Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Абрамян, С. А. Вакуленко, Нелинейный метод Ритца и движение дефектов, *ТМФ*, 2008, том 155, номер 2, 202–214

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6205>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 13:46:12

© 2008 г.

А. К. Абрамян*, С. А. Вакуленко*

НЕЛИНЕЙНЫЙ МЕТОД РИТЦА И ДВИЖЕНИЕ ДЕФЕКТОВ

Рассматриваются некоторые специальные диссипативные системы, имеющие важные физические приложения. Построены приближенные решения, описывающие движение дефектов и систем дефектов. Развита теория взаимодействия движущихся дефектов и рассчитана сила трения, порожденная системой дефектов.

Ключевые слова: диссипативные системы, приближенные решения, кинки, взаимодействие кинков, трение.

1. ВВЕДЕНИЕ. ДИНАМИКА РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ

В данной работе рассматривается проблема построения некоторых приближенных решений для диссипативных систем. Мы рассматриваем приложения к некоторым важным физическим системам, в которых возможно движение дефектов и существуют сложные диссипативные структуры. Построена теория взаимодействия движущихся дефектов и рассчитана сила трения, порожденная системой дефектов.

Диссипативные динамические системы, такие, например, как квазилинейные параболические системы второго порядка, системы реакция-диффузия и системы связанных осцилляторов, описывают много важных эффектов в физике, химии и биологии (см., например, [1]–[3]). Однако явное аналитическое описание решений таких систем, как правило, отсутствует. Имеется ряд общих результатов, которые показывают, что при определенных условиях существует так называемый глобальный аттрактор и его фрактальная (или хаусдорфова) размерность конечна [4]–[7].

Возможны различные определения аттрактора, однако определения, полностью удовлетворительного как с физической, так и с математической точки зрения, пока, по-видимому, не существует [8]. Следующее определение чаще других встречается в работах по математической физике: множество $A \subset H$ есть глобальный аттрактор полугруппы S^t в H , если оно есть наименьшее замкнутое инвариантное глобально притягивающее множество.

*Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: abramian@mech.ipme.ru, vakulenfr@mail.ru

Аттрактор определяет поведение системы на больших временах t . Однако аттрактор – негладкое множество и даже не финитное объединение гладких подмногообразий. Следовательно, динамика системы, суженная на аттрактор, вообще говоря, не описывается системой дифференциальных уравнений. В некоторых случаях удается найти локально притягивающее инвариантное множество $M \subset H$, которое является гладким многообразием. Редуцированная динамика $S^t|_M$, суженная на M , определена с помощью системы дифференциальных уравнений. В большинстве случаев как многообразие M , так и динамика на нем не могут быть найдены явно.

Понятие инвариантной поверхности имеет смысл и для гамильтоновых систем. В частности, n -солитонное решение уравнения Кортевега–де Фриза является примером инвариантной поверхности. Дифференциальные уравнения, описывающие эволюцию параметров солитона, дают пример редуцированной динамики.

В настоящее время поведение траекторий на больших временах описаны для систем, обладающих функцией Ляпунова (градиентно-подобных), и так называемых монотонных систем [4]–[9]. В данной статье мы рассматриваем специальные системы, имеющие вариационную природу и обладающие функционалом Ляпунова. Такой функционал обычно может быть интерпретирован как энергия системы. Отметим, что даже малые возмущения таких систем характеризуются очень сложным динамическим поведением (см. обзор [9], а также [10], [11]). Для рассматриваемого в настоящей статье случая имеется несколько подходов.

1. Физический интуитивный подход, использующий вариационную формулировку. В функционал энергии подставляется пробная функция, найденная из физических соображений и зависящая от неизвестных параметров. Затем при построении уравнений для параметров применяется принцип Уизема или его аналоги [12]–[14]. При этом не требуется наличия малого параметра в задаче, но результат необходимо проверять численно.

2. В задаче есть малый параметр и возможно построение формально асимптотического решения (примеры см. в [15]–[21]). Отметим, что в некоторых случаях возможно строгое обоснование таких формул (см., например, [22], [23], где применяются методы из теории инвариантных многообразий). Для некоторых систем Тихонова (сингулярно-возмущенных систем) обоснование основано на методе сравнения решений (верхние и нижние решения) [24].

3. В диссипативных системах удается иногда дать явное и строгое описание инвариантной поверхности, особенно если в задаче есть малый параметр [10], [11], [22], [23]. Этот метод может давать обоснование асимптотических формул.

2. ПРИМЕРЫ

Приведем важные примеры.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим динамические системы, порожденные начально-краевыми задачами для параболических уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} u_t &= \epsilon^2 \Delta u + f(x, u, \nabla u), & f &\in C^2, \\ u(x, 0) &= u^0(x), & x &\in \Omega, & \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) &= 0, & x &\in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Такая задача порождает динамическую систему в пространстве $L_p(\Omega)$, выбор p зависит от f и n . Если решения априори ограничены в какой-либо слабой норме, то известные результаты [4] показывают, что эта система диссипативна и обладает конечномерным глобальным аттрактором. Если f не зависит от ∇u или пространственная размерность задачи n равна единице, то система (2.1) градиентно-подобна, и, следовательно, все или почти все траектории конвергентны. Конвергентность означает, что траектория (решение) стремится к не зависящему от времени решению системы (2.1). Заметим, что эти стационарные решения могут описывать сложные диссипативные структуры [5], [18]. В случае аналитических по u нелинейностей f все траектории обладают таким свойством [9]. Если f зависит от ∇u и $n > 1$, то система принадлежит классу строго монотонных систем, и можно утверждать, что почти все траектории конвергентны, т.е. сходятся к стационарным решениям $u_{\text{eq}}(x)$. Число таких стационарных решений и “сложность” (размерность) аттрактора растут при уменьшении ϵ . Для этого случая строго доказано, что возможны хаотические режимы, однако они реализуемы для уравнений специального вида и специальных начальных данных [9].

ПРИМЕР 2. Движение дефектов структуры в нелинейной диссипативной среде. Модель предложена в работе [25] и позволяет вычислить силу трения, порожденную одиночным дефектом, а также системой дефектов. Рассмотрим функционал

$$E = -f_0 q + \int_{-\infty}^{\infty} (d\phi_x^2 + \Phi(\phi) + \kappa\delta(x-q)\phi^2) dx, \quad (2.2)$$

где ϕ – параметр порядка, описывающий фазовый переход, $\Phi(\phi)$ – функция, имеющая физический смысл энергии, равномерно ограниченная снизу (примером является потенциал Гинзбурга–Ландау $\Phi = \epsilon\phi^2 + b\phi^4$, где ϵ, b – параметры), $q = q(t)$ есть координата дефекта, d, f_0 – константы, при этом f_0 имеет смысл силы, действующей на дефект. Функционал E задает энергию системы, включающей поле ϕ и дефект. Основная идея модели состоит в том, что дефект порождает возбуждение среды (локальный фазовый переход). Это приводит к появлению силы трения. Динамические уравнения имеют вид

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\delta E}{\delta \phi}, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{\delta E}{\delta q}. \quad (2.3)$$

Эта система состоит из уравнения типа (2.1) с δ -образным возмущением и дифференциального уравнения для координаты q дефекта.

В явном виде уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \phi_t &= d\phi_{xx} + \Phi' - \kappa\delta(x-q)\phi, \\ \frac{dq}{dt} &= f_0 - \kappa\phi(q)\bar{\phi}_x(q), \end{aligned}$$

где, учитывая, что ϕ_x претерпевает скачок при $x = q$, мы ввели величину $\bar{\phi}_x(q)$, равную полусумме значений справа и слева: $\bar{\phi}_x(q) = (\phi_x(q+) + \phi_x(q-))/2$.

Для описания системы дефектов мы можем использовать функционал

$$E = -f_0 \sum_k q_k + \int_{-\infty}^{\infty} \left(d\phi_x^2 + \Phi(\phi) + \kappa \sum_k \delta(x - q_k) \phi^2 \right) dx, \quad (2.4)$$

где $k = 1, 2, \dots, N$, q_k – координата k -го дефекта.

В разделах 3, 4 дан обзор некоторых асимптотических подходов к описанию движения локализованных дефектов. Этот обзор, конечно, не полон из-за ограниченности объема статьи. В частности, мы не приводим подробного изложения работ Васильевой, Бутузова и Нефедова [15], [16], [20], [21], [24], где разработана асимптотическая теория контрастных структур, имеющая применение в различных прикладных задачах. Новые результаты, полученные с использованием методов разделов 3, 4 и связанные с вычислением силы трения при движении дефекта, представлены в разделах 5–7.

3. МЕТОД МЕДЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ И МЕТОД РИТЦА

3.1. Метод медленной поверхности (адиабатический метод). Рассмотрим эволюционное уравнение в гильбертовом (банаховом) пространстве H :

$$\frac{dw}{dt} = Aw + F(w), \quad w \in H, \quad (3.1)$$

где A – отрицательно-определенный самосопряженный (возможно, неограниченный) оператор, нелинейный оператор F подчинен некоторым условиям, гарантирующим существование полугруппы S^t . Предположим, что имеется семейство приближенных решений $w = U(\mathcal{P})$ этого уравнения, зависящих от параметра $\mathcal{P}$. Относительно этого параметра предполагаем, что он может иметь функциональную природу, т.е. также может принадлежать банахову пространству B .

Возможна следующая процедура, дающая возможность уточнить приближенное решение. В некоторых случаях ее можно строго обосновать (одна такая ситуация разобрана ниже). В других ситуациях она ведет к приближенному решению, корректность которого можно проверить лишь сравнением с численным решением [12]–[14] или с асимптотическим решением [17]–[19].

Будем искать решение уравнения (3.1) в виде

$$w = U(\mathcal{P}(t)) + \tilde{w}(t), \quad (3.2)$$

где мы предполагаем, что параметр слабо зависит от времени и $\tilde{w}(t)$ – малая поправка. Тогда уравнение (3.1) может быть переписано в виде

$$\frac{d\tilde{w}}{dt} = A\tilde{w} + F'(U)\tilde{w} + g(t), \quad \tilde{w} \in H, \quad (3.3)$$

где слагаемое g мало и определено соотношением

$$\begin{aligned} g &= g_0 + g_1, \quad g_1 = F(U + \tilde{w}) - F(U) - F'(U)\tilde{w}, \\ g_0 &= AU + F(U) - U'(\mathcal{P}) \frac{d\mathcal{P}}{dt}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Член g_1 обычно мал по сравнению с g_0 .

Теперь вместо одной переменной w мы имеем две переменные $\tilde{w}$ и $\mathcal{P}$. Чтобы определить параметр $\mathcal{P}$ однозначно, потребуем, чтобы поправка была минимальна в норме H . Это ведет к условию ортогональности

$$(\tilde{w}, U'_{\mathcal{P}})_H = 0. \quad (3.5)$$

Предположим для простоты, что линеаризованный оператор $w \rightarrow Aw + F'(U)w$ самосопряжен. Тогда условие (3.5) ведет к дифференциальным уравнениям для параметра $\mathcal{P}$. После стандартных вычислений, пренебрегая малыми вкладами, имеем

$$(U'_{\mathcal{P}} \mathcal{P}_t, U'_{\mathcal{P}})_H = (AU + F(U), U'_{\mathcal{P}})_H. \quad (3.6)$$

Имеются частные классы систем, где применение данного подхода упрощается благодаря их вариационной природе.

3.2. Метод Ритца и принцип Уизема. Для систем, имеющих вариационную природу, мы можем несколько упростить громоздкую процедуру вычислений. Многие физические системы, в том числе (2.1), (2.3), могут быть описаны уравнением вида

$$\frac{\delta D}{\delta u_t} = -\frac{\delta E}{\delta u}, \quad (3.7)$$

где D – функционал диссипации. Для (2.1)

$$D = \frac{1}{2} \int u_t^2 dx,$$

для (2.3)

$$D = \frac{1}{2} q_t^2 + \frac{1}{2} \int \phi_t^2 dx.$$

Предположим, что $U(\mathcal{P})$ есть приближенное решение системы (3.7) для всех $\mathcal{P}$. Введем функционалы

$$\overline{D}(\mathcal{P}_t) = D[U_t(\mathcal{P})], \quad \overline{E}(\mathcal{P}) = E[U(\mathcal{P})], \quad (3.8)$$

которые являются функционалами D и E , вычисленными в случае приближенного решения. Мы утверждаем, что медленная динамика искомого параметра $\mathcal{P}$ определена вариационными уравнениями

$$\frac{\delta \overline{D}}{\delta \mathcal{P}_t} = -\frac{\delta \overline{E}}{\delta \mathcal{P}}. \quad (3.9)$$

Примеры будут приведены ниже. Отметим, что в стационарном случае $\mathcal{P}_t = 0$ уравнения (3.9) сводятся к

$$\frac{\delta \overline{E}}{\delta \mathcal{P}} = 0. \quad (3.10)$$

Эти уравнения выражают известный принцип Уизема. Таким образом, уравнение (3.8) может быть рассмотрено как обобщение принципа Уизема на специальный

класс диссипативных систем. Вопрос о связи (3.9) и (3.6) не вполне тривиален. Он был рассмотрен в работах [17], [18] для недиссипативных систем. Для простейшего случая, где $u \in H = L_2(\Omega)$, $D = \frac{1}{2} \int u_t^2 dx$, $F(u) = -\Phi'(u)$, A – самосопряженный оператор и U'_P лежит в ядре этого оператора, уравнения (3.6) и (3.9) эквивалентны, что следует из формулы дифференцирования композиции $\Phi(U(P))'_P = (\Phi'_u, U'_P)$.

3.3. Метод медленной поверхности и принцип подчинения. Рассмотрим еще один частный класс систем, когда метод медленной поверхности применим и может быть даже строго обоснован при некоторых естественных дополнительных условиях. Рассмотрим системы вида

$$\begin{aligned} u_t &= Au + \lambda g(u, q), \\ q_t &= \lambda Q(u, q), \end{aligned} \quad (3.11)$$

где λ – малый параметр, A – линейный оператор. Предположим, спектр оператора A лежит в левой полуплоскости: $\text{Spec } A < -\sigma < 0$. Тогда для достаточно малых λ и при достаточно гладких g и Q существуют решения вида $u = U(q)$, образующие инвариантную поверхность в фазовом пространстве системы. В первом приближении эти решения и динамика медленных переменных q заданы уравнениями

$$q_t = \lambda Q(U(q), q), \quad AU = -\lambda g(U, q). \quad (3.12)$$

Эти формулы могут быть интерпретированы как “принцип подчинения”: быстрые моды подчиняются медленным. Этот подход применялся в работах [22], [23] для обоснования формально асимптотических формул для взаимодействия кинков, в работах [10], [11] – для доказательства существования хаотических решений.

4. ДВИЖЕНИЕ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ МОД

В качестве приложения рассмотрим теорию взаимодействия кинков для уравнения Гинзбурга–Ландау, имеющего важные физические приложения. Запишем это уравнение в виде

$$u_t = u_{xx} + u - u^3. \quad (4.1)$$

Рассмотрим задачу о взаимодействии двух кинков, первоначально удаленных друг от друга. Соответствующие начальные данные имеют вид

$$u = 1 + \text{th}(p_0(x - q_0)) - \text{th}(p_0(x + q_0)), \quad p_0 = 2^{-1/2}. \quad (4.2)$$

Предположим сначала, что кинки удалены, т.е. $q_0 \gg 1$. Тогда величина q_0^{-1} становится малым параметром.

С помощью этой задачи можно проиллюстрировать различные подходы, описанные в разделе 3. Методом медленной поверхности задача была строго решена в [22], [23], метод Ритца был применен в [18] (на уровне формальных асимптотик). Все эти результаты верны для случая $q_0 \gg 1$.

Известно, что в конце концов кинки сближаются, аннигилируют и возникает решение $u \equiv 1$. Конечный этап взаимодействия кинков, когда они близки, был проанализирован в работе [12]. В этом случае у нас нет малого параметра $1/q_0$, однако подход успешно работает (как показывает сравнение с прямым численным расчетом).

4.1. Решение методом медленной поверхности. При рассмотрении случая $q_0 \gg 1$ мы будем следовать работе [23]. Представим решение, соответствующее двум кинкам, в следующем виде (такое представление возможно в силу симметрии):

$$u = \begin{cases} \text{th}(p_0(x + q(t))), & x < 0, \\ \text{th}(p_0(x - q(t))), & x > 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

где $q(t)$ – неизвестная медленная переменная, определяющая координату кинка. Подсчитаем невязку g_0 из формулы (3.6). Здесь $A = d^2/dx^2$, $F = u - u^3$. Выражения $\text{th}(p_0(x \pm q))$ являются точными решениями уравнения (4.1) для всех x . Поэтому мы должны рассмотреть только точку $x = 0$, где имеются экспоненциально малый разрыв порядка $O(e^{-cq})$ в самой функции и разрыв того же порядка в производной. Следовательно, $AU + F(U) = 4\delta(x)e^{-\sqrt{2}q}$. Применяя (3.6), получаем

$$M \frac{dq}{dt} = -e^{-\sqrt{2}q}, \quad M > 0. \quad (4.4)$$

Из этого уравнения видно, что кинки сближаются со временем. Точно такое же уравнение может быть установлено из вариационных соображений и из формально-асимптотических формул. Оно остается верным, пока $q \gg 1$.

Рассмотрим теперь цепочку кинков с координатами $q_1 < \dots < q_N$. Мы получаем следующую систему уравнений для q_i :

$$M \frac{dq_i}{dt} = e^{a(q_i - q_{i+1})} - e^{a(q_{i-1} - q_i)}. \quad (4.5)$$

Эта цепочка аналогична цепочке Тоды, но с первой производной в левой части. Постоянные M и a положительны, и их точные численные значения не играют особой роли при анализе решений. В данном случае $a = \sqrt{2}$.

Динамика, определяемая уравнениями (4.5), обладает следующими свойствами. Имеется одно неустойчивое равновесное состояние, когда все кинки находятся на одном расстоянии друг от друга. Система имеет функцию Ляпунова (“энергию”) вида $-\sum e^{a(q_i - q_{i+1})}$. Это означает, что ее поведение носит релаксационный характер и в этом случае не бывает периодических траекторий.

Поведение системы кинков таково: сначала взаимодействуют два ближайших кинка, в конце концов они сливаются, а затем сливаются два следующих кинка и т.д. В работах [22], [23] приведен строгий вывод системы (4.5).

4.2. Решение методом Ритца. Вернемся к простейшему случаю двух кинков, однако не будем предполагать, что они разделены большим расстоянием. Формальная процедура состоит в подстановке в функционал энергии следующего приближенного решения:

$$u = 1 + \text{th}(p(x - q)) - \text{th}(p(x + q)), \quad (4.6)$$

где $p(t), q(t)$ – неизвестные функции времени, в начальный момент $p(0) = p_0 = 2^{-1/2}$, $q(0) = q_0 \gg 1$.

Путем численных расчетов из (3.6) получается система двух уравнений [12]. Ее решение ведет себя следующим образом. При $q \gg 1$ (4.6) совпадает с (4.3), а величина p остается практически постоянной и равной p_0 . Координата q уменьшается, и кинки сближаются. При $q \approx 1$ величина p начинает возрастать, и соответственно кинки расплываются, сливаются и исчезают при больших временах. Эту задачу проще решать с помощью метода Галеркина, чем методом Ритца. Для задачи, рассмотренной в следующем разделе, наоборот, применение метода Ритца более удобно. Ниже мы приводим новые результаты, касающиеся модели (2.3).

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ МЕТОДОМ РИТЦА СИЛЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ ДЕФЕКТАМИ

Для описания системы дефектов мы используем функционал энергии

$$E = -f_0 \sum_k q_k + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{2} \phi_x^2 + \Phi(\phi) + \frac{\kappa}{2} \sum_k \delta(x - q_k) \phi^2 \right) dx, \quad (5.1)$$

где q_k , $k = 1, 2, \dots, N$, – координата k -го дефекта. Рассмотрим сначала случай $f_0 = 0$.

5.1. Случай, когда действующая на дефект сила $f_0 = 0$. Структура одиночного дефекта. Построим сначала решение, соответствующее одиночному дефекту. Ясно, что решение четно относительно дефекта и дефект неподвижен. Предположим, что дефект локализован в начале координат и $\lim_{z \rightarrow \infty} \phi(z) = 0$, $z \rightarrow \infty$. Мы получаем для поля ϕ

$$\frac{d}{2} \phi_x^2 - \Phi(\phi) = \begin{cases} C_+, & x > 0, \\ C_-, & x < 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Предположим, что функция Φ в нуле равна нулю, например

$$\Phi = \frac{\epsilon \phi^2}{2} + \frac{u \phi^4}{4}. \quad (5.3)$$

Тогда $C_{\pm} = 0$. Рассматривая (5.2) в нуле, получаем $\frac{d}{2} \beta^2 = \Phi(A)$, где мы обозначили

$$\beta = \phi_x(0^-) = -\phi_x(0^+), \quad \phi(0) = A.$$

Снова рассматривая особенность в нуле, получаем $2d\beta = \kappa A$. Окончательно находим

$$(\kappa A)^2 = 8d\Phi(A). \quad (5.4)$$

Из этого уравнения находим амплитуду A . Если все степени в полиноме $\Phi(A)$ входят с положительными коэффициентами и наименьшая степень равна двум, то в нелинейном случае имеем следующий критерий существования нетривиального решения:

$$\kappa^2 > 4d\Phi''(0). \quad (5.5)$$

В случае, когда Φ определяется формулой (5.3), из (5.5) получаем условие на параметры: $\kappa > 2\sqrt{\epsilon d}$. Отметим, что асимптотика поля ϕ на больших расстояниях имеет вид

$$\phi(x) \approx Re^{-a|x|}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (5.6)$$

где $2da^2 = \Phi''(0)$. Полученное решение обозначим $\eta(x)$. Ясно, что если дефект находится в точке $x = q$, то решение принимает вид $\eta(x - q)$.

5.2. Случай $f_0 = 0$. Взаимодействие дефектов. Предположим, что дефекты находятся на больших расстояниях друг от друга, т.е. $q_1 < q_2 < \dots < q_N$ и $\min |q_i - q_{i+1}| \gg 1$.

Чтобы применить метод Ритца, мы должны построить приближенное решение, зависящее от медленных переменных q_i , подставить его в выражения для энергии и диссипации и продифференцировать эти выражения по q_i и dq_i/dt соответственно. Рассматриваем случай, когда Φ выражается формулой (5.3). Подставляя

$$\phi_{\text{appr}} = U = \sum_{k=1}^N \eta(x - q_k) \quad (5.7)$$

в выражение для энергии и отбрасывая трансляционно-инвариантные члены, не зависящие от q_k (поскольку их дифференцирование дает ноль), имеем

$$\bar{E} = E[U] = E_0 + E_1,$$

где

$$E_0 = \frac{u}{4} \sum'_{k_1, k_2, k_3, k_4} \int \eta(x - q_{k_1}) \eta(x - q_{k_2}) \eta(x - q_{k_3}) \eta(x - q_{k_4}) dx,$$

$$E_1 = -\frac{\kappa}{2} \sum'_{k, k_1, k_2} \eta(q_{k_1} - q_k) \eta(q_{k_2} - q_k),$$

где обозначение $\sum'$ означает, что члены $k_1 = k_2 = k_3 = k_4$ и $k = k_1 = k_2$ исключены, поскольку они входят в трансляционно-инвариантное слагаемое. Рассмотрим сумму E_1 . Для каждого k главный вклад вносят члены $k_1 = k$, $k_2 = k + 1$, $k_1 = k$, $k_2 = k - 1$, $k_2 = k$, $k_1 = k - 1$, $k_2 = k$, $k_1 = k + 1$.

В предположении, что дефектов много ($N \gg 1$), все вклады примерно одинаковы. Теперь ясно, что

$$\bar{E}_1 = -2\kappa \sum_k \eta(q_{k+1} - q_k) \eta(0) + \text{малая поправка.} \quad (5.8)$$

В результате имеем

$$\bar{E}_1 = -2AR\kappa \sum_k e^{a(q_k - q_{k+1})}. \quad (5.9)$$

Рассмотрим сумму $\bar{E}_0$. В этой сумме наибольший вклад дают члены с $k_1 = k_2 = k_3 = k$ и $k_4 = k \pm 1$. Подсчеты приводят к следующей формуле:

$$\bar{E}_0 \approx -C_1 u R \sum_k e^{a(q_k - q_{k+1})}, \quad (5.10)$$

где постоянная $C_1 > 0$ пропорциональна интегралу $\int e^{az} \eta^3(z) dz$. Этот интеграл в общем случае не вычисляется аналитически, но для анализа поведения системы его точное значение неважно. Окончательно получаем

$$\bar{E}(q) = -R(C_1 u + 2A) \sum_k e^{a(q_k - q_{k+1})}. \quad (5.11)$$

Рассмотрим функционал диссипации D . Мы имеем

$$D = \frac{1}{2} \left(\sum \left(\frac{dq_k}{dt} \right)^2 + \int \phi_t^2 dx \right). \quad (5.12)$$

Итак, в приближении больших расстояний между дефектами снова имеем систему уравнений (4.5), т.е. параболический аналог цепочки Тоды. Качественное поведение решений цепочки описано в п. 4.1. Чтобы обобщить наш подход на случай $f_0 \neq 0$, рассмотрим сначала более подробно случай одиночного дефекта.

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ СИЛЫ ТРЕНИЯ ДЛЯ ОДИНОЧНОГО ДЕФЕКТА

Обозначим неизвестную скорость дефекта $V(t)$. В принципе она может зависеть от времени. Следующий подход применим, когда производная dV/dt мала (что имеет место, если сила f_0 также мала).

В предположении малости ускорения мы получаем, что структура дефекта имеет вид $\phi = \phi(x - q(t))$, где q – координата дефекта, определенная уравнением (применим метод медленной поверхности, или принцип подчинения)

$$d\phi_{zz} + V\phi_z - \epsilon\phi - u\phi^3 + \kappa\delta(z)\phi = 0. \quad (6.1)$$

Решение ϕ зависит от V : $\phi = U(z, V)$. В результате, варьируя усредненную энергию по q , имеем

$$\frac{dq}{dt} = V = f_0 - \frac{1}{2} \kappa U(0, V) (U_z(0^+, V) + U_z(0^-, V)). \quad (6.2)$$

Это уравнение определяет скорость V . Отсюда следует общий вывод, что в рамках описанных в статье приближенных подходов для одиночного дефекта всегда $V = \text{const}$. Это связано с тем, что принцип подчинения описывает установившийся режим. Сила трения равна

$$F_{\text{lubr}} = -\frac{1}{2} \kappa U(0, V) (U_z(0^+, V) + U_z(0^-, V)). \quad (6.3)$$

Рассмотрим теперь случай, когда выражения в правых частях (6.2) и (6.3) могут быть явно вычислены. Асимптотические формулы для ϕ при больших $|x|$ имеют вид

$$\phi = \begin{cases} R_+ e^{a_+ x}, & x \rightarrow +\infty, \\ R_- e^{a_- x}, & x \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (6.4)$$

где

$$a_{\pm} = -(2d)^{-1} (V \pm \sqrt{V^2 + 4\epsilon d}).$$

Применим метод бифуркаций и найдем критическое значение $\kappa_c(f_0)$ при $f_0 \neq 0$. Пусть $\kappa = \kappa_c + \tilde{\kappa}$, где $\tilde{\kappa}$ мало. Перепишем основное уравнение в виде

$$d\phi_{zz} + V\phi_z - \epsilon\phi + \kappa_c\delta(z)\phi = u\phi^3 - \tilde{\kappa}\delta(z)\phi. \quad (6.5)$$

Члены в правой части малы вблизи точки бифуркации. Обозначим через L оператор в левой части (6.5). Сопряженный оператор имеет вид

$$L^*\phi = d\phi_{zz} - V\phi_z - \epsilon\phi + \kappa_c\delta(z)\phi. \quad (6.6)$$

Положим правую часть (6.5) равной нулю. Тогда решение уравнения $L\phi = 0$ имеет вид

$$\phi_0 = \begin{cases} Ae^{a+x}, & x > 0, \\ Ae^{a-x}, & x < 0, \end{cases} \quad (6.7)$$

где $A \neq 0$ тогда и только тогда, когда

$$\kappa_c = d(a_+ - a_-) = \sqrt{V^2 + 4\epsilon d}. \quad (6.8)$$

Это соотношение определяет точку бифуркации. При κ , меньших, чем это критическое значение, решение уравнения (6.5) тривиально.

Чтобы найти амплитуду A при малых $\tilde{\kappa}$, заметим, что собственные функции сопряженного оператора L^* равны

$$\theta = \begin{cases} C_1 e^{\tilde{a}+x}, & x > 0, \\ C_1 e^{\tilde{a}-x}, & x < 0, \end{cases} \quad (6.9)$$

где

$$\tilde{a}_{\pm} = -(2d)^{-1}(-V \pm \sqrt{V^2 + 4\epsilon d}).$$

Константа C_1 должна быть определена из условия нормировки. Подставим вместо ϕ в правую часть (6.5) выражение (6.7) и рассмотрим полученное линейное неоднородное уравнение. Решение уравнения (6.5) существует тогда и только тогда, когда правая часть ортогональна θ в смысле скалярного произведения $L_2(\mathbb{R})$. Это дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u\phi^3(z) - \tilde{\kappa}\delta(z)\phi(z))\theta(z) dz = 0. \quad (6.10)$$

Полученное уравнение определяет амплитуду решения A . Производя вычисления по вышеприведенным формулам, имеем

$$A^2 = \tilde{\kappa}(4ud)^{-1}(3V^2 + 16\epsilon d)(V^2 + 4\epsilon d)^{-1/2}. \quad (6.11)$$

Теперь можно вычислить силу трения. Она равна

$$F_{\text{lubr}} = \tilde{\kappa}(8ud^2)^{-1}V(3V^2 + 16\epsilon d)(V^2 + 4\epsilon d)^{-1/2}. \quad (6.12)$$

7. ВЫЧИСЛЕНИЕ СИЛЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ ДЕФЕКТАМИ ПРИ $f_0 \neq 0$

Вычисления мы будем проводить по той же схеме, что и в разделе 5, но с некоторыми поправками, которые учитывают отсутствие симметрии возбуждений $\eta(x - q_k)$. Применяя метод из раздела 5 (при том же предположении о больших расстояниях между дефектами), получаем для энергии взаимодействия приближенную формулу

$$\bar{E} = - \sum_k (C_+ e^{a_+(q_k - q_{k+1})} + C_- e^{a_-(q_k - q_{k+1})}), \quad (7.1)$$

где постоянные $C_{\pm} > 0$ могут быть подсчитаны явно лишь в некоторых случаях, например вблизи бифуркации по κ (см. раздел 5). Вычисление диссипации остается без изменений. Варьируя по q_i , получаем уравнения, которые обобщают параболическую цепочку Тоды:

$$M \frac{dq_k}{dt} = V + C_+ a_+ [e^{a_+(q_k - q_{k+1})} - e^{a_+(q_{k-1} - q_k)}] + \\ + C_- a_- [e^{a_-(q_k - q_{k+1})} - e^{a_-(q_{k-1} - q_k)}]. \quad (7.2)$$

Константа V определена формулой (6.2). Эту постоянную можно исключить с помощью очевидной замены $q_k = \tilde{q}_k - Vt$. Положительные постоянные $C_{\pm}$ сложным образом зависят от структуры дефекта, но могут быть вычислены. Для новых переменных $\tilde{q}_k$ получаем ту же систему, что и (7.2), но с $V = 0$.

Качественно движение системы дефектов может быть описано следующим образом. Дефекты движутся с постоянной скоростью V , на которую наложены медленные колебания, обусловленные взаимодействием. В течение очень длительного времени ближайшие дефекты сближаются и затем аннигилируют. Процесс взаимной аннигиляции (слияния) протекает сравнительно быстро (после того как дефекты сблизились). Формулы для описания слияния даны в работе [12] (см. п. 4.2). Заметим, что процесс притяжения и сближения дефектов приводит к росту трения. Затем сила трения уменьшается, когда дефекты сливаются.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье приведен краткий обзор асимптотических методов и их приложений к движению дефектов. Полученные результаты показывают, что как в диссипативных, так и в консервативных нелинейных распределенных системах взаимодействие между локализованными модами (доменными стенками, дислокациями) может быть весьма сложным. Это взаимодействие вносит эффективный вклад в силу трения.

Список литературы

- [1] Г. Николис, И. Пригожин, *Самоорганизация в неравновесных системах*, Мир, М., 1979.
- [2] Г. Хакен, *Синергетика*, Мир, М., 1980.
- [3] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*, Springer, Berlin, 1984.
- [4] О. А. Ладыженская, *УМН*, **42:6** (1987), 25–60.

- [5] J. K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, AMS, Providence, RI, 1988.
- [6] A. V. Babin, M. I. Vishik, *J. Math. Pures Appl.*, **62** (1983), 441–491.
- [7] P. Constantin, C. Foias, B. Nicolaenko, R. Temam, *Integral Manifolds and Inertial Manifolds for Dissipative Differential Equations*, Springer, New York, 1989.
- [8] Ю. Ильяшенко, Вейгу Ли, *Нелокальные бифуркации*, МЦНМО, ЧеРо, М., 1999.
- [9] P. Poláčik, “Parabolic equations: asymptotical behaviour on invariant manifolds”, *Handbook of Dynamical Systems*, vol. 2, ed. B. Fiedler, North-Holland, Amsterdam, 2002, 835–883.
- [10] S. A. Vakulenko, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **66** (1997), 373–410.
- [11] S. A. Vakulenko, *Adv. Differential Equations*, **5**:7–9 (2000), 1139–1178.
- [12] S. A. Vakulenko, P. V. Gordon, *Arch. Mech.*, **5**:5 (1999), 547–558.
- [13] N. Achmediev, J. M. Soto-Crespo, G. Town, *Phys. Rev. E*, **63**:5 (2001), 6602.
- [14] N. Achmediev, A. Ankiewicz, “Dissipative solitons in the complex Ginzburg–Landau and Swift–Hohenberg equations”, *Dissipative Solitons*, Lecture Notes in Phys., **661**, eds. N. Akhmediev, A. Ankiewicz, Springer, Berlin, 2005, 1–17.
- [15] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, Высшая школа, М., 1990.
- [16] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, Н. Н. Нефедов, *Автоматика и телемеханика*, 1997, № 7, 4–32.
- [17] С. Ю. Доброхотов, В. П. Маслов, “Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ-приближениях”, *Современные проблемы математики*, Итоги науки и техники, **15**, ВИНТИ, М., 1980, 3–94.
- [18] С. Ю. Доброхотов, И. М. Кричевер, *Матем. заметки*, **49**:6 (1991), 42–58.
- [19] И. А. Молотков, С. А. Вакуленко, *Сосредоточенные нелинейные волны*, Изд-во ЛГУ, Л., 1988.
- [20] V. F. Butuzov, A. B. Vasilieva, *Adv. Chem. Phys.*, **97** (1997), 47–179.
- [21] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, Н. Н. Нефедов, *Фундамент. и прикл. матем.*, **4**:3 (1998), 799–851.
- [22] J. Carr, R. L. Pego, *Comm. Pure Appl. Math.*, **42**:5 (1989), 523–576.
- [23] G. Fusco, “A genetic approach to the analysis of $u_t = \epsilon^2 u_{xx} + f(u)$ for small ϵ ”, *Problems Involving Change of Type* (Stuttgart, 1988), Lecture Notes in Phys., **359**, ed. K. Kirchgässner, Springer, Berlin, 1990, 53–73.
- [24] V. F. Butuzov, N. N. Nefedov, K. R. Schneider, *J. Differential Equations*, **159**:2 (1999), 427–446.
- [25] A. L. Korgenevskii, R. Bausch, R. Schmitz, *Phys. Rev. Lett.*, **83**:22 (1999), 4578–4581.

Поступила в редакцию 13.11.2006,
после доработки 23.05.2007