Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Ф. Хелминк, С. В. Поленкова, Аналитический подход к двумерной бесконечной иерархии Тоды, связанной с коммутативной алгеброй, *ТМФ*, 2008, том 155, номер 1, 177–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6202>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 12:02:00

© 2008 г.

Г. Ф. Хелминк*, С. В. Поленкова†

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ДВУМЕРНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ИЕРАРХИИ ТОДЫ, СВЯЗАННОЙ С КОММУТАТИВНОЙ АЛГЕБРОЙ

Исходя из группы операторов на сепарабельном гильбертовом пространстве, отличающихся от единицы на ядерный оператор, построено решение двумерной бесконечной иерархии Тоды, связанной с максимальной коммутативной подалгеброй алгебры комплексных $(k \times k)$ -матриц.

Ключевые слова: двумерная бесконечная иерархия Тоды, уравнения Лакса, линеаризация, коммутирующие потоки, банахова группа Ли, большая клетка.

1. ВВЕДЕНИЕ

Иерархии тодовского типа состоят, грубо говоря, из комбинации нелинейных дифференциальных и разностных уравнений для бесконечных матриц. По поводу роли, которую иерархии Тоды играют в моделях математической физики, мы отсылаем читателя к работе [1]. Двумерная бесконечная иерархия Тоды, связанная с максимальной коммутативной подалгеброй $\mathbf{h}$ комплексных $(k \times k)$ -матриц, составляющая предмет рассмотрения настоящей работы, является обобщением иерархии, рассмотренной в работе [2]. Она представляет собой комбинацию двух иерархий, одна из которых формулируется в терминах нижнетреугольных, а другая – в терминах верхнетреугольных матриц. Аналитический подход к потокам первой иерархии рассматривался в работе [3], а геометрический формализм для потоков иерархии второго типа приведен в работе [4]. В рамках формализма настоящей работы допускаются обе группы потоков и получаются решения для комбинированной иерархии. Основная цель работы состоит в доказательстве следующего результата.

ТЕОРЕМА. Пусть $H = L^2(S^1, \mathbb{C}^k)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых $\mathbb{C}^k$ -значных функций на S^1 , $\Gamma(\mathbf{h})$ – группа обратимых голоморфных

*Korteweg de Vries Institute, University of Amsterdam, Amsterdam, The Netherlands.
E-mail: helminck@science.uva.nl

†Faculty of Mathematical Sciences, University of Twente, Enschede, The Netherlands.
E-mail: polenkova@mail.ru

отображений из единичной окружности S^1 в максимальную коммутативную алгебру $\mathbf{h}$ комплексных $(k \times k)$ -матриц, G_1 – группа обратимых ограниченных линейных отображений пространства H в себя вида “ Id + ядерный оператор”. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Для каждого $g \in G_1$ существует открытое подмножество $\Gamma(g, \mathbf{h})$ в $\Gamma(\mathbf{h})$ такое, что коэффициенты верхней блочно-треугольной $(k \times k)$ -части Φ_+ и нижней блочно-треугольной $(k \times k)$ -части Φ_- в разложении

$$[\gamma g \gamma^{-1}] = \Phi_-^{-1} \Phi_+, \quad \gamma \in \Gamma(g, \mathbf{h}),$$

принадлежат кольцу $R(g, \mathbf{h})$ голоморфных функций, заданных на открытом подмножестве $\Gamma(g, \mathbf{h})$.

2. $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ -матрицы

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Phi_-) &:= \Phi_- \Lambda^k \Phi_-^{-1}, & U_\alpha(\Phi_-) &:= \Phi_- i_k(E_\alpha) \Phi_-^{-1}, & \alpha = 1, 2, \dots, \\ \mathcal{M}(\Phi_+) &:= \Phi_+ \Lambda^{-k} \Phi_+^{-1}, & V_\beta(\Phi_+) &:= \Phi_+ i_k(F_\beta) \Phi_+^{-1}, & \beta = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

являются решениями двумерной иерархии Тоды, связанной с $\mathbf{h}$. Здесь Λ^{-1} – $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ -матрица, соответствующая оператору сдвига на H , $\{E_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots\}$ и $\{F_\beta, \beta = 1, 2, \dots\}$ – базисы в $\mathbf{h}$, а $i_k(A)$ обозначает $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ -матрицу, соответствующую умножению элементов из H на комплексную $(k \times k)$ -матрицу A .

Иерархии, рассматриваемые в данной работе, сформулированы в терминах $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ -матриц. Поэтому в разделе 2 сначала введены необходимые обозначения и разложения в этом пространстве. В разделе 3 рассмотрен лаксов вид этих иерархий и соответствующая линеаризация. Заключительный раздел 4 посвящен центральному разложению в группе G_1 ; в этом разделе описано, как параметры непрерывных потоков в группе коммутирующих потоков $\Gamma(\mathbf{h})$ связаны с уравнениями Лакса иерархии, и это завершает доказательство теоремы.

2. ПРОСТРАНСТВО $M_{\mathbb{Z}}(R)$

Пусть R – коммутативное кольцо. Введем обозначения $M_k(R)$ для кольца $(k \times k)$ -матриц с коэффициентами в R и $M_{\mathbb{Z}}(R)$ для R -модуля $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ -матриц с коэффициентами в R . Мы используем упорядочение столбцов и строк, совместное с конечномерным случаем. Имеется некоторое число специальных часто используемых элементов из $M_{\mathbb{Z}}(R)$. Прежде всего, это базисная матрица $E_{(i,j)}$, $i, j \in \mathbb{Z}$, задающаяся как

$$(E_{(i,j)})_{\mu\nu} = \delta_{i\mu} \delta_{j\nu}.$$

Любую матрицу $A = (A_{ij}) \in M_{\mathbb{Z}}(R)$ можно записать как формальную линейную комбинацию базисных матриц

$$A = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} A_{ij} E_{(i,j)}.$$

Ключевой является матрица сдвига $\Lambda = \sum_{i \in \mathbb{Z}} E_{(i-1,i)}$. В контексте данной работы она играет роль, подобную роли оператора $\partial := d/dx$ в формализме псевдодифференциальных операторов для КП-иерархии.

Каждому набору $\{d(s) \mid s \in \mathbb{Z}\}$ матриц из $M_k(R)$ можно поставить в соответствие диагональ $(k \times k)$ -блоков из $M_{\mathbb{Z}}(R)$ с помощью калибровки:

$$\text{diag}(d(s)) := \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sum_{\alpha=1}^k \sum_{\beta=1}^k d(s)_{\alpha\beta} E_{(sk+\alpha-1, sk+\beta-1)}.$$

Пусть для каждого $k \geq 1$

$$\mathcal{D}_k(R) = \{d = \text{diag}(d(s)) \mid d(s) \in M_k(R) \text{ для всех } s \in \mathbb{Z}\}$$

обозначает кольцо блочно-диагональных $(k \times k)$ -матриц из $M_{\mathbb{Z}}(R)$. Существует кольцевой гомоморфизм i_k из $M_k(R)$ в $\mathcal{D}_k(R)$, который реализуется взятием в качестве $A \in M_k(R)$ всех диагональных блоков в $i_k(A)$, равных A . Элементы Λ^{km} , $m \in \mathbb{Z}$, действуют на $\mathcal{D}_k(R)$ следующим образом:

$$\Lambda^{km} \text{diag}(d(s)) \Lambda^{-km} = \text{diag}(d(s+m)). \quad (1)$$

Поэтому образ отображения i_k состоит из всех матриц из $\mathcal{D}_k(R)$, коммутирующих с Λ^k . Каждую матрицу из $M_{\mathbb{Z}}(R)$ можно разбить на так называемые $(k \times k)$ -блочные диагонали. Действительно, для $A = (A_{ij}) \in M_{\mathbb{Z}}(R)$ введем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Для любой матрицы A j -я $(k \times k)$ -блочная диагональ, $j \in \mathbb{Z}$, есть матрица

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{\alpha=1}^k \sum_{\beta=1}^k A_{(ki-kj+\alpha-1, ki+\beta-1)} E_{(ki-kj+\alpha-1, ki+\beta-1)}.$$

Из выражения (1) видно, что j -ю $(k \times k)$ -блочную диагональ $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ -матрицы A можно единственным образом записать в виде $\text{diag}(d(s)) \Lambda^{kj}$. Таким образом, каждую $A = (A_{i,j}) \in M_{\mathbb{Z}}(R)$ можно единственным образом представить как

$$A = \sum_{j \in \mathbb{Z}} d_j \Lambda^{kj}, \quad (2)$$

где d_j лежат в $\mathcal{D}_k(R)$. В частности, любая матрица, коммутирующая с Λ^k , имеет вид (2), где d_j лежат в образе i_k . Внутри $M_{\mathbb{Z}}(R)$ рассмотрим два подпространства, образующие кольцо по отношению к обычному произведению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Элемент A из $M_{\mathbb{Z}}(R)$ называется *верхним $(k \times k)$ -блочно-треугольным элементом уровня m* , если он имеет вид

$$A = \sum_{j \geq m} d_j \Lambda^{kj}, \quad \text{где } d_j \in \mathcal{D}_k(R).$$

Набор всех верхних $(k \times k)$ -блочно-треугольных элементов уровня m обозначается как $UT_m = UT_m(R)$. Мы используем обозначения

$$UT(R) := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} UT_k =: UT$$

для множества всех верхних $(k \times k)$ -блочно-треугольных матриц. Из соотношения (1) непосредственно следует, что UT является R -алгеброй. Противоположный класс матриц таков.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Элемент A из $M_{\mathbb{Z}}(R)$ называется *нижним $(k \times k)$ -блочно-треугольным элементом уровня m* , если его можно записать в виде

$$A = \sum_{j \leq m} d_j \Lambda^{kj}, \quad \text{где } d_j \in \mathcal{D}_k(R).$$

Набор всех таких элементов обозначается как $LT_m = LT_m(R)$, и мы также используем обозначения

$$LT(R) := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} LT_k =: LT$$

для R -алгебры всех нижних $(k \times k)$ -блочно-треугольных матриц.

С разложением (2) мы свяжем два обозначения: если $A = \sum_{j \in \mathbb{Z}} d_j \Lambda^j$, как в (2), то будем писать

$$A_+ = \sum_{j \geq 0} d_j \Lambda^{kj} \quad \text{и} \quad A_- = \sum_{j < 0} d_j \Lambda^{kj}$$

для соответствующей верхней $(k \times k)$ -блочно-треугольной части и строго нижней $(k \times k)$ -блочно-треугольной части A . Заметим, что если $U \in UT$ и $V \in LT$ имеют вид

$$U = \sum_{i \geq r} u_i \Lambda^{ik}, \quad V = \sum_{i \leq r} v_i \Lambda^{ik},$$

причем u_r и v_r обратимы в $\mathcal{D}_k(R)$, то элементы U и V обратимы, причем диагональные $(k \times k)$ -блочные компоненты их обратных можно вычислить рекуррентно. Следующее утверждение показывает, что при $r \neq 0$ все обратимые элементы такого типа можно получить с помощью “одевания” матрицы Λ^{kr} .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. 1. Пусть для любого ненулевого $r \in \mathbb{Z}$ элемент $\mathcal{L} \in LT_r$ имеет $(k \times k)$ -блочный вид:

$$\mathcal{L} = \sum_{j \leq r} \alpha_j \Lambda^{jk}, \quad \text{где } \alpha_r \in \mathcal{D}_k(R) \text{ обратим.}$$

Тогда существует элемент $U \in LT$ $(k \times k)$ -блочного вида, $U = \sum_{i \leq 0} \beta_i \Lambda^{ki}$, с обратимым старшим коэффициентом $\beta_0 \in \mathcal{D}_k(R)$ такой, что

$$\mathcal{L} = U \Lambda^{rk} U^{-1}.$$

Здесь элементы $\beta_t(i)$, $t \leq 0$, $0 \leq i < |r|$, произвольны с точностью до единственного ограничения, что элементы $\beta_0(i)$, $0 \leq i < |r|$, должны быть обратимы.

2. Пусть для любого ненулевого $s \in \mathbb{Z}$ элемент $\mathcal{M} \in UT_r$ имеет $(k \times k)$ -блочный вид

$$\mathcal{M} = \sum_{j \geq s} \gamma_j \Lambda^{kj}, \quad \text{где } \gamma_s \in \mathcal{D}_k(R) \text{ обратим.}$$

Тогда существует элемент $V \in UT(k \times k)$ -блочного вида, $V = \sum_{i \geq 0} \delta_i \Lambda^{ik}$, с обратной матрицей $\delta_0 \in \mathcal{D}_k(R)$, удовлетворяющий равенству

$$\mathcal{M} = V \Lambda^{sk} V^{-1}.$$

Как и выше, элементы $\delta_l(j)$, $l \geq 0$, $0 \leq j < |s|$, можно выбирать произвольно, с тем ограничением, что $\delta_0(j)$, $0 \leq j < |s|$, обратимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем только пункт 1 утверждения; пункт 2 доказывается аналогично. Поскольку старший коэффициент α_r обратим, матрица $\mathcal{L}$ обратима и ее обратная $\mathcal{L}^{-1}$ принадлежит LT_{-r} , причем старший коэффициент обратной матрицы есть $\Lambda^{-rk} \alpha_r^{-1} \Lambda^{rk}$. Поэтому можно ограничиться случаем $r > 0$. Искомая матрица U должна удовлетворять уравнению $\mathcal{L}U = U\Lambda^{kr}$, которое сводится к следующим уравнениям на коэффициенты β_t оператора U :

$$\beta_t = \sum_{i=t}^0 \alpha_{t+r-i} \Lambda^{k(t+r-i)} \beta_i \Lambda^{-k(t+r-i)}, \quad t = 0, 1, \dots$$

Если все $\beta_i = \text{diag}(\beta_i(j))$ и $\alpha_i = \text{diag}(\alpha_i(j))$, то из этого уравнения при $t = 0$ следует, что при всех $j \in \mathbb{Z}$

$$\beta_0(j) = \alpha_r(j) \beta_0(j+r). \quad (3)$$

Мы видим, что для решения этого уравнения можно выбрать произвольные обратимые элементы $\beta_0(j)$, $0 \leq j < r$, и тогда уравнение (3) определяет элементы $\beta_0 \in \mathcal{D}_k(R)$ единственным образом. Коль скоро мы показали, как найти решение для β_0 , можно считать, что мы нашли все β_l при $l > t$. Блоки следующего коэффициента β_t оператора U должны удовлетворять соотношениям

$$\beta_t(j) - \alpha_r(j) \beta_t(j+r) = \sum_{0 \leq i < t} \alpha_{t+r-i}(j) \beta_i(j+r+t-i), \quad (4)$$

из которых видно, что в выборе $\beta_t(j)$, $0 \leq j < r$, снова имеется свобода, но остальные блоки определяются этим выбором единственным образом. Таким способом мы находим оператор U , удовлетворяющий уравнению $\mathcal{L}U = U\Lambda^{kr}$. Этим завершается доказательство утверждения.

3. УРАВНЕНИЯ ЛАКСА В LT И UT

Начнем с коммутативной подалгебры $\mathbf{h}$ в $gl_k(\mathbb{C})$, которая определяет вид коммутирующих потоков, лежащих в основе уравнений иерархий. Для максимизации числа коммутирующих потоков будем предполагать $\mathbf{h}$ максимальной. Мы предлагаем читателю два примера максимальных коммутативных алгебр: алгебру диагональных матриц и алгебру

$$\mathbf{h} = \left\{ h = \sum_{i=0}^{k-1} a_i B^i, \quad \text{где} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad (5)$$

которые представляют собой предельные случаи соответственно с максимальной и минимальной полупростой частью. Выберем базис $\{E_\alpha \mid 1 \leq \alpha \leq m\}$ в $\mathbf{h}$. Иерархия, на которой мы сконцентрируем свое внимание, является комбинацией двух других: нижнетреугольной и верхнетреугольной иерархий Тоды. Сначала рассмотрим деформации внутри коммутативной подалгебры $LT(R)$ в $M_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C})$, порожденной элементами Λ^k и $i_k(E_\alpha)$, $1 \leq \alpha \leq m$. Конкретнее, в $LT(R)$ рассмотрим матрицы

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &:= \sum_{i \leq 1} l_i \Lambda^{ki}, & \text{где } l_1 = \text{Id} = \Lambda^0, \\ U_\alpha &= \sum_{i \leq 0} u_{i,\alpha} \Lambda^{ki}, & \text{где } u_{0,\alpha} = i_k(E_\alpha). \end{aligned} \quad (6)$$

Кроме условия $[\Lambda^k, i_k(E_\alpha)] = 0$, выполнено также соотношение

$$E_\alpha E_\beta = \sum_{\gamma} C_{\alpha\beta}^\gamma E_\gamma,$$

поэтому мы потребуем, чтобы деформации из (6) удовлетворяли равенствам

$$[\mathcal{L}, U_\alpha] = 0, \quad U_\alpha U_\beta = \sum_{\gamma} C_{\alpha\beta}^\gamma U_\gamma \quad (7)$$

для всех индексов. Заметим, что в силу утверждения 2.1 оператор $\mathcal{L}$ можно записать как $\mathcal{L} = U \Lambda^k U^{-1}$, где $U \in LT_0$ имеет вид $U = \text{Id} + \sum_{i < 0} \beta_i \Lambda^{ki}$. Если выбрать $U_\alpha := U i_k(E_\alpha) U^{-1}$, то уравнения (7) тривиально удовлетворяются. Кроме сохранения алгебраических соотношений, все коэффициенты матриц $\mathcal{L}$ и U_α , $\alpha = 1, \dots, m$, также должны принадлежать кольцу функций R от параметров деформации $t_{i\alpha}$, соответствующих коммутирующим направлениям

$$\Lambda^{ik} i_k(E_\alpha), \quad i = 0, 1, \dots, \quad \alpha = 1, \dots, m.$$

Мы предполагаем, что кольцо R устойчиво относительно дифференцирования по $t_{i\alpha}$, а матрица $\mathcal{L}$ должна удовлетворять нелинейным уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t_{i\alpha}} \mathcal{L} := \partial_{i\alpha} \mathcal{L} = [(\mathcal{L}^i U_\alpha)_+, \mathcal{L}], \quad \partial_{i\alpha} U_\beta = [(\mathcal{L}^i U_\alpha)_+, U_\beta]. \quad (8)$$

Уравнения (8) называются *уравнениями Лакса нижнетреугольной иерархии Тоды, связанной с $\mathbf{h}$* . Из этих уравнений следует, что $\mathcal{L}$ и U_α получены путем сопряжения как Λ^k , так и $i_k(E_\alpha)$ с помощью одной и той же матрицы, т.е. посредством одевания тривиального решения.

Заметим, что полученная выше форма иерархии аналогична форме КП-иерархии и иерархии других солитонных уравнений, в которых возмущение коммутативной алгебры дифференциальных операторов, соответствующих тривиальному решению, берется внутри кольца псевдодифференциальных операторов (см. [5], [6]).

Уравнения Лакса (8) можно получить как условия совместности для подходящей линейной системы, так называемой *линеаризации* иерархии. Пространство, на котором рассматривается такая линеаризация, определяет вид матрицы, которую следует использовать для одевания тривиального решения. Пусть временно $\delta \in M_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C})$ –

матрица, коммутирующая с Λ^k и $i_k(E_\alpha)$. Соответствующий выбор элементов δ мы обсудим ниже. Теперь свободный левый $LT(R)$ -модуль $M^{(\infty)}(\delta)$ осциллирующих матриц типа δ с сингулярностью не сильнее, чем полюс на бесконечности состоит из элементов, имеющих вид формального произведения элемента из $LT(R)$, матрицы δ и экспоненциального множителя

$$\varphi_\infty := \exp \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^m t_{i\alpha} i_k(E_\alpha) \Lambda^{ik} \right\}.$$

Пусть $\partial_{i\alpha}$ действует на элементы из $LT(R)$ покоэффициентно. На элементе $\varphi := \widehat{\varphi} \delta \varphi_\infty \in M^{(\infty)}(\delta)$ действие $\partial_{i\alpha}$ определяется уравнением

$$\partial_{i\alpha}(\widehat{\varphi} \delta \varphi_\infty) := \{\partial_{i\alpha} \widehat{\varphi} + \widehat{\varphi} \Lambda^{ik} i_k(E_\alpha)\} \delta \varphi_\infty.$$

Заметим, что, поскольку δ коммутирует с Λ^k и $i_k(E_\alpha)$, умножение на эти матрицы справа хорошо определено на $M^{(\infty)}(\delta)$. Тогда линеаризация состоит из следующей системы уравнений для некоторого $\varphi := \widehat{\varphi} \delta \varphi_\infty \in M^{(\infty)}(\delta)$, где $\widehat{\varphi} = \sum_{i \geq 0} w_i \Lambda^{-ik}$ при $w_0 = \text{Id}$:

$$\mathcal{L}\varphi = \varphi \Lambda^k, \quad U_\alpha \varphi = \varphi i_k(E_\alpha), \quad \partial_{i\alpha} \varphi = (\mathcal{L}^i U_\alpha)_+ \varphi. \quad (9)$$

Генератор $\delta \varphi_\infty$ $LT(R)$ -модуля $M^{(\infty)}(\delta)$ удовлетворяет этим уравнениям для тривиального решения $\mathcal{L} = \Lambda^k$ и $U_\alpha = i_k(E_\alpha)$. Другие φ , удовлетворяющие уравнениям (9), можно, таким образом, рассматривать как возмущения этого тривиального решения. Прежде всего, из первых двух уравнений в (9) следует, что

$$\mathcal{L} =: \mathcal{L}(\widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi} \Lambda^k \widehat{\varphi}^{-1}, \quad U_\alpha =: U_\alpha(\widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi} i_k(E_\alpha) \widehat{\varphi}^{-1}.$$

Отсюда

$$\partial_{i\alpha} \mathcal{L} = [\partial_{i\alpha} \widehat{\varphi} \cdot \widehat{\varphi}^{-1}, \mathcal{L}], \quad \partial_{i\alpha} U_\beta = [\partial_{i\alpha} \widehat{\varphi} \cdot \widehat{\varphi}^{-1}, U_\beta]. \quad (10)$$

Теперь третье уравнение в (9) дает

$$\partial_{i\alpha} \widehat{\varphi} \cdot \widehat{\varphi}^{-1} + \widehat{\varphi} \Lambda^{ik} i_k(E_\alpha) \widehat{\varphi}^{-1} = (\mathcal{L}^i U_\alpha)_+. \quad (11)$$

В частности, мы видим, что

$$\partial_{i\alpha} \widehat{\varphi} \cdot \widehat{\varphi}^{-1} = -(\mathcal{L}^i U_\alpha)_- = (\mathcal{L}^i U_\alpha)_+ - \mathcal{L}^i U_\alpha,$$

и, подставляя это равенство в уравнение (10), получаем уравнения Лакса нижнетреугольной иерархии Тоды для $\mathcal{L}(\widehat{\varphi})$ и $U_\alpha(\widehat{\varphi})$, $\alpha = 1, \dots, m$. Мы будем говорить, что φ является *волновой матрицей типа δ на бесконечности* для такого набора решений. Достаточно доказать более слабый вариант линеаризации.

ЛЕММА 3.1. *Если для $\varphi := \widehat{\varphi} \delta \varphi_\infty \in M^{(\infty)}(\delta)$, где $\widehat{\varphi} = \sum_{i \geq 0} w_i \Lambda^{-ik}$ при $w_0 = \text{Id}$, для всех α и i выполнено соотношение*

$$\partial_{i\alpha} \varphi = P_{i\alpha} \varphi, \quad \text{где } P_{i\alpha} \in UT_0(R) \cap LT(R),$$

то $P_{i\alpha} = (\mathcal{L}(\widehat{\varphi})^i U_\alpha(\widehat{\varphi}))_+$, а φ является волновой матрицей типа δ на бесконечности для $\mathcal{L}(\widehat{\varphi})$ и $U_\alpha(\widehat{\varphi})$, $\alpha = 1, \dots, m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Матрица $P_{i\alpha}$ как раз равна левой части уравнения (11), и взятие верхнетреугольной части дает искомое тождество $P_{i\alpha} = (\mathcal{L}(\hat{\varphi})^i U_\alpha(\hat{\varphi}))_+$.

Для верхнетреугольной иерархии мы будем действовать аналогично, но рассматривать лежащие внутри $UT(R)$ деформации коммутативной алгебры, порожденной элементами Λ^{-k} и $i_k(F_\beta)$, $1 \leq \beta \leq m$, где $\{F_\beta \mid 1 \leq \beta \leq m\}$ представляет собой некоторый базис в $\mathbf{h}$ с законом умножения

$$F_\alpha F_\beta = \sum_{\gamma} D_{\alpha\beta}^{\gamma} F_{\gamma}.$$

Деформациями элементов Λ^{-k} (элементов $i_k(F_\beta)$) являются матрицы $\mathcal{M}$ (соответственно V_β) вида

$$\mathcal{M} := \sum_{i \geq -1} m_i \Lambda^{ki}, \quad V_\beta := \sum_{i \geq 0} v_{i,\beta} \Lambda^{ki}, \quad \beta = 1, \dots, m,$$

причем старший коэффициент $\mathcal{M}$ обратим, а старший коэффициент V_β равен $w_0 i_k(F_\beta) w_0^{-1}$ для некоторого обратимого w_0 , удовлетворяющего соотношению

$$m_{-1} = w_0 \Lambda^{-k} w_0^{-1} \Lambda^k.$$

Существование такого w_0 следует из доказательства утверждения 2.1. Как и ранее, алгебраические соотношения между исходными матрицами должны сохраняться при их деформациях, т.е. должны иметь место равенства

$$[\mathcal{M}, V_\beta] = 0, \quad V_\alpha V_\beta = \sum_{\gamma} D_{\alpha\beta}^{\gamma} V_{\gamma}. \quad (12)$$

Приведем примеры деформаций, удовлетворяющих этим уравнениям:

$$\mathcal{M} := V \Lambda^{-k} V^{-1}, \quad V_\beta = V i_k(F_\beta) V^{-1}, \quad V = \sum_{i \geq 0} \delta_i \Lambda^{ik}, \quad \text{где } \delta_0 \text{ обратим.}$$

Коэффициенты матриц $\mathcal{M}$ и V_α должны принадлежать кольцу функций R от параметров деформации $s_{j\beta}$, соответствующих коммутирующим направлениям

$$\Lambda^{-jk} i_k(F_\beta), \quad j = 1, 2, \dots, \quad \beta = 1, \dots, m.$$

Мы предполагаем, что кольцо R устойчиво относительно дифференцирования по $s_{j\beta}$, а деформированные матрицы должны удовлетворять нелинейным уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial s_{j\beta}} \mathcal{M} =: \partial_{j\beta} \mathcal{M} = [(\mathcal{M}^j V_\beta)_-, \mathcal{M}], \quad \partial_{j\beta} V_\alpha = [(\mathcal{M}^j V_\beta)_-, V_\alpha]. \quad (13)$$

Уравнения (13) называются *уравнениями Лакса верхнетреугольной иерархии Тоды, связанной с $\mathbf{h}$* , причем из них следует, что $\mathcal{M}$ и V_α получаются путем сопряжения как Λ^{-k} , так и $i_k(F_\alpha)$ с помощью одной и той же матрицы, т.е. путем одевания тривиального решения.

Как и ранее, искомые уравнения Лакса можно получить как условия совместности для подходящей линейной системы, также называемой *линеаризацией* иерархии. Матрица, с помощью которой сопрягается тривиальное решение, встроена в пространство, на котором реализована линеаризация. В данном случае мы также начнем с матрицы $\delta \in M_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C})$, коммутирующей с Λ^{-k} и $i_k(F_\beta)$, и рассмотрим свободный левый $UT(R)$ -модуль $M^{(0)}(\delta)$ осциллирующих матриц типа δ с сингулярностью не сильнее, чем полюс в нуле, состоящий из элементов, имеющих вид формального произведения элементов из $UT(R)$, матрицы δ и экспоненциального множителя:

$$\psi_0 := \exp \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^m s_{j\beta} i_k(F_\beta) \Lambda^{-jk} \right\}.$$

Аналогично, пусть $\partial_{j\beta}$ действуют на элементы из $UT(R)$ покоэффициентно. Действие $\partial_{j\beta}$ на элемент $\psi := \hat{\psi} \delta \psi_0 \in M^{(0)}(\delta)$ определяется как

$$\partial_{j\beta}(\hat{\psi} \delta \psi_0) := \{\partial_{j\beta} \hat{\psi} + \hat{\psi} \Lambda^{-jk} i_k(F_\beta)\} \delta \psi_0.$$

Поскольку δ коммутирует с Λ^{-k} и $i_k(F_\alpha)$, умножение на эти матрицы справа является хорошо определенным оператором на $M^{(0)}(\delta)$. Тогда линеаризация состоит из следующей системы уравнений для $\psi := \hat{\psi} \delta \psi_0 \in M^{(0)}(\delta)$, где $\hat{\psi} = \sum_{i \geq 0} w_i \Lambda^{ik}$ с обратимым w_0 :

$$\mathcal{M}\psi = \psi \Lambda^{-k}, \quad V_\alpha \psi = \psi i_k(F_\alpha), \quad \partial_{j\beta} \psi = (\mathcal{M}^j V_\beta)_- \psi. \quad (14)$$

Можно считать, что ψ , удовлетворяющие уравнениям (14), являются возмущениями генератора $\delta \psi_0$ $UT(R)$ -модуля $M^{(0)}(\delta)$. Генератор $\delta \psi_0$ удовлетворяет этим уравнениям для тривиального решения $\mathcal{M} = \Lambda^{-k}$, $V_\alpha = i_k(F_\alpha)$. Из первых двух уравнений в (14) снова следует, что матрицы $\mathcal{M}$ и V_α определяются возмущающим множителем $\hat{\psi}$, потому что они получены путем сопряжения тривиального решения с помощью множителя:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\hat{\psi}) := \hat{\psi} \Lambda^{-k} \hat{\psi}^{-1}, \quad V_\alpha = V_\alpha(\hat{\psi}) := \hat{\psi} i_k(F_\alpha) \hat{\psi}^{-1}.$$

Поскольку матрицы $\mathcal{M}$ и V_α получаются путем одевания тривиального решения с помощью $\hat{\psi}$, имеем

$$\partial_{j\beta} \mathcal{M} = [\partial_{j\beta} \hat{\psi} \cdot \hat{\psi}^{-1}, \mathcal{M}], \quad \partial_{j\beta} V_\alpha = [\partial_{j\beta} \hat{\psi} \cdot \hat{\psi}^{-1}, V_\alpha]. \quad (15)$$

Теперь третье из уравнений (14) дает

$$\partial_{j\beta} \hat{\psi} \cdot \hat{\psi}^{-1} + \hat{\psi} \Lambda^{-jk} i_k(F_\beta) \hat{\psi}^{-1} = (\mathcal{M}^j V_\beta)_-.$$

В частности, мы видим, что

$$\partial_{j\beta} \hat{\psi} \cdot \hat{\psi}^{-1} = -(\mathcal{M}^j V_\alpha)_+ = (\mathcal{M}^j V_\beta)_- - \mathcal{M}^j V_\alpha,$$

и, подставляя это соотношение в уравнение (15), получаем в результате уравнения Лакса верхнетреугольной иерархии Тоды для $\mathcal{M}(\hat{\psi})$ и $V_\alpha(\hat{\psi})$, $\alpha = 1, \dots, m$. Мы будем говорить, что для этого набора решений ψ является *волновой матрицей типа δ в нуле*. Аналогично лемме 3.1, достаточно показать следующее.

ЛЕММА 3.2. *Предположим, что $\psi := \widehat{\psi}\delta\psi_0 \in M^{(0)}(\delta)$, где $\widehat{\psi} = \sum_{i \geq 0} w_i \Lambda^{ik}$ с обратимым w_0 , причем для всех β и j имеет место*

$$\partial_{j\beta}(\psi) = Q_{j\beta}\psi, \quad \text{где } Q_{j\beta} \in LT_{-1}(R) \cap UT(R).$$

Тогда $Q_{j\beta} = (\mathcal{M}(\widehat{\psi})^j V_\beta(\widehat{\psi}))_-$, а ψ является волновой матрицей типа δ в нуле для матриц $\mathcal{M}(\widehat{\psi})$ и $V_\beta(\widehat{\psi})$, $\beta = 1, \dots, m$.

Следующий шаг состоит в комбинировании обеих иерархий; таким образом мы одновременно рассматриваем деформации $\{\mathcal{L}, U_\gamma\}$ и $\{\mathcal{M}, V_\sigma\}$, удовлетворяющие в первую очередь уравнениям (7), (8), (12), (13). Однако теперь мы предполагаем, что коэффициенты этих деформаций зависят как от $t_{i\alpha}$, так и от $s_{j\beta}$, и что зависимость от дополнительных параметров задается формулами

$$\partial_{j\beta}\mathcal{L} = [(\mathcal{M}^j V_\beta)_-, \mathcal{L}], \quad \partial_{j\beta}U_\gamma = [(\mathcal{M}^j V_\beta)_-, U_\gamma], \quad (16)$$

$$\partial_{i\alpha}\mathcal{M} = [(\mathcal{L}^i U_\alpha)_+, \mathcal{M}], \quad \partial_{i\alpha}V_\sigma = [(\mathcal{L}^i U_\alpha)_+, V_\sigma]. \quad (17)$$

Будем говорить, что уравнения (8), (13), (16), (17) суть *уравнения Лакса для двумерной бесконечной иерархии Тоды, связанной с $\mathbf{h}$* . Подходящим образом комбинируя линеаризации обеих деформаций, эти уравнения также можно рассматривать как условие совместности этих систем. Как на $LT(R)$, так и на $UT(R)$ частные производные по параметрам деформации берутся покоэффициентно. Определим действие оператора $\partial_{j\beta}$ на элементы из $M^{(\infty)}(\delta)$ как

$$\partial_{j\beta}(\widehat{\varphi}\delta\varphi_\infty) = \partial_{j\beta}\widehat{\varphi} \cdot \delta\varphi_\infty$$

и действие $\partial_{i\alpha}$ на $M^{(0)}(\delta)$ – как

$$\partial_{i\alpha}(\widehat{\psi}\delta\psi_0) = \partial_{i\alpha}\widehat{\psi} \cdot \delta\psi_0.$$

Линеаризация двумерной бесконечной иерархии Тоды, связанной с $\mathbf{h}$, состоит тогда из уравнений

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\varphi &= \varphi\Lambda^k, & U_\gamma\varphi &= \varphi i_k(E_\gamma), \\ \partial_{i\alpha}\varphi &= (\mathcal{L}^i U_\alpha)_+\varphi, & \partial_{j\beta}\varphi &= (\mathcal{M}^j V_\beta)_-\varphi; \\ \mathcal{M}\psi &= \psi\Lambda^{-k}, & V_\sigma\psi &= \psi i_k(F_\sigma), \\ \partial_{i\alpha}\psi &= (\mathcal{L}^i U_\alpha)_+\psi, & \partial_{j\beta}\psi &= (\mathcal{M}^j V_\beta)_-\psi \end{aligned}$$

для пары $(\varphi, \psi) \in M^{(\infty)}(\delta) \times M^{(0)}(\delta)$ вида $\widehat{\varphi} = \sum_{i \geq 0} w_i \Lambda^{-ik}$, где $w_0 = \text{Id}$ и $\widehat{\psi} = \sum_{i \geq 0} d_i \Lambda^{ik}$ с обратимым d_0 . Как и выше, мы покажем, что деформации $\mathcal{L}(\widehat{\varphi})$, $U_\gamma(\widehat{\varphi})$ (деформации $\mathcal{M}(\psi)$, $V_\sigma(\psi)$) являются решениями двумерной иерархии Тоды, связанной с $\mathbf{h}$. Пара (φ, ψ) называется *парой волновых матриц типа δ для двумерной бесконечной иерархии Тоды, связанной с $\mathbf{h}$* . Леммы 3.1 и 3.2 объединяются в следующую лемму.

ЛЕММА 3.3. Рассмотрим пару (φ, ψ) в пространстве $M^{(\infty)}(\delta) \times M^{(0)}(\delta)$ вида $\widehat{\varphi} = \sum_{i \geq 0} w_i \Lambda^{-ik}$, где $w_0 = \text{Id}$, и $\widehat{\psi} = \sum_{i \geq 0} d_i \Lambda^{ik}$ с обратимым d_0 . Полагаем, что для всех α, i, β и j выполнено

$$\begin{aligned} \partial_{i\alpha} \varphi &= P_{i\alpha} \varphi, & \partial_{j\beta} \varphi &= Q_{j\beta} \varphi, \\ \partial_{j\beta} \psi &= Q_{j\beta} \psi, & \partial_{i\alpha} \psi &= P_{i\alpha} \psi, \end{aligned}$$

где $P_{i\alpha} \in UT_0(R) \cap LT(R)$ и $Q_{j\beta} \in LT_{-1}(R) \cap UT(R)$. Тогда $P_{i\alpha} = (\mathcal{L}(\widehat{\varphi})^i U_\alpha(\widehat{\varphi}))_+$, $Q_{j\beta} = (\mathcal{M}(\widehat{\psi})^j V_\beta(\widehat{\psi}))_-$, а пара (φ, ψ) является парой волновых матриц типа δ для матриц $\mathcal{L}(\widehat{\varphi})$, $\mathcal{M}(\widehat{\psi})$, $U_\gamma(\widehat{\varphi})$ и $V_\sigma(\widehat{\psi})$.

4. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ИЕРАРХИИ

Пусть S^1 – единичная окружность в комплексной плоскости. Конкретные элементы $M^{(\infty)}(\delta)$ и $M^{(0)}(\delta)$ можно получить как $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ -матрицы, соответствующие подходящим ограниченным операторам в гильбертовом пространстве $H = L^2(S^1, \mathbb{C}^k)$. Элементы пространства H обозначаются

$$h = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) z^n, \quad \text{где } a(n) \in \mathbb{C}^k \quad \text{для всех } n \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $(\cdot | \cdot)$ – стандартное скалярное произведение на $\mathbb{C}^k$. Скалярное произведение на H тогда дается соотношением

$$\left\langle \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) z^n \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} b(n) z^n \right. \right\rangle := \sum_{n \in \mathbb{Z}} (a(n) | b(n)).$$

Если $\{f_i | 0 \leq i \leq k-1\}$ обозначает стандартный базис пространства $\mathbb{C}^k$, где f_i таков, что его $(i+1)$ -й элемент равен единице, а остальные элементы равны нулю, то мы получаем ортонормированный базис $\{e_i | i \in \mathbb{Z}\}$ в H , положив $e_{s+kj} := f_s z^j$ для всех $j \in \mathbb{Z}$ и всех $s, 0 \leq s \leq k-1$.

Элемент $h = \sum \alpha_i e_i$ также отождествляется с $(\mathbb{Z} \times 1)$ -матрицей

$$h = (\dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots)^T,$$

где верхний индекс T обозначает транспонирование матрицы. Следовательно, действие ограниченного оператора $B \in B(H)$ соответствует в матричном представлении умножению слева на комплексную $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ -матрицу $[B] = ([B]_{lk})$, где

$$[B]_{lk} = \langle B(e_k) | e_l \rangle.$$

Базисные матрицы $E_{(i,j)}$ соответствуют операторам $\mathcal{E}_{(i,j)} \in B(H)$, $i, j \in \mathbb{Z}$. Внутри H рассмотрим некоторое множество подпространств. Для каждого $i \in \mathbb{Z}$ обозначим $H^{(i)}$ комплексное подпространство в H , линейно порожденное элементами $f_s z^i$, $s = 0, 1, \dots, k-1$. Проекция $H \mapsto H^{(i)}$, задаваемая с помощью $\sum_{j \in \mathbb{Z}} h(j) z^j \mapsto h(i) z^i$, обозначается как $p^{(i)}$. Пространство H разлагается в прямую сумму $H = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H^{(i)}$,

и это разложение определяет для каждого ограниченного линейного оператора $B \in B(H)$ соответствующий блок разложения,

$$B = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & B_{n-1 \ n-1} & B_{n-1 \ n} & B_{n-1 \ n+1} & \dots \\ \dots & B_{n \ n-1} & B_{n \ n} & B_{n \ n+1} & \dots \\ \dots & B_{n+1 \ n-1} & B_{n+1 \ n} & B_{n+1 \ n+1} & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где $B_{ij} := p^{(i)} \circ B|H^{(j)}$, и разложение матрицы $[B] = ([B_{ij}])$ по $(k \times k)$ -блокам. Другое важное для дальнейших рассуждений подпространство – это подпространство H_j , $j \in \mathbb{Z}$, определяемое как $H_j = \bigoplus_{i \geq j} H^{(i)}$; отвечающая ему ортогональная проекция есть $p_j := \bigoplus_{i \geq j} p^{(i)}$. Мы используем специальное обозначение для разложения любого элемента $b \in B(H)$ в соответствии с разбиением $H = H_j^\perp \oplus H_j$, а именно

$$b = \begin{pmatrix} b_{--}(j) & b_{-+}(j) \\ b_{+-}(j) & b_{++}(j) \end{pmatrix}.$$

Далее рассмотрим группу, являющуюся отправной точкой построения пары волновых матриц для двумерной иерархии Тоды. Эта группа выбирается так, чтобы коэффициенты решения можно было выразить в терминах некоторых определителей, см. [7]. Рассмотрим множество операторов

$$\text{Id} + \mathcal{N} = \{\text{Id} + A \mid A: H \mapsto H \text{ – ядерный оператор}\}$$

с метрикой, определяемой как

$$\|(\text{Id} + A_1) - (\text{Id} + A_2)\|_1 = \|A_1 - A_2\|_1,$$

где $\|\cdot\|_1$ обозначает следовую норму на $\mathcal{N}$. Напомним, что [8] любой оператор вида $\text{Id} + A$ обратим, если и только если $\det(\text{Id} + A) \neq 0$, и что обратный оператор также принадлежит к классу $\text{Id} + \mathcal{N}$. Поэтому подмножество G_1 , определяемое как

$$G_1 = \{g \in \text{GL}(H) \cap \text{Id} + \mathcal{N}\},$$

является банаховой группой Ли с алгеброй Ли $\mathcal{G}_1$, задаваемой пространством ядерных операторов на H . Алгебра Ли $\mathcal{G}_1$ есть сумма следующих подалгебр Ли:

$$\mathcal{P}_1 := \{p = (p_{ij}) \in \mathcal{G}_1 \mid p_{ij} = 0 \text{ для всех } i > j\}$$

и

$$\mathcal{U}_- := \{u = (u_{ij}) \in \mathcal{G}_1 \mid u_{ij} = 0 \text{ для всех } i \leq j\}.$$

Соответствующие им группы Ли имеют вид

$$P_1 := \{p = (p_{ij}) \in G_1 \mid p_{ij} = 0 \text{ для всех } i > j\}$$

и

$$U_- := \left\{ u = (u_{ij}) \in G \mid \begin{array}{ll} u_{ij} = 0 & \text{для всех } i < j \\ u_{ii} = \text{Id} & \text{для всех } i \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}.$$

Наборы $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ -матриц, отвечающие группам P_1 и U_- , обозначаются как $[P_1]$ и $[U_-]$. Поскольку отображение из $\mathcal{U}_- \times P_1$ в G_1 , определяемое как $(u, p) \mapsto e^u e^p$, есть локальный диффеоморфизм в точке $(0, 0)$, множество $U_- P$ является открытым подмножеством в G_1 . Его можно охарактеризовать так же, как и в конечномерном случае.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. Пусть $\Omega \subset G$ – набор всех $g \in G_1$ таких, что $g_{--}(i)$ является обратимым для всех $i \in \mathbb{Z}$. Тогда Ω совпадает с $U_- P_1$ и называется большой клеткой в G_1 .

Форма волновых матриц φ_0 и ψ_0 позволяет определить коммутирующие потоки, соответствующие двумерной иерархии Тоды, однако ни одна из этих матриц не может появиться как $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ -матрица какого-либо оператора из G_1 . При этом они представляют собой естественные компоненты группы коммутирующих потоков, связанных с $\mathbf{h}$, которая вкладывается в $\mathrm{GL}(H)$. Для каждого $r > 1$ рассмотрим кольцо

$$A_r = \{z \in \mathbb{C} \mid r^{-1} \leq |z| \leq r\}$$

вокруг единичной окружности S^1 . Пусть U – любая открытая связная окрестность этого кольца в комплексной плоскости. Тогда будем писать $\Gamma_r(U, \mathbf{h})$ для множества голоморфных отображений $\gamma: U \mapsto \mathbf{h}$ таких, что $\det(\gamma(u)) \neq 0$ для всех $u \in U$. Это множество есть банахова группа Ли с соответствующей равномерной сходимостью на A_r . Ее прямой предел по r обозначим как $\Gamma(\mathbf{h})$. Каждое $\gamma \in \Gamma(\mathbf{h})$ можно разложить в ряд Фурье

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \gamma_i z^i, \quad \text{где } \gamma_i \in \mathbf{h}.$$

Мы получаем непрерывное вложение $\Gamma(\mathbf{h})$ в $\mathrm{GL}(H)$ в соответствии с тем, что $\Gamma(\mathbf{h})$ действует на H умножением слева на этот ряд. Таким образом определен ограниченный оператор $M_\gamma: H \mapsto H$. Заметим, что пересечение G_1 и образа $\Gamma(\mathbf{h})$ равно единице. Если $\gamma(0) \in \Gamma(\mathbf{h})$ обозначает элемент $u \mapsto \mathrm{Id} u^{-1}$, то матрица $M_{\gamma(0)}$ просто равна Λ . Умножение слева на матрицу $A \in gl_k(\mathbb{C})$ определяет ограниченный оператор M_A из H , его матрица равна $i_k(A)$ и, аналогично случаю $\Gamma(\mathbf{h})$, оператор M_A принадлежит алгебре Ли $\mathcal{G}_1$, только если A равно нулю. Поскольку все операторы в $B \in B(H)$, коммутирующие с $M_{\gamma(0)}$, можно записать в виде

$$B = \sum_{i \in \mathbb{Z}} M_{B_i} M_{\gamma(0)}^i, \quad \text{где } B_i \in gl_k(\mathbb{C}),$$

мы видим, что $\Gamma(\mathbf{h})$ содержит большинство направлений, коммутирующих с $M_{\gamma(0)}$ и M_A , $A \in \mathbf{h}$. Заметим, что из такого выбора вложения $\Gamma(\mathbf{h})$ в $\mathrm{GL}(H)$ следует, что

$$[M_\gamma] = \sum_{i \in \mathbb{Z}} i_k(\gamma_i) \Lambda^{-ki}.$$

Теперь рассмотрим вид этих потоков подробнее. Пусть $\mathbf{h}_{ss}$ – подмножество полупростых элементов в $\mathbf{h}$ и пусть $\mathbf{h}_n$ – набор нильпотентных элементов в $\mathbf{h}$. Из того

факта, что $\mathbf{h}$ является прямой суммой этих подпространств, следует, что группа $\Gamma(\mathbf{h})$ является прямым произведением групп

$$\Gamma(\mathbf{h})_{ss} := \{\gamma \mid \gamma \in \Gamma(\mathbf{h}), \gamma(u) \in \mathbf{h}_{ss} \text{ для всех } u\}$$

и

$$\Gamma(\mathbf{h})_u := \{\gamma \mid \gamma \in \Gamma(\mathbf{h}), \gamma(u) \text{ является унитарной для всех } u\}.$$

Теперь легко видеть, что любое $\gamma \in \Gamma(\mathbf{h})_u$ можно записать в виде

$$\gamma = \exp\left(\sum_{s \in \mathbb{Z}} k_s z^s\right) = \exp\left(\sum_{s > 0} k_s z^s\right) \exp\left(\sum_{s \leq 0} k_s z^s\right),$$

где $k_s \in \mathbf{h}_n$ для всех $s \in \mathbb{Z}$. Это показывает, что элементы $\Gamma(\mathbf{h})_u$ разлагаются в точности на элементы, которые имеют аналитическое продолжение во внутренность S^1 , и элементы, которые голоморфно продолжаются на “бесконечности”.

Как и в случае группы $\Gamma(\mathbf{h})_{ss}$, напомним, что если U – открытая связная окрестность окружности S^1 , то любое голоморфное отображение $f: U \rightarrow \mathbb{C}^*$ разлагается как

$$f(z) = \left\{1 + \sum_{i > 0} b_i z^i\right\} z^m \left\{\sum_{j \leq 0} c_j z^j\right\}, \quad \text{где } c_0 \neq 0 \text{ и } m \in \mathbb{Z}.$$

Применяя это к группе $\Gamma(\mathbf{h})_{ss}$, мы приходим к следующему разложению для $\Gamma(\mathbf{h})$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2. *Существует подгруппа $\Delta(\mathbf{h})$ в $\Gamma(\mathbf{h})_{ss}$, изоморфная $\mathbb{Z}^r$, где r – размерность $\mathbf{h}_{ss}$, такая, что $\Gamma(\mathbf{h}) = \Gamma(\mathbf{h})_+ \Delta(\mathbf{h}) \Gamma(\mathbf{h})_-$,*

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{h})_+ &= \left\{ \gamma \mid \gamma = \exp\left(\sum_{s \leq 0} \gamma_s z^s\right), \quad \gamma_s \in \mathbf{h} \text{ для всех } s \leq 0 \right\}, \\ \Gamma(\mathbf{h})_- &= \left\{ \gamma \mid \gamma = \exp\left(\sum_{s > 0} \gamma_s z^s\right), \quad \gamma_s \in \mathbf{h} \text{ для всех } s > 0 \right\}. \end{aligned}$$

В случае, когда $\mathbf{h}$ – диагональная матрица, можно взять

$$\Delta(\mathbf{h}) = \{\text{diag}(z^{m_1}, \dots, z^{m_k}) \mid m_i \in \mathbb{Z}\}. \quad (18)$$

Однако если мы возьмем унитарную алгебру (5), то группа $\Delta(\mathbf{h})$ сократится до подгруппы в (18), состоящей из элементов, для которых все m_i равны некоторому $m \in \mathbb{Z}$.

Если взять базисы $\{E_\alpha \mid 1 \leq \alpha \leq m\}$ и $\{F_\beta \mid 1 \leq \beta \leq m\}$ в $\mathbf{h}$, то для каждого элемента γ_+ из $\Gamma(\mathbf{h})_+$ и соответственно γ_- из $\Gamma(\mathbf{h})_-$ найдется такое $r > 1$, что

$$\begin{aligned} \gamma_+ &= \exp\left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^m t_{i\alpha} E_\alpha z^{-i}\right), \quad t_{i\alpha} \in \mathbb{C}, \quad \sum_{i,\alpha} |t_{i\alpha}| r^i < \infty, \\ \gamma_- &= \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^m s_{j\beta} F_\beta z^j\right), \quad s_{j\beta} \in \mathbb{C}, \quad \sum_{j,\beta} |s_{j\beta}| r^j < \infty. \end{aligned}$$

Другими словами, $t_{i\alpha}$ представляют собой координаты на $\Gamma(\mathbf{h})_+$ по отношению к направлениям $E_\alpha z^{-i}$, $\alpha = 1, \dots, m$, а $s_{j\beta}$ представляют собой координаты на $\Gamma(\mathbf{h})_-$ по отношению к направлениям $F_\beta z^j$, $j = 1, 2, \dots, \beta = 1, \dots, m$. Очевидно, что матрица для γ_+ совпадает с φ_0 , а матрица для γ_- — с ψ_0 , тем самым мы учитываем выражения “в окрестности бесконечности” и “в окрестности нуля”, привязанные к волновым матрицам.

Из утверждения 4.2 мы видим, что каждое $\gamma \in \Gamma(\mathbf{h})$ единственным образом может быть представлено в виде $\gamma = \gamma_+ \delta(\gamma) \gamma_-$, где $\gamma_+ \in \Gamma(\mathbf{h})_+$, $\delta(\gamma) \in \Delta(\mathbf{h})$ и $\gamma_- \in \Gamma(\mathbf{h})_-$. Поскольку ядерные операторы образуют двусторонний идеал в кольце ограниченных операторов на H , группа $\Gamma(\mathbf{h})$ действует сопряжением на группе G_1 . Для каждого $g \in G_1$ рассмотрим открытое подмножество в $\Gamma(\mathbf{h})$, определяемое как

$$\Gamma(g, \mathbf{h}) = \{\gamma \in \Gamma(\mathbf{h}) \mid \gamma g \gamma^{-1} \in \Omega\}.$$

По определению для всех $\gamma \in \Gamma(g, \mathbf{h})$ имеем

$$[\gamma g \gamma^{-1}] = \Phi_-(\gamma, g)^{-1} \Phi_+(\gamma, g), \quad (19)$$

где $\Phi_-(\gamma, g) \in [U_-]$ и $\Phi_+(\gamma, g) \in [P_1]$. В качестве кольца R возьмем теперь набор голоморфных функций на $\Gamma(g, \mathbf{h})$, тогда $\Phi_-(\gamma, g) \in LT_0(R)$ и $\Phi_+(\gamma, g) \in UT_0(R)$. Пусть

$$\widehat{\Psi}_-(\gamma, g) := \Phi_-(\gamma, g)[\gamma_-], \quad \widehat{\Psi}_+(\gamma, g) := \Phi_+(\gamma, g)[\gamma_+].$$

Тогда $\widehat{\Psi}_-(\gamma, g) \in LT_0(R)$, $\widehat{\Psi}_+(\gamma, g) \in UT_0(R)$. Из уравнения (19) следует, что эти матрицы связаны следующим образом:

$$\widehat{\Psi}_-(\gamma, g)[\delta(\gamma)][\gamma_+][g] = \widehat{\Psi}_+(\gamma, g)[\delta(\gamma)][\gamma_-], \quad (20)$$

где произведения матриц в обеих частях равенства хорошо определены, поскольку они соответствуют композиции ограниченных операторов на H . Очевидно,

$$\Psi_-(\gamma, g) := \widehat{\Psi}_-(\gamma, g)[\delta(\gamma)][\gamma_+] \in M^{(\infty)}(\delta(\gamma)),$$

$$\Psi_+(\gamma, g) := \widehat{\Psi}_+(\gamma, g)[\delta(\gamma)][\gamma_-] \in M^{(0)}(\delta(\gamma)),$$

и пара (Ψ_+, Ψ_-) является парой волновых матриц типа $[\delta(\gamma)]$ для двумерной иерархии Тоды. Дифференцируя левую часть уравнения (20) по $t_{i\alpha}$, получаем

$$\begin{aligned} \{\partial_{i\alpha} \widehat{\Psi}_-(\gamma, g) + \widehat{\Psi}_-(\gamma, g) \Lambda^{ik} i_k(E_\alpha)\}[\gamma_+][g] = \\ = \{\partial_{i\alpha} \widehat{\Psi}_-(\gamma, g) \cdot \widehat{\Psi}_-(\gamma, g)^{-1} + \mathcal{L}(\widehat{\Psi}_-)^i U_\alpha(\widehat{\Psi}_-)\} \Psi_-(\gamma, g)[g]. \end{aligned}$$

Применяя $\partial_{i\alpha}$ к правой части, получаем

$$\partial_{i\alpha} \widehat{\Psi}_+(\gamma, g) \cdot [\delta(\gamma)][\gamma_-] = \{\partial_{i\alpha} \widehat{\Psi}_+(\gamma, g) \cdot \widehat{\Psi}_+(\gamma, g)^{-1}\} \Psi_+(\gamma, g),$$

и комбинация обоих выражений дает

$$\partial_{i\alpha} \widehat{\Psi}_-(\gamma, g) \cdot \widehat{\Psi}_-(\gamma, g)^{-1} + \mathcal{L}(\widehat{\Psi}_-)^i U_\alpha(\widehat{\Psi}_-) = \partial_{i\alpha} \widehat{\Psi}_+(\gamma, g) \cdot \widehat{\Psi}_+(\gamma, g)^{-1}. \quad (21)$$

Теперь старший коэффициент матрицы $\widehat{\Psi}_-(\gamma, g) \in LT_0(R)$ равен единице, откуда следует, что $\partial_{i\alpha}\widehat{\Psi}_-(\gamma, g) \cdot \widehat{\Psi}_-(\gamma, g)^{-1} \in LT_{-1}(R)$. Тогда из уравнения (21) мы заключаем, что выполняются соотношения

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}(\widehat{\Psi}_-)^i U_\alpha(\widehat{\Psi}_-))_+ &= \partial_{i\alpha}\widehat{\Psi}_+(\gamma, g) \cdot \widehat{\Psi}_+(\gamma, g)^{-1}, \\ \partial_{i\alpha}\widehat{\Psi}_-(\gamma, g) \cdot \widehat{\Psi}_-(\gamma, g)^{-1} &= (\mathcal{L}(\widehat{\Psi}_-)^i U_\alpha(\widehat{\Psi}_-))_-. \end{aligned}$$

В частности, отсюда следует, что часть уравнений линеаризации удовлетворяется для Ψ_+ и Ψ_- :

$$\partial_{i\alpha}\Psi_+ = (\mathcal{L}(\widehat{\Psi}_-)^i U_\alpha(\widehat{\Psi}_-))_+(\Psi_+), \quad \partial_{i\alpha}\Psi_- = (\mathcal{L}(\widehat{\Psi}_-)^i U_\alpha(\widehat{\Psi}_-))_-(\Psi_-).$$

Для параметров $s_{j\beta}$ мы действуем аналогичным образом: дифференцируем обе части уравнения (20), в результате получаем

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}(\widehat{\Psi}_+)^j V_\beta(\widehat{\Psi}_+))_- &= \partial_{j\beta}\widehat{\Psi}_-(\gamma, g) \cdot \widehat{\Psi}_-(\gamma, g)^{-1}, \\ (\mathcal{M}(\widehat{\Psi}_+)^j V_\beta(\widehat{\Psi}_+))_+ &= \partial_{j\beta}\widehat{\Psi}_+(\gamma, g) \cdot \widehat{\Psi}_+(\gamma, g)^{-1}, \end{aligned}$$

откуда следуют оставшиеся уравнения для Ψ_+ и Ψ_- :

$$\partial_{j\beta}\Psi_+ = (\mathcal{M}(\widehat{\Psi}_+)^j V_\beta(\widehat{\Psi}_+))_-(\Psi_+), \quad \partial_{j\beta}\Psi_- = (\mathcal{M}(\widehat{\Psi}_+)^j V_\beta(\widehat{\Psi}_+))_-(\Psi_-).$$

Поскольку $\widehat{\Psi}_-(\gamma, g) := \Phi_-(\gamma, g)[\gamma_-]$ и $\widehat{\Psi}_+(\gamma, g) := \Phi_-(\gamma, g)[\gamma_+]$, возмущения удовлетворяют соотношениям

$$\mathcal{L}(\widehat{\Psi}_-) = \mathcal{L}(\Phi_-), \quad U_\alpha(\widehat{\Psi}_-) = U_\alpha(\Phi_-), \quad \mathcal{M}(\widehat{\Psi}_+) = \mathcal{M}(\Phi_+), \quad V_\beta(\widehat{\Psi}_+) = V_\beta(\Phi_+).$$

Окончательный результат теперь приобретает вид сформулированной во введении теоремы, в которой разложение $[\gamma g \gamma^{-1}] = \Phi_-^{-1} \Phi_+$ соответствует утверждению 4.1.

Благодарности. Работа выполнена в рамках программы NWO-РФФИ “Геометрические аспекты квантовой теории и интегрируемых систем” (проект № 047.017.015).

Список литературы

- [1] S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **397**:1–2 (1993), 339–378.
- [2] K. Ueno, K. Takasaki, “Toda lattice hierarchy”, *Group Representations and Systems of Differential Equations* (Tokyo, 1982), Adv. Stud. Pure Math., **4**, ed. K. Okamoto, North-Holland, Amsterdam–New York, 1984, 1–95.
- [3] G. F. Helminck, *Acta Appl. Math.*, **90**:1–2 (2006), 121–142.
- [4] G. F. Helminck, M. G. Mishina, S. V. Polenkova, *Bulg. J. Phys.*, **33**:Suppl. 2 (2006), 600–611.
- [5] M. Mulase, *J. Diff. Geom.*, **19**:2 (1984), 403–430.
- [6] G. Segal, G. Wilson, *Publ. Math. IHES*, **61** (1985), 5–65.
- [7] G. F. Helminck, S. V. Polenkova, “ τ -Functions for the two-dimensional infinite Toda-hierarchy associated with a commutative algebra”, in preparation.
- [8] A. Grothendieck, *Bull. Soc. Math. France*, **84** (1956), 319–384.