Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Пенской, Интегрируемые системы и топология изо-
спектральных многообразий, *ТМФ*, 2008, том 155, но-
мер 1, 140–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6199>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 05:00:24

© 2008 г.

А. В. Пенской*

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ И ТОПОЛОГИЯ ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Приводится краткий обзор известных результатов, касающихся исследования топологии изоспектральных многообразий с помощью интегрируемых систем. Затем излагаются новые результаты, касающиеся топологии изоспектрального многообразия матриц Якоби с нулевой диагональю. Эта топология изучается с помощью системы Вольтерра.

Ключевые слова: интегрируемые системы, изоспектральные многообразия, система Вольтерра.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим симплектическое многообразие (X^{2n}, ω) и интегрируемую систему с гамильтонианом H и инволютивными интегралами $F_1 = H, F_2, \dots, F_n$. Пусть $X_F \subset X$ – подмножество, заданное уравнениями $F_1 = k_1, \dots, F_n = k_n$, где k_i – константы. Подмножество X_F является подмногообразием для $k_1, \dots, k_n$ в общем положении. Это подмногообразие называется поверхностью уровня интегралов. Хорошо известная теорема Лиувилля–Арнольда [1] утверждает, что если X_F компактно и связно, то это тор. Это делает изучение топологии X_F тривиальным. Тем не менее оказывается, что в некоторых важных примерах интегрируемых систем такое подмногообразие компактно, но его топология весьма сложна. Это происходит по причине того, что в этих примерах фазовое пространство X содержит точки, в которых либо гамильтониан H сингулярен, либо симплектическая форма ω сингулярна или вырожденна. В таких ситуациях теорема Лиувилля–Арнольда не применима. Тем не менее иногда можно определить соответствующий поток на всем подмногообразии X_F и использовать его для исследования топологии X_F .

Например, это возможно, если интегрируемая система имеет представление Лакса $dL/dt = [L, A]$. Ясно, что соответствующий поток определен на всем подмногообразии X_F , которое в этом случае является изоспектральным многообразием матриц Лакса L , определенным уравнениями $\text{tr } L^i = k_i$. Это естественным образом приводит нас к идее исследования топологии изоспектральных многообразий матриц

*Независимый московский университет; Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия. E-mail: penskoi@mccme.ru

Лакса L с использованием интегрируемых потоков $dL/dt = [L, A]$. Оказывается, что в некоторых примерах топология этих изоспектральных многообразий достаточно интересна, чтобы ее изучать.

2. ТОПОЛОГИЯ ИЗОСПЕКТРАЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ МАТРИЦ ЯКОБИ

Первый пример интересного спектрального многообразия был описан Томеи в 1984 г. в работе [2], где была исследована топология изоспектрального многообразия J_n ($n \times n$)-матриц Якоби (т.е. вещественных трехдиагональных симметрических матриц)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

Это поверхность уровня интегралов (незамкнутой) цепочки Тоды

$$\dot{a}_i = 2(b_i^2 - b_{i-1}^2), \quad i = 1, \dots, n, \quad \dot{b}_i = b_i(a_{i+1} - a_i), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad b_0 = b_n = 0.$$

Используя поток Тоды, Томеи вычислил эйлерову характеристику этого многообразия

$$\chi(J_n) = (-1)^{n+1} \frac{B_{n+1} 2^{n+1} (2^{n+1} - 1)}{n+1}, \quad (1)$$

где B_k обозначает k -е число Бернулли, определенное как в [3]. Томеи также описал структуру CW-комплекса для фактора этого многообразия по действию дискретной группы симметрий.

Двумя годами позже Фрид обнаружил [4], что стабильная и нестабильная стратификации, определенные потоком Тоды, являются клеточными комплексами. Используя этот факт, он нашел числа Бетти этого изоспектрального многообразия.

Пусть $\pi \in S_n$ – перестановка. Напомним, что интервал $[i, i+1]$ такой, что $\pi(i) < \pi(i+1)$, называется подъемом. Число перестановок из n элементов с k подъемами называется числом Эйлера и обозначается $\langle \frac{n}{k} \rangle$ [3]. Это важный комбинаторный объект.

Фрид доказал [4], что число Бетти b_k равно $\langle \frac{n}{k} \rangle$. Он также описал умножение в кольце когомологий.

Это красивое сочетание хорошо известной интегрируемой системы, нетривиальной топологии и комбинаторики делает исследование этого изоспектрального многообразия интересным.

3. ТОПОЛОГИЯ ИЗОСПЕКТРАЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ МАТРИЦ ЯКОБИ С НУЛЕВОЙ ДИАГОНАЛЬЮ

В недавнем коротком сообщении [5] были анонсированы новые результаты, касающиеся изоспектрального многообразия матриц Якоби с нулевой диагональю. Изложим эти результаты в деталях.

Рассмотрим многообразие M_k всех $(k \times k)$ -матриц с фиксированным спектром вида

$$L = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & c_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{k-1} \\ 0 & \dots & 0 & c_{k-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. 1. Собственные числа L имеют вид 0 (если k нечетно), $\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \dots$.

2. Если все собственные числа различны, то M_k – компактное гладкое многообразие, и его топология не зависит от собственных чисел.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая все четные строки и столбцы $L - \lambda I$ на -1 , мы получим $-L - \lambda I$. Поэтому $\det(L - \lambda I) = \det(-L - \lambda I)$, откуда следует первое утверждение. Доказательство второго утверждения аналогично доказательству подобного утверждения для изоспектрального многообразия матриц Якоби, предложенному Томи [2].

Многообразие M_k является поверхностью уровня интегралов (незамкнутой) системы Вольтерра

$$\dot{c}_i = \frac{1}{2}c_i(c_{i+1}^2 - c_{i-1}^2), \quad c_0 = c_k = 0.$$

Обычно эта система записывается в переменных $u_i = c_i^2$. Хорошо известно, что система Вольтерра может быть записана в лаксовой форме $\dot{L} = [L, A(L)]$, откуда следует, что поток Вольтерра сохраняет спектр L , т.е. является потоком на M_k .

Система Вольтерра интегрируемая, что было доказано в 1974 г. Манаковым [6] и годом позже независимо Кацем и ван Мёрбеке [7]. Хорошо известно, что система Вольтерра является бигамильтоновой (см., например, книгу [8]).

Оказывается, что с точки зрения топологии имеются два различных случая, зависящих от четности k .

Пусть $P_k(c_1, \dots, c_{k-1}, \lambda) = \det(L - \lambda I)$ – характеристический многочлен $(k \times k)$ -матрицы L вида (2). Например, $P_2(c_1, \lambda) = \lambda^2 - c_1^2$. Мы будем говорить, что множество $J \subset \{1, \dots, k-1\}$ является вполне несвязным, если J не содержит двух последовательных целых чисел i и $i+1$. Пусть $I_0 = 1$ и $I_l = \sum c_{i_1}^2 \dots c_{i_l}^2$, $l \geq 1$, где суммирование проводится по всем $i_1 < \dots < i_l$ таким, что множество $\{i_1, \dots, i_l\}$ вполне несвязно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. 1. В четном ($k = 2l$) случае

$$P_{2l}(c_1, \dots, c_{2l-1}, \lambda) = \sum_{i=0}^l (-1)^i \lambda^{2l-2i} I_i.$$

2. В нечетном ($k = 2l + 1$) случае

$$P_{2l+1}(c_1, \dots, c_{2l}, \lambda) = \sum_{i=0}^l (-1)^{i+1} \lambda^{2l+1-2i} I_i.$$

3. Многообразие M_k задано уравнениями $I_i = k_i$, $i = 0, \dots, l$, где k_i — константы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разлагая $\det(L - \lambda I)$ по последней строке и последнему столбцу, мы получим рекуррентную формулу

$$P_N(c_1, \dots, c_{N-1}, \lambda) = -\lambda P_{N-1}(c_1, \dots, c_{N-2}, \lambda) - c_{N-1}^2 P_{N-2}(c_1, \dots, c_{N-3}, \lambda).$$

Используя эту формулу и тождества $P_1(\lambda) = -\lambda$ и $P_2(c_1, \lambda) = \lambda^2 - c_1^2$, по индукции получаем утверждение предложения.

Заметим, что формулы для I_i аналогичны формулам, полученным в работе [9] для периодической системы Вольтерра.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. 1. В четном ($k = 2l$) случае M_k имеет 2^l изоморфных компонент связности. Более того, каждая компонента изоморфна изоспектральному многообразию матриц Якоби.

2. В нечетном ($k = 2l + 1$) случае многообразие M_k связно.

3. Многообразие M_k компактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $k = 2l$, то $I_l = c_1^2 c_3^2 \dots c_{2l-1}^2 \neq 0$, потому что все собственные числа различны (см. предложение 1). Из этого следует, что M_k имеет по крайней мере 2^l компонент, определяющихся l значениями $\operatorname{sgn} c_{2i-1}$, $i = 1, \dots, l$. Доказательство того, что каждая из этих компонент связна, схоже с предложенным Томеи доказательством того, что изоспектральное многообразие матриц Якоби связно.

Существует хорошо известное отображение [10], [11]

$$a_i = \frac{1}{2} c_i (c_{i+1}^2 - c_{i-1}^2), \quad b_i = -\frac{1}{2} c_{2i} c_{2i-1},$$

переводящее решения системы Вольтерра в решения цепочки Тоды. Если $k = 2l$, то легко проверить, что это отображение — изоморфизм между каждой связной компонентой многообразия M_k и соответствующим изоспектральным многообразием матриц Якоби. Это завершает доказательство первого утверждения.

Доказательство утверждений 2 и 3 сходно с предложенным Томеи [2] доказательством того, что изоспектральное многообразие матриц Якоби связно и компактно.

Предложение 3 сводит изучение топологии M_k в четном случае к исследованию уже известной топологии изоспектрального многообразия матриц Якоби, изучавшегося Томеи и Фридом. Рассмотрим только нечетный случай.

В настоящее время неясно, как вычислять группы гомологий. Стабильная и нестабильная стратификации не являются клеточными комплексами в этом случае, и невозможно применить прямой подход, подобный подходу Фрида [4]. Отметим также, что в 1992 г. Блох, Брокетт и Ратью [12] использовали идею двойного скобочного представления, чтобы показать, что цепочка Тоды является градиентным потоком. В 1998 г. мы показали [13], что поток Вольтерра также является градиентным потоком. Это естественным образом приводит к идее нахождения группы гомологий с помощью комплекса Морса. К сожалению, это невозможно, так как стабильная и нестабильная стратификации не трансверсальны друг другу. Вопрос вычисления групп гомологий в нечетном случае остается открытым, насколько это известно автору. В настоящей работе мы вычисляем эйлерову характеристику многообразия M_k , используя поток Вольтерра, так, как это было анонсировано в работе [5]. Предлагаемый подход близок к подходу Томеи [2], но комбинаторика точек равновесия потока Вольтерра и их индексов гораздо сложнее.

Пусть $K = (1/4) \operatorname{diag}(1, 2, 3, \dots)$ и $f(L) = \operatorname{tr} KL^2$. Доказано [13], что (отрицательный) градиентный поток $f(L)$ относительно некоторой метрики (сконструированной в явном виде в работе [13]) совпадает с потоком Вольтерра. Выберем λ_i (см. предложение 1) таким образом, что все $\lambda_i > 0$ и $\lambda_i > \lambda_{i+1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. 1. Критические точки $f(L)$ на M_{2l+1} находятся во взаимно однозначном соответствии с тройками $[j, s, \pi]$, состоящими из числа j , $0 \leq j \leq l$, набора из l чисел $s = (s_1, \dots, s_l)$, где каждое s_i равно 0 или 1, и перестановки $\pi \in S_l$.

2. Индекс критической точки, соответствующей $[j, s, \pi]$, равен количеству чисел i , $0 \leq i \leq l-1$, таких, что $i \neq j$, $j-1$ и $\pi(i) < \pi(i+1)$, плюс 1, если $j \neq l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Критические точки являются точками равновесия потока Вольтерра. Используя этот факт, а также явные полиномиальные уравнения $I_i = k_i$ многообразия M_k , можно по индукции доказать, что критические точки – это в точности такие точки, что в точности l из $2l$ величин $c_1, \dots, c_{2l}$ равны нулю, с дополнительным свойством, что если $c_i \neq 0$, то $c_{i-1} = c_{i+1} = 0$. Исследуя спектр соответствующей матрицы, получаем описание, данное в формулировке предложения. Запишем $c_1, \dots, c_{2l}$ как набор из $2l$ элементов: $(c_1, \dots, c_{2l})$. Тройка $[0, s, \pi]$ соответствует критической точке

$$(c_1, \dots, c_{2l}) = (0, (-1)^{s_1} \lambda_{\pi(1)}, 0, (-1)^{s_2} \lambda_{\pi(2)}, 0, \dots, (-1)^{s_l} \lambda_{\pi(l)}),$$

тройка $[l, s, \pi]$ – точке

$$((-1)^{s_1} \lambda_{\pi(1)}, 0, (-1)^{s_2} \lambda_{\pi(2)}, 0, \dots, (-1)^{s_l} \lambda_{\pi(l)}, 0),$$

а тройка $[j, s, \pi]$, где $j \neq 0, l$, соответствует точке

$$((-1)^{s_1} \lambda_{\pi(1)}, 0, (-1)^{s_2} \lambda_{\pi(2)}, 0, \dots, (-1)^{s_j} \lambda_{\pi(j)}, 0, 0, (-1)^{s_{j+1}} \lambda_{\pi(j+1)}, 0, \dots, (-1)^{s_l} \lambda_{\pi(l)}).$$

Это доказывает первое утверждение. Второе утверждение может быть получено при изучении гессиана $f(L)$. Есть два способа вычисления индекса, но мы опускаем детали, так как оба способа достаточно длинные и технические. Первый способ – ввести хорошие локальные координаты и вычислить индекс прямым вычислением. Второй способ следующий. Заметим, что $f(L) = \text{tr} KL^2$ определено для любой $(k \times k)$ -матрицы L . Идея состоит в том, чтобы рассмотреть M_k как подмногообразие орбиты O группы $GL(k)$, действующей на $(k \times k)$ -матрицах сопряжением. Следует начать с изучения гессиана ограничения $f|_O$, а затем перейти к $f|_{M_k}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. 1. *Эйлерова характеристика многообразия M_{2l+1} равна*

$$\chi(M_{2l+1}) = 2^{2l+2}(2^{l+2} - 1) \frac{B_{l+2}}{l+2}, \quad (3)$$

где B_{l+2} – соответствующее число Бернулли.

2. *Если мы положим $\chi(M_1)$ равной нулю, то экспоненциальная производящая функция чисел $\chi(M_{2l+1})$ равна $-\text{th}^2(2z)$, т.е.*

$$-\text{th}^2(2z) = \sum_{l \geq 0} \chi(M_{2l+1}) \frac{z^l}{l!}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим число подъемов в π через $p(\pi)$. Пусть

$$\psi(n) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle,$$

тогда из формулы (7.56) в книге [3] следует, что

$$1 + \text{th} z = \sum_{n \geq 0} \psi(n) \frac{z^n}{n!}. \quad (4)$$

Используя предложение 4, можно доказать, что эйлерова характеристика $\chi(M_{2l+1})$ равна

$$\chi(M_{2l+1}) = 2^l \sum_{j=1}^{l-1} \binom{l}{j} \sum_{\pi_1 \in S_j, \pi_2 \in S_{l-j}} (-1)^{p(\pi_1) + p(\pi_2) + 1}.$$

Это выражение может быть переписано в терминах $\psi(n)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \chi(M_{2l+1}) &= -2^l \sum_{j=1}^{l-1} \binom{l}{j} \left(\sum_{\pi_1 \in S_j} (-1)^{p(\pi_1)} \right) \left(\sum_{\pi_2 \in S_{l-j}} (-1)^{p(\pi_2)} \right) = \\ &= -2^l \sum_{j=1}^{l-1} \binom{l}{j} \psi(j) \psi(l-j). \end{aligned}$$

Из этого тождества, а также тождества (4) следует второе утверждение. Используя разложение $\text{th} z$ и формулу $\text{th}' z = 1 - \text{th}^2 z$, мы получим первое утверждение.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы получили формулу (3) для эйлеровой характеристики изоспектрального многообразия M_k вещественных $(k \times k)$ -матриц Якоби с нулевой диагональю для нечетного k . Эта формула показывает, что топология M_k довольно сложна. Например, из этой формулы можно увидеть, что многообразие M_5 является компактной поверхностью рода 5, что может показаться довольно неожиданным, потому что это многообразие определено простыми уравнениями

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 = k_1, \quad c_1^2 c_3^2 + c_1^2 c_4^2 + c_2^2 c_4^2 = k_2$$

в пространстве $\mathbb{R}^4$ переменных $c_1, \dots, c_4$. Очень интересно было бы получить числа Бетти M_k . Ожидается, что ответ будет включать в себя нетривиальную комбинацию.

Интересно отметить, что эйлеровы характеристики изоспектральных многообразий матриц Якоби (1) и матриц Якоби с нулевой диагональю (3) связаны простой формулой

$$\chi(J_{l+1}) = (-1)^l 2^l \chi(M_{2l+1}).$$

Было бы интересно объяснить этот факт.

Благодарности. Автор благодарен А. П. Веселову за постановку задачи, а также О. Корнеа и А. Медведовской за плодотворные обсуждения.

Список литературы

- [1] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1989.
- [2] С. Tomei, *Duke Math. J.*, **51**:4 (1984), 981–996.
- [3] Р. Л. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник, *Конкретная математика: Основание информатики*, Мир, М., 1998.
- [4] D. Fried, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **98**:2 (1986), 363–368.
- [5] А. В. Пенской, *УМН*, **62**:3 (2007), 213–214; [arXiv: math-ph/0701061](https://arxiv.org/abs/math-ph/0701061).
- [6] С. В. Манаков, *ЖЭТФ*, **67**:2 (1974), 543–555.
- [7] М. Кас, Р. van Moerbeke, *Adv. Math.*, **16**:2 (1975), 160–169.
- [8] Л. Д. Фаддеев, Л. А. Тахтаджян, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.
- [9] А. П. Веселов, А. В. Пенской, *Докл. РАН*, **366**:3 (1999), 299–303.
- [10] P. A. Damianou, *Phys. Lett. A*, **155**:2–3 (1991), 126–132.
- [11] В. Л. Верещагин, *Матем. заметки*, **48**:2 (1990), 145–148.
- [12] A. M. Bloch, R. W. Brockett, T. S. Ratiu, *Comm. Math. Phys.*, **147** (1992), 57–74.
- [13] A. V. Penskoï, *Regul. Chaotic Dyn.*, **3**:1 (1998), 76–77.