Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. В. Скрышник, Дуальная R -матричная интегрируемость, *ТМФ*, 2008, том 155, номер 1, 147–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6200>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 12:36:00

© 2008 г.

Т. В. Скрыпник*

ДУАЛЬНАЯ R -МАТРИЧНАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

С помощью R -оператора на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, удовлетворяющего модифицированному классическому уравнению Янга–Бакстера, найдено два множества функций, взаимно коммутирующих относительно исходной скобки Пуассона–Ли на $\mathfrak{g}^*$. Детально рассматриваются примеры алгебр Ли $\mathfrak{g}$ с разложением Костанта–Адлера–Симса и треугольным разложением, их R -операторы и соответствующие два набора взаимно коммутирующих функций. Найден ответ на вопрос, для каких R -операторов построенные наборы функций коммутируют и относительно R -скобки. Вкратце обсуждаются интегрируемые уравнения типа Эйлера–Арнольда, для которых построенные коммутирующие функции образуют алгебру первых интегралов движения.

Ключевые слова: алгебры Ли, классические R -матрицы, классические интегрируемые системы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Интегрируемость многих уравнений типа Эйлера–Арнольда на дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ связана с так называемым R -оператором или с классической R -матрицей. Классическая R -матрица представляет собой линейное отображение $R: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, удовлетворяющее модифицированному классическому уравнению Янга–Бакстера [1]

$$R([R(X), Y] + [X, R(Y)]) - [R(X), R(Y)] = [X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (1)$$

С помощью R -оператора можно определить вторую скобку Ли (R -скобку) на $\mathfrak{g}$, заданную следующей формулой [1]:

$$[X, Y]_R \equiv [R(X), Y] + [X, R(Y)], \quad (2)$$

где $X, Y \in \mathfrak{g}$, а $[\cdot, \cdot]$ – исходная скобка Ли на $\mathfrak{g}$.

Важность R -скобки следует из того, что кольцо $I^G(\mathfrak{g}^*)$ ad^* -инвариантных функций на $\mathfrak{g}$ представляет собой коммутативную подалгебру относительно второй пуассоновой скобки $\{\cdot, \cdot\}_R$ (скобки Пуассона–Ли на $\mathfrak{g}^*$, отвечающей лиевой скобке $[\cdot, \cdot]_R$ на $\mathfrak{g}$) [1]. Это, в свою очередь, позволяет определить гамильтоновы системы на

*Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Киев, Украина.
E-mail: ts krypnyk@imath.kiev.ua

$(\mathfrak{g}^*, \{\cdot, \cdot\}_R)$, которые изначально допускают независимые взаимно коммутирующие интегралы движения, и эти интегралы оказываются генераторами кольца $I^G(\mathfrak{g}^*)$, порождающими нетривиальные гамильтоновы потоки относительно скобки $\{\cdot, \cdot\}_R$. Это хорошо известная теория [1], [2], которую мы будем называть *прямой R -матричной интегрируемостью*.

В настоящей работе предлагается другой способ построения алгебр взаимно коммутирующих первых интегралов движения для некоторых уравнений типа Эйлера–Арнольда с использованием понятия классического R -оператора. Мы называем этот подход *дуальной R -матричной интегрируемостью*.

Оказывается, что если задан классический R -оператор, то можно определить другую алгебру взаимно коммутирующих функций. В противоположность стандартному подходу работы [1], они коммутируют не относительно R -скобки $\{\cdot, \cdot\}_R$, а относительно исходной скобки Пуассона–Ли $\{\cdot, \cdot\}$. Эти функции также строятся с помощью кольца $I^G(\mathfrak{g}^*)$. Более точно, ниже мы доказываем следующую важную теорему (см. теорему 1) о том, что функции $I_k^{R\pm}(L) \equiv I_k((R^* \pm 1)(L))$, где $I_k(L), I_l(L) \in I^G(\mathfrak{g}^*)$, образуют абелеву подалгебру в $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ относительно стандартных скобок Пуассона–Ли $\{\cdot, \cdot\}$ на $\mathfrak{g}^*$.

Другими словами, мы строим два набора $\{I_k^{R+}(L)\}$ и $\{I_k^{R-}(L)\}$ функций, коммутирующих относительно скобок $\{\cdot, \cdot\}$, и эти наборы функций также коммутируют друг с другом. Число построенных взаимно коммутирующих функций, таким образом, вдвое больше, чем число независимых генераторов алгебры $I^G(\mathfrak{g}^*)$.

В качестве примеров нашей конструкции мы рассмотрим реальные R -операторы. Первый пример связан с алгебрами Ли $\mathfrak{g}$ с так называемым разложением Костанта–Адлера–Симса (КАС) в сумму двух подалгебр: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ + \mathfrak{g}_-$, а для соответствующего R -оператора имеем $R = P_+ - P_-$ (здесь $P_\pm$ – операторы проекций на подалгебры $\mathfrak{g}_\pm$) [1]. В этом случае наши коммутирующие функции $I_k^{R\pm}(L)$ совпадают с ограничениями коприсоединенных инвариантов $\{I_k(L)\}$ на пространства, дуальные соответствующим алгебрам Ли $\mathfrak{g}_\pm$. Коммутативность таких ограниченных коприсоединенных инвариантов была впервые отмечена в работе [3] (см. подробное доказательство в работе [4]). Таким образом, в частном случае мы обнаруживаем известное утверждение, которое доказало свою пользу в теории солитонных уравнений [3], [4].

Другой интересный пример связан с алгебрами Ли с *треугольным* разложением: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_-$, где $\mathfrak{g}_\pm, \mathfrak{g}_0$ – подалгебры и $\mathfrak{g}_0$ -модули. Покажем, что в этом случае можно определить R -оператор с помощью следующей формулы: $R = P_+ + R_0 - P_-$, где R_0 – произвольное решение модифицированного уравнения Янга–Бакстера на $\mathfrak{g}_0$. (Следует отметить, что в специальном случае петлевой алгебры $sl(2)$, обладающей естественным треугольным разложением, такой R -оператор был впервые рассмотрен в работе [5].) В частности, если алгебра $\mathfrak{g}_0$ абелева, то в качестве R_0 можно взять произвольный линейный оператор. В этом случае можно также в явном виде представить построенные наборы коммутирующих функций $I_k^{R\pm}(L)$. Эти функции имеют простой вид и также весьма полезны в теории интегрируемых систем [6].

В настоящей статье мы отвечаем на естественный вопрос, когда построенные коммутативные алгебры коммутируют также относительно R -скобки. Мы покажем, что они коммутируют относительно R -скобки $\{\cdot, \cdot\}_R$ на $\mathfrak{g}^*$, если R -оператор имеет тип

КАС или если он получается с помощью треугольного разложения с абелевой составляющей $\mathfrak{g}_0$. Заметим, что коммутативность этих функций относительно R -скобки в случае R -операторов КАС оказывается гораздо более простым фактом, чем их коммутативность относительно исходной скобки $\{\cdot, \cdot\}$.

Мы обсудим также вкратце приложение наших коммутативных алгебр в теории интегрируемых гамильтоновых систем. В частности, покажем, что соответствующие гамильтоновы уравнения можно переписать в форме Эйлера–Арнольда (в обобщенной лагранжевой форме).

Структура работы следующая. В разделе 2 доказывается основная теорема и рассматриваются ее применения в алгебрах Ли с разложением КАС и с треугольным разложением. В разделе 3 исследуется вопрос о коммутативности построенных алгебр относительно R -скобок, а возможные приложения полученных результатов в теории интегрируемых систем обсуждаются в разделе 4.

2. КОММУТАТИВНЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ И КЛАССИЧЕСКИЙ R -ОПЕРАТОР

2.1. Общий случай. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли (конечно- или бесконечномерная) со скобкой Ли $[\cdot, \cdot]$, $R: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ – некоторый линейный оператор. Оператор R называется классическим R -оператором, если он удовлетворяет модифицированному уравнению Янга–Бакстера (1). Известно [7], [8], [1], что это уравнение можно записать в трех эквивалентных формах:

$$(R+1)([R(X), Y] + [X, R(Y)]) = [(R+1)(X), (R+1)(Y)], \quad (3a)$$

$$(R-1)([R(X), Y] + [X, R(Y)]) = [(R-1)(X), (R-1)(Y)], \quad (3б)$$

$$(R-1)([(R+1)(X), (R+1)(Y)]) = (R+1)([(R-1)(X), (R-1)(Y)]). \quad (3в)$$

Все три формы записи будут использованы в доказательстве основной теоремы. Также используется обозначение $R_{\pm} \equiv R \pm 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как следует из равенств (3a), (3б), отображения $R_{\pm}$ задают подалгебры Ли $\mathfrak{g}_{R_{\pm}} \subset \mathfrak{g}$: $\mathfrak{g}_{R_{\pm}} = \text{Im } R_{\pm}$ [7], [8], [1]. Из их определения нетрудно увидеть, что $\mathfrak{g}_{R_+} + \mathfrak{g}_{R_-} = \mathfrak{g}$, но эта сумма не является в общем случае прямой суммой векторных пространств, т.е. $\mathfrak{g}_{R_+} \cap \mathfrak{g}_{R_-} \neq 0$.

Обозначим через $\mathfrak{g}^*$ пространство, дуальное $\mathfrak{g}$, и через $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ – спаривание между $\mathfrak{g}^*$ и $\mathfrak{g}$. Пусть $\{X_i\}$ – базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $\{X_i^*\}$ – базис в дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$: $\langle X_j^*, X_i \rangle = \delta_{ij}$, $L = \sum_i L_i X_i^* \in \mathfrak{g}^*$ – элемент $\mathfrak{g}^*$ общего вида, L_i – координатные функции на $\mathfrak{g}^*$.

Рассмотрим стандартную скобку Ли–Пуассона между $F_1, F_2 \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$:

$$\{F_1(L), F_2(L)\} = \langle L, [\nabla F_1, \nabla F_2] \rangle, \quad (4)$$

где

$$\nabla F_k(L) = \sum_i \frac{\partial F_k(L)}{\partial L_i} X_i \quad (5)$$

– так называемый градиент F_k со значениями в алгебре. Здесь и далее суммирование предполагается по всем базисным элементам $\mathfrak{g}$.

Пусть R^* – оператор, дуальный R и действующий в пространстве $\mathfrak{g}^*$:

$$\langle R^*(Y), X \rangle \equiv \langle Y, R(X) \rangle \quad \forall Y \in \mathfrak{g}^*, \quad X \in \mathfrak{g}.$$

Пусть $I^G(\mathfrak{g}^*)$ – кольцо инвариантов коприсоединенного представления алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть $I_k(L) \in I^G(\mathfrak{g}^*)$, т.е. $\{I_k(L), L_j\} = 0$ для произвольной координатной функции L_j или, эквивалентно,

$$\langle \text{ad}_{\nabla I_k(L)}^* L, X_j \rangle = 0. \quad (6)$$

Рассмотрим функции $I_k^{R\pm}(L)$ на $\mathfrak{g}^*$, определенные следующими формулами:

$$I_k^{R\pm}(L) \equiv I_k((R^* \pm 1)(L)) \equiv I_k(R_{\pm}^*(L)). \quad (7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как нетрудно видеть из определения функций $I_k^{R\pm}(L)$, координаты элементов дуального пространства $R_{\pm}^*(L)$ реализуют подалгебры Ли в $(\mathfrak{g}^*, \{\cdot, \cdot\})$, изоморфные $\mathfrak{g}_{R\pm}$. Поэтому можно интерпретировать функции $I_k^{R\pm}(L)$ как функции на подпространствах $\mathfrak{g}_{R\pm}^*$. Тем не менее, как следует из замечания 1, оба набора функций $\{I_k^{R+}(L)\}$ и $\{I_l^{R-}(L)\}$ оказываются функциями на полном дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$, а не на каких-то его подпространствах.

Очевидно, что, в отличие от функций $I_k(L)$, функции $I_k^{R\pm}(L)$ не являются функциями Казимира алгебры Ли $\mathfrak{g}$ или подалгебр Ли $\mathfrak{g}_{R\pm}$. Тем не менее выполнена следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Функции $\{I_k^{R+}(L)\}$ и $\{I_l^{R-}(L)\}$, где $I_k(L), I_l(L) \in I^G(\mathfrak{g}^*)$, порождают абелеву подалгебру в $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ относительно стандартных скобок Пуассона–Ли $\{\cdot, \cdot\}$ на $\mathfrak{g}^*$:*

- 1) $\{I_k^{R+}(L), I_l^{R+}(L)\} = 0$,
- 2) $\{I_k^{R-}(L), I_l^{R-}(L)\} = 0$,
- 3) $\{I_k^{R+}(L), I_l^{R-}(L)\} = 0$.

Для доказательства этой теоремы необходима следующая вспомогательная лемма.

ЛЕММА. *Пусть $A \in \text{End}(\mathfrak{g})$, а A^* – ее сопряженный оператор. Пусть любая функция $F \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ задает следующую функцию на $\mathfrak{g}^*$:*

$$F^A(L) \equiv F(A^*(L)).$$

Тогда выполнено соотношение

$$\nabla F^A(L) = A(\nabla F(L)|_{L=A^*(L)}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Смысл обозначения $\nabla F(L)|_{L=A^*(L)}$ в том, что ограничение элемента L на подпространство $\text{Im } A^*$ осуществляется после вычисления алгеброзначного градиента F (операции взятия алгеброзначного градиента и ограничения функции на подпространство, вообще говоря, не коммутативны).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Заметим, что справедливы равенства $A(X_i) = \sum_j A_i^j X_j$, $A^*(X_i^*) = \sum_j (A^*)_i^j X_j^*$ и, как легко вывести из определения дуального оператора, $(A^*)_i^j = A_j^i$. Поэтому получим

$$A^*(L) = \sum_i L_i A^*(X_i^*) = \sum_{i,j} L_i (A^*)_i^j X_j^* \sum_{i,j} L_i A_j^i X_j^* \equiv \sum_j A(L_j) X_j^*,$$

где $A(L_j) \equiv \sum_i A_i^j L_i$.

Рассмотрим функции $F(L)$ и $F^A(L)$ и их матричные градиенты более подробно. Имеем $F(L) = F(L_1, L_2, \dots)$, $F^A(L) = F(A(L_1), A(L_2), \dots)$. Тем самым получим

$$\begin{aligned} \nabla F^A(L) &= \sum_i \frac{\partial F(A(L_1), A(L_2), \dots)}{\partial L_i} X_i = \sum_{i,j} \frac{\partial F(A(L_1), A(L_2), \dots)}{\partial A(L_j)} \frac{\partial A(L_j)}{\partial L_i} X_i = \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial F(A(L_1), A(L_2), \dots)}{\partial A(L_j)} A_j^i X_i = \sum_j \frac{\partial F(A(L_1), A(L_2), \dots)}{\partial A(L_j)} A(X_j) = \\ &= A(\nabla F(L)|_{L=A^*(L)}). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Докажем утверждение 1, т.е. покажем, что $\{I_k^{R+}(L), I_l^{R+}(L)\} = 0$, если $I_k(L), I_l(L) \in I^G(\mathfrak{g})$. Применяя предыдущую лемму, получим

$$\begin{aligned} \{I_k^{R+}(L), I_l^{R+}(L)\} &= \langle L, [\nabla I_k^{R+}(L), \nabla I_l^{R+}(L)] \rangle = \\ &= \langle L, [R_+(\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}), R_+(\nabla I_l(L)|_{L=R_+^*(L)})] \rangle. \end{aligned}$$

С помощью равенства (3a) последнее выражение можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\left\langle L, R_+([R(\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}), \nabla I_l(L)|_{L=R_+^*(L)}] + \right. \\ &\quad \left. + [\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}, R(\nabla I_l(L)|_{L=R_+^*(L)})]) \right\rangle = \\ &= \left\langle R_+^* L, [R(\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}), \nabla I_l(L)|_{L=R_+^*(L)}] + \right. \\ &\quad \left. + [\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}, R(\nabla I_l(L)|_{L=R_+^*(L)})] \right\rangle = \\ &= -\left\langle \text{ad}_{\nabla I_l(L)|_{L=R_+^*(L)}}^* R_+^*(L), R(\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}) \right\rangle + \\ &\quad + \left\langle \text{ad}_{\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}}^* R_+^*(L), R(\nabla I_l(L)|_{L=R_+^*(L)}) \right\rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

С другой стороны,

$$\left\langle \text{ad}_{\nabla I_l(L)|_{L=R_+^*(L)}}^* R_+^*(L), R(\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}) \right\rangle = \left\langle \text{ad}_{\nabla I_l(L)}^* L, R(\nabla I_k(L)) \right\rangle \Big|_{L=R_+^*(L)} = 0,$$

поскольку $I_l(L)$ является инвариантной функцией. Поэтому первое слагаемое в (8) равно нулю. По той же причине второе слагаемое в (8) также равно нулю. Следовательно, $\{I_k^{R+}(L), I_l^{R+}(L)\} = 0$. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2 доказывается аналогично с помощью равенства (36) вместо равенства (3а).

Докажем утверждение 3, т.е. покажем, что

$$\{I_k^{R_+}(L), I_l^{R_-}(L)\} \equiv \langle L, [\nabla I_k^{R_+}(L), \nabla I_l^{R_-}(L)] \rangle = 0.$$

Для этого воспользуемся равенством $\text{id} = (R_+ - R_-)/2$, а потому $2L = (R_+^* - R_-^*)(L)$, и перепишем двойное выражение для $\{I_k^{R_+}(L), I_l^{R_-}(L)\}$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \langle R_+^*(L), [\nabla I_k^{R_+}(L), \nabla I_l^{R_-}(L)] \rangle - \langle R_-^*(L), [\nabla I_k^{R_+}(L), \nabla I_l^{R_-}(L)] \rangle = \\ & = \langle R_+^*(L), [R_+(\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}), R_-(\nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)})] \rangle - \\ & - \langle R_-^*(L), [R_+(\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}), R_-(\nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)})] \rangle. \end{aligned}$$

Рассмотрим по отдельности два слагаемых в правой части этого тождества. Имеем

$$\begin{aligned} & \langle R_+^*(L), [R_+(\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}), R_-(\nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)})] \rangle = \\ & = 2 \langle R_+^*(L), [\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}, R_-(\nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)})] \rangle + \\ & + \langle R_+^*(L), [R_-(\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}), R_-(\nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)})] \rangle, \end{aligned} \quad (9)$$

где было использовано то, что $R_+(\nabla I_k(L)) = 2\nabla I_k(L) + R_-(\nabla I_k(L))$. Первое слагаемое в правой части (9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & 2 \langle R_+^*(L), [\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}, R_-(\nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)})] \rangle = \\ & = 2 \langle \text{ad}_{\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}}^* R_+^*(L), R_-(\nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)}) \rangle = \\ & = 2 \langle (\text{ad}_{\nabla I_k(L)}^* L)|_{L=R_+^*(L)}, X \rangle, \end{aligned}$$

где $X \equiv R_-(\nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)})$. Принимая в расчет инвариантность функции $I_k(L)$, убеждаемся, что это слагаемое равно нулю. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \langle R_+^*(L), [R_+(\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}), R_-(\nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)})] \rangle = \\ & = \langle R_+^*(L), [R_-(\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}), R_-(\nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)})] \rangle = \\ & = \langle L, R_+([R_-(\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}), R_-(\nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)})]) \rangle. \end{aligned}$$

Аналогично легко показать, что

$$\begin{aligned} & \langle R_-^*(L), [R_+(\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}), R_-(\nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)})] \rangle = \\ & = \langle L, R_-([R_+(\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}), R_+(\nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)})]) \rangle. \end{aligned}$$

Получим при этом, что

$$\{I_k^{R+}(L), I_l^{R-}(L)\} = \left\langle L, R_+([R_-(X), R_-(Y)]) - R_-([R_+(X), R_+(Y)]) \right\rangle = 0,$$

где $X \equiv \nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}$, $Y \equiv \nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)}$ и было использовано равенство (3в). Это доказывает утверждение 3.

Теорема доказана.

Эта теорема предоставляет нам широкую абелеву подалгебру в пространстве $(C^\infty(\mathfrak{g}^*), \{\cdot, \cdot\})$. В следующих разделах рассматриваются несколько примеров R -операторов и соответствующих абелевых подалгебр.

2.2. Случай алгебр Ли с разложением КАС. Рассмотрим случай алгебр Ли $\mathfrak{g}$ с разложением КАС в прямую сумму двух векторных подпространств $\mathfrak{g}_\pm$: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ + \mathfrak{g}_-$, где подпространства $\mathfrak{g}_\pm$ суть замкнутые подалгебры Ли. Пусть $P_\pm$ – проекционные операторы на соответствующие подалгебры $\mathfrak{g}_\pm$. Тогда известно [1], что в этом случае можно определить так называемую R -матрицу КАС:

$$R = P_+ - P_-.$$

Легко видеть, что в этом случае $R_+ = 1 + R = 2P_+$, $R_- = R - 1 = -2P_-$ пропорциональны проекционным операторам на подалгебры $\mathfrak{g}_\pm$. Получим, что $\mathfrak{g}_{R\pm} \equiv \mathfrak{g}_\pm$ и $\mathfrak{g}_{R+} \cap \mathfrak{g}_{R-} = 0$.

Предположим, что генераторы кольца инвариантных функций $I_k(L)$ можно брать в виде однородных многочленов. Функции $I_k^{R\pm}(L)$ тогда принимают следующий простой вид:

$$I_k^{R\pm}(L) \equiv I_k^\pm(L) \equiv I_k(L_\pm), \quad L_\pm \equiv P_\pm^* L,$$

т.е. $I_k^\pm(L)$ представляют собой ограничения коприсоединенных инвариантов на дуальные пространства подалгебры Ли $\mathfrak{g}_\pm$. Тем самым имеет место следующее следствие теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Функции $\{I_k(L_+)\}$ и $\{I_l(L_-)\}$, где $I_k(L), I_l(L) \in I^G(\mathfrak{g}^*)$, образуют абелеву подалгебру в $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ относительно скобки Пуассона–Ли на $\mathfrak{g}^*$:*

- 1) $\{I_k(L_+), I_l(L_+)\} = 0$,
- 2) $\{I_k(L_-), I_l(L_-)\} = 0$,
- 3) $\{I_k(L_+), I_l(L_-)\} = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Это следствие задает чрезвычайно простой способ построения набора коммутирующих интегралов на $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ + \mathfrak{g}_-$, который просто совпадает с ограничением коприсоединенных инвариантов на дуальное пространство каждой подалгебры в разложении. Заметим, что утверждения 1, 2 следствия 1 можно также получить с помощью стандартного R -матричного подхода [1]. Утверждение 3 не следует из стандартной схемы КАС. Его справедливость была впервые сформулирована без доказательства в работе [3]. Подробное доказательство утверждения 3 в этом случае было дано в работе [4].

2.3. Случай алгебр Ли с треугольным разложением. Рассмотрим случай алгебр Ли $\mathfrak{g}$ с так называемым *треугольным* разложением

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_-, \quad (10)$$

где сумма представляет собой прямую сумму векторных пространств, $\mathfrak{g}_\pm$ и $\mathfrak{g}_0$ – замкнутые подалгебры и $\mathfrak{g}_\pm$ – $\mathfrak{g}_0$ -модули. Разумеется, в этом случае разложения КАС (два из них) алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и R -операторы КАС также существуют, однако треугольное разложение (10) обеспечивает более широкие возможности.

Верно следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть R_0 – решение модифицированного уравнения Янга–Бакстера (1) на $\mathfrak{g}_0$. Тогда тензор

$$R = P_+ + R_0 - P_-, \quad (11)$$

где $P_\pm$ – проекционные операторы на подалгебры $\mathfrak{g}_\pm$, есть решение модифицированного уравнения Янга–Бакстера (1) на $\mathfrak{g}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X = X_+ + X_0 + X_-$, $Y = Y_+ + Y_0 + Y_-$ – разложение $X, Y \in \mathfrak{g}$ такое, что $X_\pm \in \mathfrak{g}_\pm$, $X_0 \in \mathfrak{g}_0$. Тогда $R(X) = X_+ + R_0(X_0) - X_-$, $R(Y) = Y_+ + R_0(Y_0) - Y_-$.

Рассмотрим выражение

$$R([R(X), Y] + [X, R(Y)]) - [R(X), R(Y)] - [X, Y].$$

С помощью прямых вычислений получим

$$\begin{aligned} [R(X), Y] + [X, R(Y)] &= 2([X_+, Y_+] - [X_-, Y_-]) + [(R_0 + 1)(X_0), Y_+] + \\ &+ [X_+, (R_0 + 1)(Y_0)] + [(R_0 - 1)(X_0), Y_-] + \\ &+ [X_-, (R_0 - 1)Y_0] + [X_0, R_0(Y_0)] + [R_0(X_0), Y_0]. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\mathfrak{g}_\pm$ и $\mathfrak{g}_0$ – подалгебры и $\mathfrak{g}_\pm$ – $\mathfrak{g}_0$ -модули, получим

$$\begin{aligned} R([R(X), Y] + [X, R(Y)]) &= 2([X_+, Y_+] + [X_-, Y_-]) + [(R_0 + 1)(X_0), Y_+] + \\ &+ [X_+, (R_0 + 1)(Y_0)] - [(R_0 - 1)(X_0), Y_-] - [X_-, (R_0 - 1)Y_0] + \\ &+ R_0([X_0, R_0(Y_0)] + [R_0(X_0), Y_0]). \end{aligned}$$

С другой стороны, прямые вычисления дают

$$\begin{aligned} [R(X), R(Y)] + [X, Y] &= 2([X_+, Y_+] + [X_-, Y_-]) + [(1 + R_0)(X_0), Y_+] + \\ &+ [X_+, (1 + R_0)Y_0] - [X_-, (R_0 - 1)(Y_0)] - [(R_0 - 1)(X_0), Y_-] + \\ &+ [R_0(X_0), R_0(Y_0)] + [X_0, Y_0]. \end{aligned}$$

Таким образом, получим, что

$$R([R(X), Y] + [X, R(Y)]) - [R(X), R(Y)] - [X, Y] = 0$$

тогда и только тогда, когда R_0 удовлетворяет уравнению

$$R_0([X_0, R_0(Y_0)] + [R_0(X_0), Y_0]) - [R_0(X_0), R_0(Y_0)] - [X_0, Y_0] = 0. \quad (12)$$

Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В случае, когда $R_0 = \pm \text{id}_0$ (очевидно, $R_0 = \pm \text{id}_0$ являются решениями уравнения (12)), получим, что R -матрица (11) переходит в стандартную R -матрицу КАС, отвечающую разложению КАС

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_+ + \mathfrak{g}_0) + \mathfrak{g}_- \quad \text{или} \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ + (\mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_-).$$

Тем не менее рассматриваемый случай треугольного разложения содержит и другие интересные возможности. Одна из них дается следующим предложением.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть подалгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ абелева. Тогда комбинация

$$R = P_+ + \rho_0 - P_- \quad (13)$$

дает решение уравнения (1) для любого тензора ρ_0 на $\mathfrak{g}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство следует из того, что в случае абелевых алгебр Ли $\mathfrak{g}_0$ любой тензор $R_0 = \rho_0$ оказывается решением модифицированного уравнения Янга–Бакстера (1) на $\mathfrak{g}_0$.

Другая интересная возможность возникает, когда $\mathfrak{g}_0$ – конечномерная полупростая алгебра Ли. Были найдены разнообразные решения модифицированного классического уравнения Янга–Бакстера на конечномерных полупростых алгебрах Ли [7], [1], и эти решения можно применить для построения (с помощью формулы (11)) новых неантисимметричных решений модифицированных классических уравнений Янга–Бакстера на $\mathfrak{g}$.

Рассмотрим более детально построенные алгебры интегралов движения, отвечающих рассмотренным классическим R -матрицам. В случае R -матрицы (11) имеем

$$R_+ = 2P_+ + (P_0 + R_0), \quad R_- = -(2P_- + (P_0 - R_0)).$$

Таким образом, в этом случае $\mathfrak{g}_{R_{\pm}} = \mathfrak{g}_{\pm} + \text{Im}(R_0)_{\pm}$, где $(R_0)_{\pm} = (R_0 \pm P_0) - R_{\pm}$ -операторы на $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{g}_{R_+} \cap \mathfrak{g}_{R_-} = \text{Im}(R_0)_+ \cap \text{Im}(R_0)_-$.

В случае однородных инвариантов $I_k(L)$ функции $I_k^{R_{\pm}}(L)$ принимают вид

$$I_k^{R_{\pm}}(L) \equiv I_k^{R_0, \pm}(L) = I_k\left(L_{\pm} + \frac{1 \pm R_0^*}{2}(L_0)\right), \quad L_{\pm} \equiv P_{\pm}^*L, \quad L_0 \equiv P_0^*L. \quad (14)$$

Если известно решение R_0 на $\mathfrak{g}_0$ (например, в случае, когда алгебра $\mathfrak{g}_0$ абелева) и известны коприсоединенные инварианты, функции $I_k^{R_{\pm}}(L)$ оказываются вполне конкретно заданными. При этом имеет место следующее следствие теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 3. Функции $\{I_k^{R_0, +}(L)\}$ и $\{I_l^{R_0, -}(L)\}$, где $I_k(L), I_l(L) \in I^G(\mathfrak{g}^*)$, образуют абелеву подалгебру в $C^{\infty}(\mathfrak{g}^*)$ относительно скобки Пуассона–Ли на $\mathfrak{g}^*$:

- 1) $\{I_k^{R_0, +}(L), I_l^{R_0, +}(L)\} = 0$,
- 2) $\{I_k^{R_0, -}(L), I_l^{R_0, -}(L)\} = 0$,
- 3) $\{I_k^{R_0, +}(L), I_l^{R_0, -}(L)\} = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В случае, когда $R_0 = \pm \text{id}_0$ и функции I_k однородны, мы снова приходим к функциям $I_k^{\pm}(L)$, которые могут быть получены при нашем подходе в случае двух разложений КАС алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В других случаях, полученных в этом разделе, коммутирующие интегралы отличаются от тех, которые были получены с помощью разложения КАС.

3. КОММУТАТИВНОСТЬ И R -СКОБКА

В данной работе нас в основном интересуют первоначальная скобка Ли $[\cdot, \cdot]$ на $\mathfrak{g}$, соответствующие скобки Пуассона–Ли $\{\cdot, \cdot\}$ на $\mathfrak{g}^*$, равно как и функции, коммутирующие относительно такой “первоначальной” скобки Пуассона–Ли. Тем не менее обратимся теперь к естественному вопросу, когда построенные коммутативные алгебры оказываются также коммутирующими относительно R -матричной скобки.

Как уже отмечалось, с помощью классической R -матрицы, можно задать новую скобку Ли на $\mathfrak{g}$ [1]:

$$[X, Y]_R \equiv [R(X), Y] + [X, R(Y)]$$

и определить соответствующую структуру Пуассона–Ли $\{\cdot, \cdot\}_R$ с помощью формулы

$$\{F_1(L), F_2(L)\}_R = \langle L, [\nabla F_1, \nabla F_2]_R \rangle,$$

где

$$\nabla F_k(L) = \sum_i \frac{\partial F_k(L)}{\partial L_i} X_i$$

– стандартный алгеброзначный градиент F_k .

Хорошо известно [1], что набор функций Казимира $\{I_k(L)\}$ для скобок $\{\cdot, \cdot\}$ образует абелеву подалгебру относительно R -скобок $\{\cdot, \cdot\}_R$. Ответим теперь на вопрос, когда функции $\{I_k^{R+}(L)\}$ и $\{I_l^{R-}(L)\}$ образуют абелеву подалгебру по отношению не только к скобке $\{\cdot, \cdot\}$, но и к R -матричной скобке $\{\cdot, \cdot\}_R$.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Функции $\{I_k^{R+}(L)\}$ и $\{I_l^{R-}(L)\}$, где $I_k(L), I_l(L) \in I^G(\mathfrak{g}^*)$, образуют абелеву подалгебру в $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ относительно R -скобок $\{\cdot, \cdot\}_R$ на $\mathfrak{g}^*$, если R имеет тип КАС ($R = P_+ - P_-$) или если R получается из треугольного разложения ($R = P_+ + R_0 - P_-$) с абелевой подалгеброй $\mathfrak{g}_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы необходимо явно вычислить скобки Пуассона $\{I_k^{R\pm}(L), I_l^{R\pm}(L)\}_R$ и $\{I_k^{R\pm}(L), I_l^{R\mp}(L)\}_R$. Имеем

$$\begin{aligned} \{I_k^{R\pm}(L), I_l^{R\pm}(L)\}_R &= \langle L, [\nabla I_k^{R\pm}(L), \nabla I_l^{R\pm}(L)]_R \rangle = \\ &= \langle L, [R_\pm(\nabla I_k(L)|_{L=R_\pm^*(L)}), R_\pm(\nabla I_l(L)|_{L=R_\pm^*(L)})]_R \rangle. \end{aligned}$$

Применяя равенства (3а), (3б) и очевидный факт, что R коммутирует с $R_\pm$, можно легко вывести следующее равенство:

$$[R_\pm(X), R_\pm(Y)]_R = R_\pm([R^2(X), Y] + 2[R(X), R(Y)] + [X, R^2(Y)]).$$

Используя это равенство и то, что $I_k(L)$ и $I_l(L)$ представляют собой инвариантные функции, можно упростить выражение для $\{I_k^{R\pm}(L), I_l^{R\pm}(L)\}_R$, приведя его к следующему виду:

$$\{I_k^{R\pm}(L), I_l^{R\pm}(L)\}_R = 2 \left\langle R_\pm^*(L), [R(\nabla I_k(L)|_{L=R_\pm^*(L)}), R(\nabla I_l(L)|_{L=R_\pm^*(L)})] \right\rangle.$$

С учетом модифицированного уравнения Янга–Бакстера для R и того, что $I_k(L)$ представляет собой функцию, инвариантную относительно скобок $\{\cdot, \cdot\}$, окончательно получим

$$\{I_k^{R\pm}(L), I_l^{R\pm}(L)\}_R = 2\langle R^*R_{\pm}^*(L), [\nabla I_k(L)|_{L=R_{\pm}^*(L)}, \nabla I_l(L)|_{L=R_{\pm}^*(L)}]_R \rangle. \quad (15)$$

Прямые вычисления дают

$$\begin{aligned} 2\{I_k^{R+}(L), I_l^{R-}(L)\}_R &\equiv \langle 2L, [\nabla I_k^{R+}(L), \nabla I_l^{R-}(L)]_R \rangle = \\ &= \langle R_+^*(L), [\nabla I_k^{R+}(L), \nabla I_l^{R-}(L)]_R \rangle - \langle R_-^*(L), [\nabla I_k^{R+}(L), \nabla I_l^{R-}(L)]_R \rangle = \\ &= \langle R_+^*(L), [R_+(\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}), R_-(\nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)})]_R \rangle - \\ &\quad - \langle R_-^*(L), [R_+(\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}), R_-(\nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)})]_R \rangle. \end{aligned}$$

Рассмотрим по отдельности два слагаемых в правой части этого тождества. Имеем

$$\begin{aligned} \langle R_+^*(L), [R_+(\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}), R_-(\nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)})]_R \rangle &= \\ = 2\langle R_+^*(L), [\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}, R_-(\nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)})]_R \rangle + \\ + \langle R_+^*(L), [R_-(\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}), R_-(\nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)})]_R \rangle, \end{aligned} \quad (16)$$

где было использовано то, что $R_+(\nabla I_k(L)) = 2\nabla I_k(L) + R_-(\nabla I_k(L))$.

Используя то, что по определению $[X, Y]_R = [R(X), Y] + [X, R(Y)]$, $R_- = R - 1$, и то, что $\nabla I_k(L)$ есть инвариантная функция, а потому $\forall X \in \mathfrak{g}$ справедливо равенство $\langle R_+^*(L), [\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}, X] \rangle = 0$, нетрудно показать, что первое слагаемое в правой части выражения (16) может быть преобразовано к виду

$$2\langle R_+^*(L), [R_-(\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}), R_-(\nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)})] \rangle.$$

Аналогично, получим

$$\begin{aligned} \langle R_-^*(L), [R_+(\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}), R_-(\nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)})]_R \rangle &= \\ = -2\langle R_-^*(L), [R_+(\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}), R_+(\nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)})] \rangle + \\ + \langle R_-^*(L), [R_+(\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}), R_+(\nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)})]_R \rangle. \end{aligned}$$

В итоге имеет место равенство

$$\begin{aligned} 2\{I_k^{R+}(L), I_l^{R-}(L)\}_R &= 2(\langle R_+^*(L), [R_-(\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}), R_-(\nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)})] \rangle + \\ &+ \langle R_-^*(L), [R_+(\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}), R_+(\nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)})] \rangle) + \\ &+ \langle R_+^*(L), [R_-(\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}), R_-(\nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)})]_R \rangle - \\ &- \langle R_-^*(L), [R_+(\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}), R_+(\nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)})]_R \rangle. \end{aligned} \quad (17)$$

Используя равенства (3в) и $[R_{\pm}, R] = 0$, нетрудно показать, что

$$R_-([R_+(X), R_+(Y)]_R) = R_+([R_-(X), R_-(Y)]_R).$$

С учетом этого равенства легко показать, что два последних слагаемых в выражении (17) для $\{I_k^{R+}(L), I_l^{R-}(L)\}_R$ взаимно сокращаются, а первые два упрощаются и принимают вид

$$\{I_k^{R+}(L), I_l^{R-}(L)\}_R = 2\langle R_+^*(L), [R_- \nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}, R_- (\nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)})] \rangle.$$

Применяя равенство (36), окончательно получим для $\{I_k^{R+}(L), I_l^{R-}(L)\}_R$ следующее простое выражение:

$$\{I_k^{R+}(L), I_l^{R-}(L)\}_R = 2\langle L, R_+ R_- ([\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}, \nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)}]_R) \rangle. \quad (18)$$

Выполняя очевидные преобразования, можно переписать выражение (15) в следующем виде:

$$\{I_k^{R\pm}(L), I_l^{R\pm}(L)\}_R = 2\langle L, (R_\pm^2 \mp 2R_\pm) ([\nabla I_k(L)|_{L=R_\pm^*(L)}, \nabla I_l(L)|_{L=R_\pm^*(L)}]_R) \rangle. \quad (19)$$

Пусть теперь R имеет тип КАС, т.е. $R = P_+ - P_-$. Тогда $R_+ R_- = 0$ и, следовательно, $\{I_k^{R+}(L), I_l^{R-}(L)\}_R = 0$. Более того, в этом случае $R_\pm^2 = \pm 2R_\pm$, а потому $\{I_k^{R\pm}(L), I_l^{R\pm}(L)\}_R = 0$. Это завершает доказательство теоремы в случае, когда R имеет тип КАС.

Пусть теперь оператор R получен из треугольного разложения, т.е. $R = P_+ + R_0 - P_-$. В этом случае нетрудно найти, что $R_+ R_- = (R_0)_+ (R_0)_-$, где $(R_0)_+ = R_0 + P_0$, $(R_0)_- = R_0 - P_0$. В этом случае с помощью простых вычислений получим ответ: $R_\pm^2 = \pm 2R_\pm + (R_0)_\pm^2 \mp 2(R_0)_\pm$. Кроме того, прямыми вычислениями получим, что

$$\begin{aligned} [X, Y]_R &= 2([X_+, Y_+] - [X_-, Y_-]) + [(R_0 + 1)(X_0), Y_+] + [X_+, (R_0 + 1)(Y_0)] + \\ &\quad + [(R_0 - 1)(X_0), Y_-] + [X_-, (R_0 - 1)(Y_0)] + [X_0, Y_0]_{R_0}. \end{aligned}$$

Учитывая все вышесказанное и то, что $\mathfrak{g}_\pm$ представляют собой $\mathfrak{g}_0$ -модули и что $(R_0)_\pm$ по определению действует нетривиально только на $\mathfrak{g}_0$, получим, что равенства (18), (19) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \{I_k^{R+}(L), I_l^{R-}(L)\}_R &= \\ &= 4\langle L, (R_0)_+ (R_0)_- ([P_0 (\nabla I_k(L)|_{L=R_+^*(L)}), P_0 (\nabla I_l(L)|_{L=R_-^*(L)})]_{R_0}) \rangle, \\ \{I_k^{R\pm}(L), I_l^{R\pm}(L)\}_R &= \\ &= 2\langle L, ((R_0)_\pm^2 \mp 2(R_0)_\pm) ([P_0 (\nabla I_k(L)|_{L=R_\pm^*(L)}), P_0 (\nabla I_l(L)|_{L=R_\pm^*(L)})]_{R_0}) \rangle, \end{aligned} \quad (20)$$

где P_0 – проекционный оператор на подалгебру $\mathfrak{g}_0$.

В результате получим, что эти выражения тождественно обращаются в нуль в следующих случаях.

1. Если $\mathfrak{g}_0$ – абелева подалгебра.
2. Если $(R_0)_+ (R_0)_- = 0$ и $((R_0)_\pm^2 \mp 2(R_0)_\pm) = 0$, т.е. если оператор R_0 получен из разложения $\mathfrak{g}_0$ типа КАС. Но в этом случае оператор R также получается из

разложения типа КАС алгебры $\mathfrak{g}$ и может быть записан в виде $R = (P_+ + (P_0)_+) - (P_- + (P_0)_-)$, где $\mathfrak{g}_0 = (\mathfrak{g}_0)_+ + (\mathfrak{g}_0)_-$ и $(P_0)_\pm$ – проекционные операторы на соответствующие алгебры Ли $(\mathfrak{g}_0)_\pm$.

3. Оператор R_0 получается из треугольного разложения $\mathfrak{g}_0$: $\mathfrak{g}_0 = (\mathfrak{g}_0)_+ + (\mathfrak{g}_0)_0 + (\mathfrak{g}_0)_-$, в котором подалгебра $(\mathfrak{g}_0)_0$ абелева. В этом случае оператор R получается из треугольного разложения $\mathfrak{g}$ с абелевой подалгеброй $\mathfrak{g}'_0 \equiv (\mathfrak{g}_0)_0$ и может быть записан в виде $R = P_+ + (P_0)_+ + (R_0)_0 - P_- - (P_0)_-$.

Теорема доказана.

4. СВЯЗЬ С ИНТЕГРИРУЕМЫМИ ГАМИЛЬТОНОВЫМИ СИСТЕМАМИ

Теорема 1 описывает набор взаимно коммутирующих функций на $\mathfrak{g}^*$ относительно скобок $\{\cdot, \cdot\}$, который можно использовать в качестве алгебры интегралов движения некоторой гамильтоновой системы на $\mathfrak{g}^*$. В качестве функции Гамильтона можно выбрать одну из функций $I_k^{R\pm}(L)$ или их линейную комбинацию. Рассмотрим следующее гамильтоново уравнение:

$$\frac{dL_i}{dt_k^\pm} = \{L_i, I_k^{R\pm}(L)\}. \quad (21)$$

Покажем, что гамильтоновы уравнения (20) могут быть записаны в форме пары Лакса. Имеет место следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Гамильтоновы уравнения движения (20) могут быть записаны в форме Эйлера–Арнольда (обобщенной лаксовой форме)*

$$\frac{dL}{dt_k^\pm} = \text{ad}_M^* L,$$

$$\text{где } M \equiv \nabla I_k^{R\pm}(L) = R_\pm(\nabla I_k(L)|_{L=R_\pm^*(L)}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственным преобразованием получим

$$\frac{dL_i}{dt_k^\pm} = \{L_i, I_k^{R\pm}(L)\} = \langle L, [\nabla I_k^{R\pm}(L), X_i] \rangle = \langle \text{ad}_{\nabla I_k^{R\pm}(L)}^* L, X_i \rangle.$$

Умножая обе части на X_i^* и суммируя по всем $i \in \{1, \dots, \dim \mathfrak{g}^*\}$, приходим к утверждению предложения.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В случае стандартной R -матричной интегрируемости имеют место гамильтоновы уравнения движения для гамильтониана $I_k(L)$ относительно R -скобки:

$$\frac{dL_i}{d\tau_k} = \{L_i, I_k(L)\}_R.$$

Они также могут быть записаны в обобщенном лаксовом виде, но с другим M -оператором [1]:

$$\frac{dL}{d\tau_k} = \text{ad}_M^* L, \quad M = R(\nabla I_k(L)).$$

Чтобы получить *полностью интегрируемые гамильтоновы системы* в случае конечномерных алгебр Ли $\mathfrak{g}$ в рамках нашего подхода, необходимо потребовать, чтобы число построенных функционально независимых интегралов было бы равно половинной размерности фазовых пространств, которые представляют собой симплектические листы коприсоединенных орбит группы G в $\mathfrak{g}^*$. С другой стороны, нетрудно видеть, что число функционально независимых интегралов, полученных в рамках нашего подхода, равно $2 \operatorname{ind} \mathfrak{g}$. Поэтому если только $\mathfrak{g}$ – полупростая (редуктивная) конечномерная алгебра Ли ранга r ($r = \operatorname{ind} \mathfrak{g}$), то наша конструкция задает полностью интегрируемые системы на $\mathfrak{g}$ в случае достаточно малых r или в случае достаточно вырожденных коприсоединенных орбит в $\mathfrak{g}^*$.

Другое возможное приложение к теории конечномерных интегрируемых систем состоит в рассмотрении гамильтоновых систем на подпространствах $(\mathfrak{g}_{R+}^*, \{\cdot, \cdot\})$ или $(\mathfrak{g}_{R-}^*, \{\cdot, \cdot\})$ с абелевой алгеброй Ли интегралов движения, порожденной только одним из наборов функций $I_k^{R+}(L)$ или $I_k^{R-}(L)$.

Наконец, еще одно возможное применение наших результатов к теории конечномерных интегрируемых систем состоит в рассмотрении гамильтоновых систем на $\mathfrak{g}^*$ со скобкой Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_R$ в случае, когда $I_k^{R+}(L)$ и $I_k^{R-}(L)$ порождают абелеву подалгебру также и относительно скобки $\{\cdot, \cdot\}_R$. В случае, когда R не является оператором типа КАС, это приводит к гамильтоновым системам, которые не сводятся к обсуждавшимся выше.

Тем не менее представляется вероятным, что наиболее интересные и перспективные применения наших результатов лежат в области теорий бесконечномерных интегрируемых систем, когда алгебра $\mathfrak{g}$ бесконечномерна. В этом случае наши интегралы и их гамильтоновы потоки можно использовать для построения новых солитонных решений в рамках техники, сходной с техникой работы [3] (см. также [4]). Автор предполагает вернуться к этой задаче [6].

Благодарности. Автор признателен П. Голоду и Д. Лейкину за полезные обсуждения. Работа частично поддержана целевой программой Отделения физики и астрономии Национальной академии наук Украины, а также DFFD (грант № F/16-457-2007).

Список литературы

- [1] М. А. Семёнов-Тян-Шанский, *Функц. анализ и его прил.*, **17:4** (1983), 17–33.
- [2] А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тян-Шанский, “Теоретико-групповые методы в теории конечномерных интегрируемых систем”, *Интегрируемые системы. Неголономные динамические системы*, Серия современные проблемы математики. Фундаментальные направления, **16**, ред. В. И. Арнольд, С. П. Новиков, ВИНТИ, М., 1987, 119–193.
- [3] A. Newell, *Solitons in Mathematics and Physics*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, **48**, SIAM, Philadelphia, PA, 1985.
- [4] Т. В. Скрыпник, *ТМФ*, **142:2** (2005), 329–345.
- [5] F. Guil, M. Manas, *Lett. Math. Phys.*, **19** (1990), 89–95.
- [6] T. Skrypnik, *SIGMA*, **04** (2008), 011.
- [7] A. Belavin, V. Drienfield, preprint ITF 1982-18, ITF, Chernogolovka.
- [8] А. А. Белавин, В. Г. Дринфельд, *Функц. анализ и его прил.*, **16:3** (1982), 159–180.