторный потенциал дираковского монополя представляет собой 1-форму, дуальную этой функции Грина:

$$*d\mathbf{A}_D = -d\phi_C \Rightarrow \Delta\phi_C = \delta(\mathbf{r}), \quad \Delta \equiv *d*d + d*d*. \quad (14)$$

Учитывая соотношения дуальности между векторами и 1- и 2-формами на трехмерных пространствах, можно представить соотношения (14) в следующем виде:

$$-\nabla\phi_C = \text{rot } \mathbf{A}_D \Rightarrow \Delta\phi_C = \delta(\mathbf{r}).$$

Выпишем явные $so(3)$ -инвариантные решения этих уравнений на $so(3)$ -инвариантном пространстве с метрикой $ds^2 = G(r)(d\mathbf{r})^2$. Поскольку поля форм не зависят от метрики, можно выбирать их в виде

$$d\mathbf{A}_D(\mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{r} \times d\mathbf{r}) \wedge d\mathbf{r}}{2r^3}, \quad d\phi(r) = \frac{d\phi(r)}{dr} \frac{\mathbf{r} d\mathbf{r}}{r}.$$

Затем, принимая во внимание, что метрика пространства конформно-плоская и учитывая $so(3)$ -инвариантность ϕ_C , из выражений (14) получаем:

$$\frac{d\phi_C}{dr} = -\frac{1}{r^2\sqrt{G(r)}} \Rightarrow \phi_C = -\int \frac{dr}{r^2\sqrt{G(r)}}.$$

В частности, для евклидова пространства ($G = 1$) получаем потенциал $\phi_C = 1/r$, а для псевдосферы (13) – потенциал (12).

Теперь определим многоцентровую систему МИКЗ–Кеплера на произвольном $so(3)$ -инвариантном трехмерном пространстве посредством следующего гамильтониана:

$$\mathcal{H} = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A}_{g_1, \dots, g_N})^2}{2G} + \frac{e^2\phi_{g_1, \dots, g_N}^2}{2} + e\phi_{q_1, \dots, q_N}, \quad (15)$$

где $\mathbf{A}_{g_1, \dots, g_N} = \sum_i g_i \mathbf{A}_D(\mathbf{r} - \mathbf{a}_i)$, $\phi_{q_1, \dots, q_N} = \sum_i q_i \phi_C(r_i)$. Соответствующий одноцентровый гамильтониан на сфере и двуполостном гиперболоиде с точностью до несущественной константы $\epsilon s^2/(4r_0^2)$ совпадает с гамильтонианом системы МИКЗ–Кеплера, построенным согласно правилу (1). Следовательно, он допускает разделение переменных в сферических координатах, а также в модифицированных эллиптических и параболических координатах, рассмотренных в [17]. Похоже, что двухцентровые системы МИКЗ–Кеплера на сфере и псевдосфере также допускают разделение переменных в этих координатах.

Когда электрические и магнитные заряды всех дионов удовлетворяют условию (11) или, эквивалентно, $q_i/g_i = \epsilon\kappa$, гамильтониан может быть представлен в следующем виде:

$$\mathcal{H} = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A}_{g_1, \dots, g_N})^2}{2G} + \frac{e^2(\phi_{g_1, \dots, g_N} + \kappa/e)^2}{2} - \frac{\kappa^2}{2},$$

где $\text{grad}(\phi_{g_1, \dots, g_N} + \kappa/e) = -\text{rot } \mathbf{A}_{g_1, \dots, g_N}$. Такой гамильтониан допускает $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричное расширение как в евклидовом пространстве [16], так и на сфере [18] (если опустить константу $\kappa^2/2$). Насколько нам известно, пока не получено суперсимметричного расширения этой системы для произвольного конформно-плоского пространства. Однако можно надеяться, что знание явных компонентных выражений для суперзарядов $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной системы МИКЗ–Кеплера на сфере позволит предсказать вид суперсимметричной системы для произвольного конформно плоского случая.

Благодарности. Мы признательны С. Кривоносу за сотрудничество на начальном этапе работы и за то, что он обратил наше внимание на свою работу по суперсимметричной механике с монополем на сфере [18]. Это позволило нам предложить обобщение системы МИКЗ–Кеплера на искривленные пространства, заданное гамильтонианом (15). Мы благодарны Г. Погосяну, отметившему, что кулоновский потенциал на сфере является функцией Грина соответствующего оператора Лапласа; Т. Акопяну и В. Мхитаряну за полезные обсуждения и интерес к работе, а также организаторам конференции “Классические и квантовые интегрируемые системы” за приглашение и оказанное гостеприимство. Данная работа частично поддержана NFSAT-CRDF (грант № ARP1-3228-YE-04) и INTAS (грант № 05-7928).

Список литературы

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*. Т. I: *Механика*, Наука, М., 1973.
- [2] E. Schrödinger, *Proc. R. Ir. Acad. Sect. A*, **46** (1940), 9–16; **46** (1941), 183–206.
- [3] D. Zwanziger, *Phys. Rev.*, **176**:5 (1968), 1480–1488; H. McIntosh, A. Cisneros, *J. Math. Phys.*, **11**:3 (1970), 896–916.
- [4] P. A. M. Dirac, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **133** (1931), 60–72.
- [5] A. Nersessian, V. Ter-Antonian, *Modern Phys. Lett. A*, **9**:26 (1994), 2431–2435.
- [6] T. Iwai, Y. Uwano, *J. Math. Phys.*, **27**:6 (1986), 1523–1529; I. M. Mladenov, V. V. Tsanov, *J. Phys. A*, **20**:17 (1987), 5865–5871; *J. Phys. A*, **32**:20 (1999), 3779–3791.
- [7] T. Iwai, *J. Geom. Phys.*, **7**:4 (1990), 507–535; L. G. Mardoyan, A. N. Sissakian, V. M. Ter-Antonyan, *ЯФ*, **61**:10 (1998), 1859–1863.
- [8] A. Nersessian, V. Ter-Antonian, M. M. Tsulaia, *Modern Phys. Lett. A*, **11**:19 (1996), 1605–1610.
- [9] A. Nersessian, “Elements of (super-)Hamiltonian formalism”, *Supersymmetric Mechanics*, V. 1, *Supersymmetry, noncommutativity and matrix models*, Lecture Notes in Phys., **698**, Springer, Berlin, 2006, 139–188; [arXiv: hep-th/0506170](#).
- [10] V. Ter-Antonyan, *Dyon-oscillator duality*, [arXiv: quant-ph/0003106](#); *Quantum systems with hidden symmetry*, Lectures given at BLTP International School on Symmetries and Integrable Systems (Dubna, Russia, 8–11 June 1999), eds. L. G. Mardoyan, G. S. Pogosyan, A. N. Sissakian, V. M. Ter-Antonyan, MAIK Publ., Moscow, 2006.
- [11] V. V. Gritsev, Yu. A. Kurochkin, V. S. Otchik, *J. Phys. A*, **33**:27 (2000), 4903–4910.
- [12] A. Nersessian, G. Pogosyan, *Phys. Rev. A*, **63**:2 (2001), 020103; A. Nersessian, *ЯФ*, **65** (2002), 1103–1108; [arXiv: math-ph/0010049](#).
- [13] Guowu Meng, *J. Math. Phys.*, **48**:3 (2007), 032105; [arXiv: math-ph/0507028](#).
- [14] L. Mardoyan, A. Nersessian, A. Yeranyan, *Phys. Lett. A*, **366**:1–2 (2007), 30–35.
- [15] S. Krivonos, A. Nersessian, V. Ohanyan, *Phys. Rev. D*, **75**:8 (2007), 085002.
- [16] E. Ivanov, O. Lechtenfeld, *JHEP*, **09**:9 (2003), 073.
- [17] A. A. Bogush, V. S. Otchik, V. M. Red'kov, “The Runge–Lenz vector for quantum Kepler problem in the space of positive constant curvature and complex parabolic coordinates”, *Non-Euclidean Geometry in Modern Physics*, Proc. of 5th International Conference Bolyai–Gauss–Lobachevsky (10–13 Oct. 2006), Minsk, Belarus, 135–144; <http://dragon.bas-net.by/bg15/runge.pdf>; [arXiv: hep-th/0612178](#).
- [18] S. Bellucci, S. Krivonos, *Phys. Rev. D*, **74**:12 (2006), 125024.