Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Й. Брюнинг, С. Ю. Доброхотов, Р. В. Некрасов,
А. И. Шафаревич, Распространение гауссовых волновых
пакетов в квантовых тонких периодических волноводах
с нелокальной нелинейностью, *ТМФ*, 2008, том 155, но-
мер 2, 215–235

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6206>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 17:53:38

© 2008 г.

Й. Брюнинг*, С. Ю. Доброхотов†,
Р. В. Некрасов†, А. И. Шафаревич†

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ГАУССОВЫХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В КВАНТОВЫХ ТОНКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ С НЕЛОКАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Рассматривается нелинейное уравнение Шредингера с интегральной нелинейностью типа Хартри в тонком квантовом волноводе. Изучается распространение гауссовых волновых пакетов, локализованных по пространственным переменным. Для случая периодически меняющихся стенок волновода установлена связь между поведением волновых пакетов и спектральными свойствами вспомогательной периодической задачи для одномерного уравнения Шредингера. Показано, что при положительном значении параметра нелинейности интегральная нелинейность позволяет пакету не расплываться при его распространении. Более того, обнаружены такие ситуации, когда пакет периодически во времени и в пространстве сильно фокусируется.

Ключевые слова: нестационарное уравнение Шредингера с интегральной нелинейностью, тонкие трубки, гауссовы волновые пакеты, локализация.

1. ВВЕДЕНИЕ

В связи с развитием нанотехнологий в последнее время возник интерес к решениям уравнений квантовой механики, моделирующих транспорт электрона в областях типа тонких трубок (*квантовых волноводов*). По нормали к оси трубки движение ограничивается либо быстро растущим потенциалом (модель “мягких стенок”), либо граничными условиями (модель “жестких стенок”). Из физических соображений ясно, что динамика частицы (или квазичастицы) в тонких квантовых волноводах должна быть пространственно одномерной, и исходное трехмерное уравнение может быть редуцировано к набору одномерных уравнений типа уравнений Шредингера на оси трубки. В модельной ситуации этот факт был аккуратно установлен в 1958 г. В. П. Масловым [1]. Для широкого диапазона квантовых состояний такая редукция

*Humboldt University, Berlin, Germany. E-mail: bruening@mathematik.hu-berlin.de

†Институт проблем механики РАН, Москва, Россия. E-mail: dobr@ipmnet.ru, logno@rambler.ru, shafar@mech.math.msu.su

исходного (линейного) уравнения, описывающего квантовое движение заряженных частиц со спином в тонком волноводе, помещенном в магнитное и электрическое поля, была аккуратно проведена в работах [2].

Однако выведенные в [2] (см. также [3]) уравнения типа уравнения Шредингера с потенциалом, не зависящим от положения электрона, как и любые линейные уравнения Шредингера, имеют только такие локализованные распространяющиеся решения, которые неизбежно расплываются при прохождении всей длины волновода. Таким образом, нерасплывание локализованных решений (баллистический транспорт в сильнопротяженных волноводах) может существовать только при учете нелинейных эффектов.

В нелинейной теории известно много моделей, в которых некоторые решения вообще не меняют свою форму (солитоны). В работах [4], [5] асимптотические решения, обладающие таким свойством, были построены для уравнения типа Хартри (с нелокальным нелинейным взаимодействием) в трехмерном евклидовом пространстве:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{\mathcal{H}} \Psi, \quad \hat{\mathcal{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \mathbf{v}_{\text{int}}(\mathbf{r}) + \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\Psi(\mathbf{r}', t)|^2 d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \quad (1)$$

где $\Psi(\mathbf{r}, t)$ – неизвестная волновая функция (квантовое состояние), $\hbar$, m – физические постоянные (постоянная Планка и эффективная масса), ядро нелинейного потенциала G и потенциал $\mathbf{v}_{\text{int}}$ – гладкие функции. Мы покажем, что для быстро растущего в поперечном направлении к оси волновода потенциала $\mathbf{v}_{\text{int}}$ (“потенциал конфайнмента”) это уравнение (рассматриваемое в тонкой трубке – квантовом волноводе) имеет решения с таким же свойством нерасплывания.

Нелинейный потенциал $\int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\Psi(\mathbf{r}')|^2 d\mathbf{r}'$ учитывает возможные деформации трубки под действием электрона или возможное самодействие электронов (т.е. является эффективным потенциалом самосогласованного поля в одночастичном приближении). Для бозе-эйнштейновского конденсата такой же член дает обобщение уравнения Гросса–Питаевского на случай нелокального нелинейного взаимодействия. Если поперечные размеры волновода периодически меняются вдоль его оси, то в грубом приближении построенные асимптотические решения можно также использовать в задачах моделирования распространения внутримолекулярных возбуждений вдоль длинных молекулярных цепочек (ср. с [6]).

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы формулируем постановку задачи в подходящей криволинейной системе координат и с учетом имеющихся в задаче параметров. В разделе 3 приводятся формулы для распространяющихся гауссовых пакетов в тонких нелинейных волноводах общей структуры. Случай, когда стенки волновода имеют периодическую структуру, а также связь свойств пакетов с периодической задачей Штурма–Лиувилля детально изучаются в разделе 4. Раздел 5 имеет вспомогательный характер: в нем с помощью адиабатического приближения проведена редукция исходного трехмерного уравнения к одномерному уравнению на ось трубки.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ. ХАРАКТЕРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Специальные локализованные решения удобно искать в подходящих криволинейных координатах. Эти криволинейные координаты (продольная x и поперечные $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$) в окрестности трубки определяются следующим образом. Будем считать, что ось трубки – бесконечная кривая γ (таким образом, мы пренебрегаем краевыми эффектами – эффектами образования и поглощения волнового пакета на двух крайних концах реальной трубки). Пусть кривая γ задана уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{R}(x)$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, $x \in \mathbb{R}$, где $\mathbf{R}(x)$ – гладкая вектор-функция, x – натуральный параметр на кривой γ , т.е. длина кривой, отсчитанная от некоторой фиксированной точки на γ . Во всех точках кривой γ можно определить ортонормированную базисную тройку $\{\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\}$. Поворачивая $\mathbf{n}_1(x), \mathbf{n}_2(x)$ на угол $\int_0^x \dot{\mathbf{n}}_1(x) \cdot \mathbf{n}_2(x) dx$ вокруг вектора скорости $\mathbf{v}(x)$, построим векторы $\mathbf{n}'_1(x), \mathbf{n}'_2(x)$. Здесь точка сверху означает дифференцирование по x , а точка между векторами – их скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$. Тогда введенные соотношением $\mathbf{r} = \mathbf{R}(x) + \mathbf{y}(x, y_1, y_2)$, $\mathbf{y}(x, y_1, y_2) = y_1 \mathbf{n}'_1(x) + y_2 \mathbf{n}'_2(x)$, криволинейные координаты (x, y_1, y_2) , однозначно определенные в окрестности γ , будут ортогональны. Метрика в этих координатах имеет следующий вид:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_{11}(x, \mathbf{y}) = (1 - k(x)y_n)^2, \quad y_n = y_1 \cos \theta - y_2 \sin \theta,$$

где $\theta = \theta(x)$ – угол между вектором нормали и вектором $\mathbf{n}'_1$, $k(x)$ – кривизна кривой γ . Поэтому для оператора Δ имеем следующее выражение:

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y_1} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y_2} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial y_2}, \quad (2)$$

где $g = \det g_{ij} \equiv g_{11}(x, \mathbf{y}) > 0$ – квадрат плотности меры объема.

Мы считаем, что трубка достаточно тонкая, так что она лежит в области, где координаты определены корректно. Наличие разных масштабов вдоль и поперек трубки приводит к появлению в задаче малого параметра $\mu = d/l \ll 1$, где d – характерный диаметр трубки; сечение волновода не обязательно круглое, односвязное и постоянное, l – характерная длина волновода (l также составляет порядка длины интересующего нас участка волновода).

Мы также считаем, что характерный масштаб изменения ядра G много больше диаметра волновода (более точно, порядка l), поэтому нелинейный потенциал не играет роли в удержании частицы внутри волновода – удержание происходит за счет потенциала $\mathbf{v}_{\text{int}}$. Чтобы удерживать частицу внутри волновода, потенциал конфайнмента в поперечном направлении к оси трубки должен иметь вид потенциальной ямы, так чтобы вне сечения волновода его величина достаточно сильно превышала полную энергию частицы (тогда подбарьерное прохождение во внешнюю часть волновода мало и волновая функция $\Psi \rightarrow 0$ при отдалении от оси волновода).

Рассмотрим некоторую гладкую трубчатую окрестность волновода Γ , которая достаточно широкая (ее диаметр сильно превышает диаметр волновода) и достаточно

узкая, чтобы координаты x, y были определены корректно. Поскольку волновая функция вне любой окрестности кривой γ экспоненциально мала при $\mu \rightarrow 0$ (см. ниже формулу (15) для асимптотики), то умножение на срезающую функцию, сосредоточенную внутри области Γ , изменит ее на $O(\mu^\infty)$. Поэтому следующее условие не влияет на асимптотику волновой функции при $\mu \rightarrow 0$: функция Ψ равна нулю вне области Γ , т.е.

$$\Psi|_{\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma} = 0. \quad (3)$$

Это условие позволяет избежать учета неоднозначности координат x, y .

После введения параметров l, d левую часть уравнения (1) можно привести к безразмерному виду с учетом разных масштабов вдоль и поперек трубки. Для этого умножим его на $\varepsilon_\perp^{-1} = md^2/\hbar^2$ и сделаем замены масштабов $x \rightarrow \tilde{x} = x/l$, $y \rightarrow \tilde{y} = y/d$, введем также безразмерное время $\tilde{t} = \frac{\hbar}{md}t/l$ (единичной скорости в этих единицах соответствует скорость $\hbar/(md)$ – характерная продольная скорость предъявленных ниже пространственно-локализованных решений) и сделаем замену $\Psi \rightarrow \tilde{\Psi} = \sqrt[4]{g} \Psi$, $\sqrt[4]{g} = \sqrt{1 - \mu k(x)\tilde{y}_n}$. Тогда уравнение (1) с учетом (3) имеет вид

$$i\mu \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{t}} = \tilde{\mathcal{H}}\tilde{\Psi}, \quad \tilde{\Psi}|_{\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma} = 0,$$

$$\tilde{\mathcal{H}} = -\frac{\mu^2}{2\sqrt[4]{g}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \frac{1}{\sqrt[4]{g}} - \frac{1}{2}\Delta_{\tilde{y}} + U(\tilde{x}, \tilde{y}, \mu) + \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{G}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{x}', \tilde{y}', \mu) |\tilde{\Psi}(\tilde{x}', \tilde{y}')|^2 d\tilde{x}' d\tilde{y}',$$

где

$$\Delta_{\tilde{y}} = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}_2^2}, \quad U(\tilde{x}, \tilde{y}, \mu) = v_{\text{int}}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \frac{1}{2\sqrt[4]{g}} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}_n} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}_n} \frac{1}{\sqrt[4]{g}},$$

$$v_{\text{int}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\mathbf{v}_{\text{int}}(x, y)}{\varepsilon_\perp}, \quad \tilde{G}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{x}', \tilde{y}', \mu) = \frac{V}{\varepsilon_\perp} G(l\tilde{x}, l\mu\tilde{y}, l\tilde{x}', l\mu\tilde{y}'), \quad V = ld^2.$$

Легко видеть, что поскольку $g = 1 + O(\mu)$, второе слагаемое в предпоследней формуле, порожденное двумя последними слагаемыми (2), имеет порядок $O(\mu^2)$. Потенциал удерживает частицу внутри области, где $|\tilde{y}|^2 \leq 1$, поэтому его старший член $v_{\text{int}} = \mathbf{v}_{\text{int}}(x, y)/\varepsilon_\perp$ в поперечном направлении имеет вид потенциальной ямы с глубиной не меньше $O(1)$. Отсюда можно заключить, что потенциал конфайнмента $\mathbf{v}_{\text{int}}$ имеет порядок, не меньший чем $\varepsilon_\perp = \hbar^2/(md^2)$. В задаче присутствует еще и нелинейный потенциал, но поскольку характерный масштаб изменения ядра G порядка l , то его зависимость от поперечной переменной достаточно слаба и справедливо разложение

$$\tilde{G}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{x}', \tilde{y}', \mu) = G_0(\tilde{x}, \tilde{x}') + \mu G_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{x}', \tilde{y}') + \dots + O(\mu^N). \quad (4)$$

Здесь

$$G_0(\tilde{x}, \tilde{x}') = \frac{V}{\varepsilon_\perp} G(l\tilde{x}, 0, l\tilde{x}', 0)$$

и подразумевается, что $G_0 \sim 1$, т.е. нелинейное ядро G имеет порядок $\varepsilon_\perp/V$, и

$$G_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{x}', \tilde{y}') = G_{11}(\tilde{x}, \tilde{x}')\tilde{y}_1 + G_{12}(\tilde{x}, \tilde{x}')\tilde{y}_2 + G'_{11}(\tilde{x}, \tilde{x}')\tilde{y}'_1 + G'_{12}(\tilde{x}, \tilde{x}')\tilde{y}'_2,$$

$$G_{1i}(\tilde{x}, \tilde{x}') = l \frac{V}{\varepsilon_{\perp}} \frac{\partial G}{\partial y_i}(l\tilde{x}, 0, l\tilde{x}', 0), \quad G'_{1i}(\tilde{x}, \tilde{x}') = l \frac{V}{\varepsilon_{\perp}} \frac{\partial G}{\partial y'_i}(l\tilde{x}, 0, l\tilde{x}', 0).$$

Далее везде опустим тильды и будем работать в этих безразмерных переменных. В результате приходим к следующему уравнению:

$$i\mu \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}}\Psi, \quad \hat{\mathcal{H}} = \hat{H} + \int_{\mathbb{R}^3} G(x, \mathbf{y}, x', \mathbf{y}', \mu) |\Psi(x', \mathbf{y}')|^2 dx' d\mathbf{y}', \quad \mu \ll 1, \quad (5)$$

$$\Psi|_{\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma} = 0,$$

где

$$\hat{H} = -\frac{\mu^2}{2\sqrt[4]{g}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt[4]{g}} - \frac{1}{2} \Delta_y + U(x, \mathbf{y}, \mu), \quad \Delta_y = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2},$$

а для функций $G(x, \mathbf{y}, x', \mathbf{y}', \mu)$ и $U(x, \mathbf{y}, \mu)$ в соответствии с требуемым для них физическим смыслом (см. выше) выполнено следующее условие.

УСЛОВИЕ 1. Функции U , G гладкие по всем своим аргументам, в том числе и по μ , функция G ограничена и представима в виде (4).

Получение специальных пространственно-локализованных асимптотических решений уравнения (5) представляет основную цель работы.

3. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ

Из физических соображений ясно, что изучение волновых функций исходного уравнения, локализованных в поперечном направлении к оси трубки и соответствующих слабо возбужденным состояниям, должно асимптотически сводиться к исследованию пространственно одномерного уравнения (на оси волновода). Это соображение действительно оказывается справедливым, оно реализуется в рамках адиабатического приближения. Приведем сразу соответствующее одномерное нелинейное уравнение, а саму процедуру редукции и соответствующие доказательства приведем ниже. Пусть $\varepsilon(x)$ – некоторое собственное значение, $\chi_0(x, \mathbf{y})$ – соответствующая ему собственная функция задачи

$$-\frac{1}{2} \Delta_y \chi_0 + v_{\text{int}}(x, \mathbf{y}) \chi_0 = \varepsilon(x) \chi_0, \quad \|\chi_0\|_y \equiv 1, \quad \text{Im } \chi_0 \equiv 0, \quad (6)$$

и пусть выполнены следующие условия.

УСЛОВИЕ 2. Собственное значение $\varepsilon(x)$ невырожденно при всех x , а $\varepsilon(x)$ – гладкая функция.

УСЛОВИЕ 3. Справедливо равенство $\langle y_i \rangle_y \equiv 0^1$.

¹⁾По-видимому, выполнения этого равенства всегда можно добиться малым (порядка μ) шевелением кривой γ ; мы требуем его выполнения для простоты формул. Если же это условие не выполнено, то внутри фигурных скобок в (7) будем иметь дополнительное слагаемое $\mu \hat{\mathcal{L}}_1(\frac{2}{x}, -i\mu \frac{\partial}{\partial x}[\phi])$, где $\hat{\mathcal{L}}$ – псевдодифференциальный оператор, описанный ниже в разделе 5.

Здесь введены обозначения

$$\| \cdot \|_y = \int_{\mathbb{R}^2} |\cdot|^2 d\mathbf{y}, \quad \langle \cdot \rangle_y = \int_{\mathbb{R}^2} \bar{\chi}_0 \cdot \chi_0 d\mathbf{y}.$$

Тогда редуцированное пространственно одномерное уравнение имеет вид

$$\left\{ -i\mu \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\mu^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \varepsilon(x) + \int_{\mathbb{R}} G_0(x, x') |\phi(x', t, \mu)|^2 dx' \right\} \phi(x, t, \mu) = 0. \quad (7)$$

Если ϕ – решение редуцированного уравнения, удовлетворяющее некоторым подходящим условиям (мы приведем их ниже), то асимптотическое решение исходного уравнения, соответствующее ϕ , восстанавливается по формуле

$$\Psi(x, \mathbf{y}, t, \mu) = \chi_0(x, \mathbf{y}) \phi(x, \mu, t) (1 + O(\mu)).$$

Для большей наглядности рассмотрим ситуацию, когда мягкие стенки волновода моделируются параболическим потенциалом конфайнмента:

$$v_{\text{int}}(x, y_1, y_2) = \frac{\Omega_1^2(x) y_1^2}{2} + \frac{\Omega_2^2(x) y_2^2}{2},$$

где $\Omega_j(x)$ – гладкие положительные функции. Зависимость Ω_j от x означает, что поперечные размеры волновода могут плавно меняться вдоль оси трубки. Задача (6) соответствует двумерному гармоническому осциллятору, ее решения нумеруются двумя квантовыми числами ν_1, ν_2 и имеют вид

$$\varepsilon(x) = \varepsilon^{(\nu_1, \nu_2)}(x) = \Omega_1(x) \left(\nu_1 + \frac{1}{2} \right) + \Omega_2(x) \left(\nu_2 + \frac{1}{2} \right), \quad \nu_i = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\chi_0 = \chi_0^{(\nu_1, \nu_2)}(x, y_1, y_2) = \frac{\sqrt[4]{\Omega_1(x) \Omega_2(x)}}{\sqrt{\pi 2^{\nu_1} 2^{\nu_2} \nu_1! \nu_2!}} e^{-\Omega_1 y_1^2/2 - \Omega_2 y_2^2/2} H_{\nu_1}(\sqrt{\Omega_1} y_1) H_{\nu_2}(\sqrt{\Omega_2} y_2),$$

где $H_\nu(x)$ – ν -й полином Эрмита. Значение $\varepsilon^{(\nu_1, \nu_2)}(x)$ невырожденно, например, для основного состояния $\nu_1 = 0, \nu_2 = 0$, а также для любых ν_1, ν_2 в случае, когда $\Omega_1(x)/\Omega_2(x) = \text{const} = r$, где r – иррациональное число.

Рассмотрим для уравнения (7) задачу Коши с локализованной в окрестности точки $x = X_0$ начальной волновой функцией

$$\phi|_{t=0} = A e^{iP_0(x-X_0)/\mu} e^{i(x-X_0)^2 B_0/(2\mu)}, \quad (8)$$

где P_0 – вещественное число (параметр), B_0 – комплексное число (параметр), $\text{Im } B_0 > 0$, нормировочная константа A выбирается из условия

$$\|\phi\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\phi(x)|^2 dx = 1$$

и равна

$$A = A(\mu, B_0) = \sqrt[4]{\frac{\text{Im } B_0}{\pi \mu}}.$$

Ей соответствует задача Коши со специальными начальными данными для исходного трехмерного уравнения (5)

$$\Psi|_{t=0} = A e^{iP_0(x-X_0)/\mu} e^{i(x-X_0)^2 B_0/(2\mu)} \chi_0(x, \mathbf{y}). \quad (9)$$

Функция $\Psi|_{t=0}$ также удовлетворяет условию нормировки $\|\Psi\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}^2 = 1$. Согласно [4] асимптотика решения задачи (7), (8) выражается через решения $(X(t), P(t))$ нелинейной системы

$$\dot{X} = P, \quad \dot{P} = -\varepsilon'(X) - \frac{\partial G_0}{\partial x}(X, X), \quad P|_{t=0} = P_0, \quad X|_{t=0} = X_0, \quad (10)$$

и решения $(C(t), B(t))$ линейной системы

$$\dot{C} = B, \quad \dot{B} = -\varepsilon''(X(t))C - \frac{\partial^2 G_0}{\partial x^2}(X(t), X(t))C, \quad B|_{t=0} = B_0, \quad C|_{t=0} = 1. \quad (11)$$

Хорошо известно [7] и легко убедиться, что

$$\frac{d}{dt}(\overline{C}B - \overline{B}C) = 0, \quad \overline{C}B - \overline{B}C = \text{const} = 2i \text{Im } B_0 \neq 0, \quad (12)$$

поэтому функции B, C не обращаются в нуль во всех точках t .

Асимптотика имеет вид

$$\begin{aligned} \phi(x, t, \mu) &= \frac{A(\mu, B_0)}{\sqrt{C(t)}} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{\mu} \left[S(t, \mu) + P(t)(x - X(t)) + \frac{(x - X(t))^2 B C^{-1}(t)}{2} \right] \right\} (1 + O(\sqrt{\mu})), \end{aligned} \quad (13)$$

где²⁾

$$S(t, \mu) = \int_0^t \left\{ \frac{P^2(\tau)}{2} - \varepsilon(X(\tau)) - G_0(X(\tau), X(\tau)) - \frac{\mu |C(\tau)|^2}{4 \text{Im } B_0} \frac{\partial^2 G_0}{\partial x'^2}(X(\tau), X(\tau)) \right\} d\tau.$$

Для квадрата амплитуды решений (13) с точностью $O(\sqrt[4]{\mu})$ имеем

$$|\phi(x, t, \mu)|^2 = \frac{A^2}{|C(t)|} e^{-(x-X(t))^2 \text{Im}(B C^{-1}(t))/\mu} = \frac{A^2}{|C(t)|} e^{-\pi A^4 |C(t)|^{-2} (x-X(t))^2}, \quad (14)$$

здесь второе равенство верно в силу (12). Это выражение зависит от x как гауссова нормированная экспонента. Ее амплитуда $A^2(\mu, B_0)/|C(t)| = \sqrt{\text{Im } B_0}/(\pi\mu)/|C(t)|$, а ширину (как и ширину пакета (13)) определяем так: $|C(t)|/A^2(\mu, B_0) \sim \sqrt{\mu/\text{Im } B_0} \times |C(t)|$.

Следующее утверждение является одним из центральных результатов этой статьи.

²⁾В последнем члене этого выражения мы пишем знак минус, исправляя опечатку, допущенную в формуле (1.18) в работе [4].

ТЕОРЕМА. Пусть выполнены условия 1–3, тогда функция

$$\Psi(x, y, t) = \chi_0(x, y)\phi(x, t, \mu) \quad (15)$$

является главным членом формальной асимптотики $\text{mod } O(\mu^{3/2})$ задачи (5), (9). Здесь под $O(\mu^{3/2})$ понимаются оценки в $C(\Gamma)$ или $L_2(\Gamma)$, равномерные на любом не зависящем от μ промежутке времени.

Доказательство и формулы для поправок приводятся в разделе 5.

4. ВОЛНОВЫЕ ПАКЕТЫ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ: НЕРАСПЛЫВАНИЕ ПАКЕТОВ И “СВЕРХЛОКАЛИЗАЦИЯ”

Как начальные условия $\phi_0(x, \mu) = \phi(x, 0, \mu)$, так и решения $\phi(x, t, \mu)$ имеют вид нормированных гауссовых волновых пакетов, локализованных вблизи точки $x = X(t)$.

Такие асимптотики имеют место на безразмерных временах порядка единицы (т.е. на временах, не зависящих от μ), и в случае отсутствия точек поворота этого достаточно для преодоления всей длины волновода $\sim l$. Ширина $\sqrt{\mu/\text{Im } B_0} |C(t)| \sim |C(t)|$ и амплитуда $A^2(\mu, B_0)/|C(t)| \sim 1/|C(t)|$ пакетов (13), вообще говоря, меняются со временем. Хорошо известно, что в линейном случае ($G \equiv 0$) такие пакеты обязательно расплываются (ср. с ситуацией, описанной ниже в случае 1). Любопытный и важный факт состоит в том, что в нелинейном случае гауссовы пакеты могут распространяться не расплываясь; более того, они могут периодически сжиматься вдоль оси x , причем такое сжатие сопровождается ростом амплитуды.

Проиллюстрируем этот факт на примере волновода, состоящего из некоторого числа повторяющихся участков. Тогда $\varepsilon(x)$ – периодическая функция с периодом a . Предположим также, что ядро трансляционно-инвариантно и симметрично: $G_0(x, x') = G_0(|x - x'|)$. Поскольку $G_0(x, x')$ – гладкая функция, то $\partial G_0(x, x)/\partial x = 0$ и $\partial^2 G_0(x, x)/\partial x^2 = \varkappa = \text{const}$.

Тогда, после исключения переменной P , система (10) примет вид уравнения Ньютона движения частицы в a -периодическом потенциале $\varepsilon(x)$:

$$\ddot{X} = -\varepsilon'(X), \quad \dot{X}|_{t=0} = P_0, \quad X|_{t=0} = X_0, \quad (16)$$

прохождение этой частицы по всей трубке возможно в том случае, когда для энергии справедливо условие

$$E = \frac{\dot{X}^2}{2} + \varepsilon(X) = \frac{P_0^2}{2} + \varepsilon(X_0) > \max \varepsilon(x). \quad (17)$$

Без ограничения общности можно считать $X_0 = 0$, что мы и будем делать в дальнейшем для упрощения обозначений. Тогда $X(t, P_0)$ находится, как известно, в результате обращения интеграла

$$t = \int_0^{X(t, P_0)} \frac{dx}{\sqrt{2(E - \varepsilon(x))}}.$$

Система (11) после исключения переменной B сводится к уравнению

$$-\ddot{C} - \varepsilon''(X(t, P_0))C = \varkappa C, \quad C|_{t=0} = 1, \quad \dot{C}|_{t=0} = B_0, \quad (18)$$

с периодически зависящим от времени t коэффициентом $\varepsilon''(X(t, P_0))$. Период времени соответствует перемещению частицы на период потенциала a и составляет

$$T = T(P_0) = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{2(E - \varepsilon(x))}}.$$

Поведение $C(t)$ существенным образом зависит от параметров $\varkappa$, P_0 . Зафиксируем начальный импульс пакета P_0 , тогда (18) представляет собой одномерную спектральную задачу для периодического оператора Штурма–Лиувилля (одномерного уравнения Шредингера) с потенциалом $-\varepsilon''(X(t, P_0))$ и спектральным параметром $\varkappa$. Хорошо известно [8], что прямая значений $\varkappa$ разбивается на зоны спектра $[\varkappa_n^-, \varkappa_n^+]$ и лакуны $(\varkappa_{n-1}^-, \varkappa_n^-)$, $n = 1, 2, \dots$, где

$$\varkappa_0^+ = -\infty < \min \varepsilon''(x) < \varkappa_1^- < \varkappa_1^+ \leq \varkappa_2^- < \dots < \varkappa_n^+ \leq \varkappa_{n+1}^- < \varkappa_{n+1}^+ \leq \dots$$

Величины $\varkappa_j^\pm$, вообще говоря, зависят от P_0 . Имеют место следующие случаи, проиллюстрированные на рис. 1–4.

Случай 1. $\varkappa = \varkappa_n^\pm$, такие точки называются границами зон, если разделяющие зоны лакуны невырождены. Им соответствует следующий базис решений линейного уравнения (18):

$$C_1(t) = g(t), \quad C_2(t) = tg(t) + q(t), \quad (19)$$

где $g(t), q(t)$ – некоторые T -периодические или антипериодические функции.

Заметим, что при $\varkappa = 0$ у уравнения (18) имеется T -периодическое решение $C_1(t) = \dot{X} = g(t)$, которое согласно (17) не обращается в нуль при всех t . В силу формулы Лиувилля второе линейно независимое решение уравнения (18) есть $\dot{X} \int \dot{X}^{-2} dt$ и, следовательно, представимо в виде $C_2(t) = tg(t) + q(t)$. Поэтому $\varkappa = 0$ есть непременно конец зоны. Более того, поскольку $C_1(t)$ не обращается в нуль только для левого конца первой (самой левой) зоны [8], то $\varkappa_1^- = 0$ для всех P_0 , т.е. $\varkappa = 0$ – левый конец первой зоны. Это обстоятельство приводит к кардинальному различию поведения волновых пакетов в случаях $\varkappa \leq 0$ и $\varkappa > 0$.

Поскольку $B(t) = \dot{C}(t) \neq 0$, а производная от периодической функции $g(t)$ непременно обращается в нуль в какой-либо точке, то $C(t)$ не может быть периодической функцией, т.е. если $C(t) = \alpha_1 C_1(t) + \alpha_2 C_2(t)$, то $\alpha_2 \neq 0$. При $\varkappa = 0$ функция $g(t)$ не обращается в нуль и при больших t слагаемое $\alpha_2 C_2$ становится главным, поэтому обязательно происходит распыление пакета: его ширина $|C(t)|/A^2$ возрастает пропорционально t , а квадрат амплитуды убывает как $1/t$. Случай $\varkappa = 0$ соответствует линейному уравнению Шредингера, поэтому в линейном случае волновые гауссовы пакеты обязательно распыляются во времени и в пространстве, что, разумеется, общеизвестно (см. рис. 1).

Описание поведения пакетов для других $\varkappa_n^\pm$ будет приведено ниже.

Рис. 1. Графики функций $|C(t)|$ и $|\phi(x, t)|^2$ для $\varepsilon(x) = 0.1 \cos x$, $P_0 = 0.75$, $\varkappa = 0$, $B_0 = i/10$.

Случай 2. $\varkappa \in (\varkappa_n^-, \varkappa_n^+)$ – точка $\varkappa$ находится внутри одной из зон (зоны устойчивости уравнения (18)). Тогда базис решений состоит из двух квазипериодических функций

$$C_1(t) = g(t)e^{i\lambda t}, \quad C_2(t) = \overline{g(t)}e^{-i\lambda t},$$

где $\lambda > 0$ – квазиимпульс, $g(t)$ – некоторая T -периодическая функция. Поэтому

$$C(t) = a_1 g(t)e^{i\lambda t} + a_2 \overline{g(t)}e^{-i\lambda t}$$

– также квазипериодическая функция. В силу этого факта волновой пакет *не расплывается во времени*, его ширина $\sqrt{\mu} |C(t)|/A^2$ и амплитуда $A/\sqrt{\mu} \sqrt{|C|}$ пульсируют квазипериодическим образом (см. рис. 2):

$$0 < C_{\inf} \leq |C(t)| \leq C_{\sup} < \infty.$$

Рис. 2. То же, что на рис. 1, но для $\varkappa = 0.1$ (зона), $B_0 = i/3$.

Случай 3. $\varkappa \in (\varkappa_{n-1}^+, \varkappa_n^-)$ – $\varkappa$ находится внутри одной из лакун (зоны неустойчивости уравнения (18)). Тогда базис решений уравнения (18) можно составить из

Рис. 3. То же, что на рис. 1, но для $\varkappa = -0.01$, $B_0 = i$.

функций (см. также [9]) $g(t) \cos(nt/2 + \Phi(t))e^{\lambda t}$, $g(t) \sin(nt/2 + \Phi(t))e^{-\lambda t}$, где $\lambda > 0$ – показатель Флоке, $n = 0, 1, 2, \dots$ – номер лагуны, а $g(t)$, $\Phi(t)$ – T -периодические функции, $|g(t)| > 0$. Тогда

$$C(t) = g(t) \left(a \cos\left(\frac{nt}{2} + \Phi(t)\right) e^{\lambda t} + b \sin\left(\frac{nt}{2} + \Phi(t)\right) e^{-\lambda t} \right), \quad \lambda > 0. \quad (20)$$

Здесь следует выделить случай $n = 0$, что соответствует $\varkappa < 0$. Тогда коэффициенты при $e^{\pm \lambda t}$ в формуле (20) никогда не обращаются в нуль, слагаемое, содержащее $e^{-\lambda t}$, становится малым по сравнению со слагаемым, содержащим $e^{\lambda t}$, и $C(t) \sim e^{\lambda t}$. Это означает, что при $\varkappa < 0$ волновые пакеты распыляются экспоненциально быстро, т.е. существенно быстрее, чем в линейном случае (см. рис. 3).

В остальных лагунах ($n \geq 1$) пакет в основном экспоненциально распыляется, но существуют моменты времени t_k такие, что $nt/2 + \Phi(t) = \pi/2 + \pi k$, тогда $C(t_k) = g(nt_k/2)e^{-\lambda t_k}$, и пакет вновь собирается, причем степень локализации как по x , так и по t экспоненциально возрастает. Таким образом, имеет место периодическая во времени и пространстве “сверхлокализация” волновых пакетов (см. рис. 4)³⁾.

Случай 4. Похожая ситуация имеет место и для концов зон $\varkappa_n$, отличных от $\varkappa = 0$. В точках $\varkappa_n^-$ функция $g(t)$ имеет на периоде $[0, T)$ $n-1$ нуль, а в точках $\varkappa_n^+$ – n нулей. Пакет в основном распыляется степенным образом, но в точках t_k , где $g(t) = 0$, опять собирается, но без увеличения роста амплитуды.

При расчете рис. 1–4 был выбран потенциал $\varepsilon(x) = 0.1 \cos x$ и начальное условие $P_0 = 0.75$ ($X_0 = 0$, $C_0 = 1$), поэтому $a = 2\pi$, $T \simeq 7.29$. Распространение волнового пакета изображается амплитудой $|\phi(x, t)|^2$ (см. формулу (14)). Поскольку ширина таких пакетов $|C(t)|^2/A^2 = \sqrt{\mu}|C(t)|^2/\sqrt{\text{Im } B_0}$ пропорциональна $\sqrt{\mu}$, а $\mu \ll 1$, их распространение на расстояния порядка 1 трудно изобразить наглядно. Поэтому на рисунках μ положено равным единице, а изображенные поверхности следует вообразать более локализованными по пространственной координате (сжатыми в $\sqrt{\mu}$ раз). Параметр B_0 также выбирался исходя из большей наглядности и указан под каждым рисунком.

³⁾ Однако этот эффект, возможно, разрушается со временем уже в рамках нашей модели уравнения (5) и даже (7), так как при сильном распылении неучтенные поправки в (13) становятся существенными и могут не позволить распыляемому пакету вновь собраться.

Рис. 4. То же, что на рис. 1, но для $\varkappa = 0.2$ (лакуна), $B_0 = i$.

Рис. 5. Вид зонной структуры на плоскости параметров $(\varkappa, P_0)$ для $\varepsilon(x) = 0.1 \cos x$ при $P_0 > P_{\min} = 0$, $\varkappa \geq 0$; области зон затемнены, области лакун – белые полосы.

Иногда бывает разумным считать значение $\varkappa$ фиксированным и анализировать характер поведения $C(t)$ в зависимости от других параметров, например от начальных импульсов P_0 . Такие параметры входят в уравнение (18) уже не как спектральные, а более сложным образом. Для разумных значений параметров чередование случаев 1–4 при непрерывном изменении этих параметров также имеет вид зонной структуры. Этот факт продемонстрирован на рис. 5 на плоскости параметров $\varkappa, P_0$. В частности, при $\varkappa > 0$ зонная структура по $P_0 > P_{\min} + \delta$, $P_{\min} = \sqrt{2 \max \varepsilon(x) - 2\varepsilon(X_0)}$, $\delta > 0$, содержит конечное число зон, первая из которых начинается при $P_0 > P_{\min} + \delta$, а верхняя простирается до плюс бесконечности. Это следует из анализа задачи (18), а также можно проследить на рис. 5, фиксируя произвольное значение $\varkappa$.

5. РЕДУКЦИЯ К ПРОСТРАНСТВЕННО ОДНОМЕРНОМУ УРАВНЕНИЮ

Покажем теперь, что нахождение асимптотических решений квазиклассического типа исходного пространственно трехмерного уравнения, локализованных в поперечном направлении к оси трубки, сводится (в “обобщенном адиабатическом приближении”) к пространственно одномерному уравнению, аналогичному исходному. Хорошо известно (и легко проверяется), что норма функции Ψ , удовлетворяющей уравнению (5), сохраняется во времени. Следуя [2], решения уравнения (5) ищем в виде

$$\Psi = \hat{\chi}\phi(x, \mu, t), \quad \hat{\chi} = \chi\left(\frac{2}{x}, -i\mu\frac{\partial}{\partial x}, \mathbf{y}, [\phi], \mu\right),$$

так чтобы при всех t

$$\|\Psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{\chi}\phi|^2(x, \mathbf{y}) dx d\mathbf{y} = 1, \quad \|\phi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\phi(x)|^2 dx = 1, \quad (21)$$

а $\phi(x, \mu, t)$ было решением одномерного уравнения типа Хартри

$$i\mu\phi_t = \hat{\mathcal{L}}\phi, \quad \hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}\left(\frac{2}{x}, -i\mu\frac{\partial}{\partial x}, [\phi], \mu\right). \quad (22)$$

Здесь $\hat{\chi}$, $\hat{\mathcal{L}}$ – некоторые псевдодифференциальные операторы, символы которых $\chi(x, p, \mathbf{y}, [\phi], \mu)$ и $\mathcal{L}(x, p, [\phi], \mu)$, вообще говоря, зависят от функции ϕ . Здесь и далее цифры 1, 2 над операторами обозначают порядок действия операторов x и $-i\mu\partial/\partial x$ (в частности, в (22) первым действует оператор дифференцирования); крышка над функцией (символом) означает соответствующий μ -псевдодифференциальный оператор (строгое определение и свойства μ -псевдодифференциальных операторов см. в [10]). Символы χ , $\mathcal{L}$ и надлежит определить для того, чтобы произвести редукцию начального уравнения (5) к одномерному уравнению (22).

Тогда из уравнения (5) с необходимостью имеем следующую цепочку равенств:

$$\hat{\chi}\hat{\mathcal{L}}\phi = i\mu\hat{\chi}\phi_t = i\mu\Psi'_t = \hat{\mathcal{H}}\Psi = \hat{\mathcal{H}}\hat{\chi}\phi.$$

Достаточным условием ее выполнения является следующее соотношение:

$$\hat{\chi}\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{H}}\hat{\chi}. \quad (23)$$

Достаточным условием нормировки является требование нормировки для функции ϕ и унитарность оператора $\hat{\chi}$:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \hat{\chi}^*(y)\hat{\chi}(y) dy = E. \quad (24)$$

Перейдем в этих соотношениях от операторов к их символам, используя следующие соотношения⁴⁾:

⁴⁾ Аккуратный вывод этих формул для псевдодифференциальных операторов и описание условий на их символы приведены в [10]; для полиномиальных по p символов, т.е. для дифференциальных операторов, какими в итоге и окажутся наши операторы, эти формулы легко проверяемы.

1) символ произведения двух операторов $A(\overset{2}{x}, -i\mu\overset{1}{\partial}/\partial x, \mu)B(\overset{2}{x}, -i\mu\overset{1}{\partial}/\partial x, \mu)$ выражается через их символы как $A(\overset{2}{x}, p - i\mu\overset{1}{\partial}/\partial x, \mu)B(x, p, \mu)$;

2) символ оператора $A^*(\overset{2}{x}, -i\mu\overset{1}{\partial}/\partial x, \mu)$, сопряженного оператору $A(\overset{2}{x}, -i\mu\overset{1}{\partial}/\partial x, \mu)$, выражается через его символ как $A^*(x, p, \mu) = \bar{A}(\overset{1}{x}, p + i\mu\overset{2}{\partial}/\partial x, \mu)1$.

Тогда равенство (23) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \chi\left(\overset{2}{x}, p - i\mu\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x}, y, [\phi], \mu\right)\mathcal{L}(x, p, [\phi], \mu) = \\ = \mathcal{H}\left(\overset{2}{x}, p - i\mu\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x}, y, -i\frac{\partial}{\partial y}, [\hat{\chi}\phi], \mu\right)\chi(x, p, y, [\phi], \mu), \end{aligned} \quad (25)$$

а равенство (24) – к уравнению

$$\int_{\mathbb{R}^2} \bar{\chi}\left(\overset{1}{x}, p + i\mu\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x} - i\mu\frac{\partial}{\partial z}, y\right)\chi(z, p, y) dy \Big|_{z=x} = 1. \quad (26)$$

Ясно, что для построения асимптотических при $\mu \rightarrow 0$ решений исходной задачи достаточно предъявить решения уравнений (25), (26), удовлетворяющие им с точностью $\text{mod } O(\mu^N)$ с подходящим N . Конструкция таких решений описывается следующим утверждением.

ЛЕММА 1. Пусть функция $\phi(x, t, \mu)$ имеет вид $\phi(x, t, \mu) = A(\mu)e^{iS(x,t)/\mu}\varphi(x, t, \mu)$, где S , $\text{Im } S \geq 0$, и φ – произвольные фиксированные гладкие функции, $A(\mu)$ – нормировочная константа. Тогда функции

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mu\mathcal{L}_1, \quad \chi = \chi_0 + \mu\chi_1,$$

где $\mathcal{L}_0$, χ_0 , χ_1 , $\mathcal{L}_1$ определены формулами (36), (37), (42), (43) соответственно, удовлетворяют уравнениям (25), (26) с точностью $O(\mu^2)$. Оценка равномерна на произвольных ограниченных областях изменения пространственных и временной координат и переменной p , т.е. невязка не превосходит $C\mu^2$, где C зависит только от функций S , φ и от выбора ограниченной области изменения координат расширенного фазового пространства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Символы $\mathcal{L}$, χ будем искать среди таких гладких функций, что на квазиклассических функциях ϕ (например, функциях вида $\phi(x, t, \mu) = A(\mu)e^{iS(x,t)/\mu}\varphi(x, t, \mu)$) выполнены следующие разложения:

$$\begin{aligned} \chi(x, p, y, [\phi], \mu) &= \chi_0(x, p, y, [\phi]) + \mu\chi_1(x, p, y, [\phi]) + \dots + O(\mu^N), \\ \mathcal{L}(x, p, [\phi], \mu) &= \mathcal{L}_0(x, p, [\phi]) + \mu\mathcal{L}_1(x, p, [\phi]) + \dots + O(\mu^N), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi\left(\frac{2}{x}, p - i\mu\frac{\partial}{\partial x}, y, [\phi], \mu\right) \mathcal{L}(x, p, [\phi], \mu) &= \chi_0(x, p, y, [\phi]) \mathcal{L}_0(x, p, [\phi]) + \\
&+ \mu \left[\chi_1(x, p, y, [\phi]) \mathcal{L}_0(x, p, [\phi]) - i \frac{\partial \chi_0}{\partial p}(x, p, y, [\phi]) \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x}(x, p, [\phi]) + \right. \\
&\left. + \chi_0(x, p, y, [\phi]) \mathcal{L}_1(x, p, [\phi]) \right] + \dots + O(\mu^N), \tag{27}
\end{aligned}$$

где оценка $O(\mu^N)$ равномерна в любой ограниченной области изменения пространственных, временной и импульсной переменных. После вычисления символов не составит труда убедиться, что эти оценки действительно выполнены.

Правая часть равенства (25) может быть представлена аналогично (27). Для этого выпишем разложение символа

$$\mathcal{H}\left(x, p, y, -i\frac{\partial}{\partial y}, \mu, [\widehat{\chi}\phi]\right) = H\left(x, p, y, -i\frac{\partial}{\partial y}, \mu\right) + \mathcal{G}(x, \mathbf{y}, [\widehat{\chi}\phi], \mu)$$

изначально заданного оператора $\widehat{\mathcal{H}}$. Получим следующее разложение линейного слагаемого:

$$H\left(x, p, \mathbf{y}, -i\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}, \mu\right) = H_0 + \mu H_1 + \dots + O(\mu^N), \tag{28}$$

где

$$H_0 = \frac{p^2}{2} + v_{\text{int}}(x, \mathbf{y}) + \frac{\Delta y}{2}, \quad \Delta y = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}, \quad H_1(x, p, y) = k(x)y_n p^2,$$

H_0 отличается от последующих членов своей зависимостью от $-i\partial/\partial \mathbf{y}$ (так называемый операторнозначный символ). Разложение нелинейного члена $\mathcal{G}(x, \mathbf{y}, [\widehat{\chi}\phi], \mu)$

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} G(x, \mathbf{y}, x', \mathbf{y}', \mu) (\widehat{\chi}\phi(x', \mathbf{y}', \mu)) \overline{\widehat{\chi}\phi(x', \mathbf{y}', \mu)} dx' d\mathbf{y}' = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \overline{\phi(x', \mu)} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{\chi}^* G(x, \mathbf{y}, x', \mathbf{y}', \mu) \widehat{\chi} d\mathbf{y}' \right) \phi(x', \mu) dx' = \\
&= \mathcal{G}_0(x, [\chi_0], [\phi]) + \mu (\mathcal{G}_1(x, [\chi_0], [\chi_1], [\phi]) + \mathcal{G}_1^y(x, \mathbf{y}, [\chi_0], [\phi])) + \dots + O(\mu^N) \tag{29}
\end{aligned}$$

получается с использованием соотношений, приведенных после формулы (24):

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_0(x, [\chi_0], [\phi]) &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\phi(x', \mu)} G_0(x, x') \times \\
&\times \left(\int_{\mathbb{R}^2} \overline{\chi_0(x', p', y')} \widehat{\chi_0(x', p', y')} d\mathbf{y}' \right) \phi(x', \mu) dx', \tag{30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_j(x, [\chi_0], [\chi_j], [\phi]) &= 2 \int_{\mathbb{R}} \overline{\phi(x', \mu)} G_0(x, x') \times \\
&\times \left(\text{Re} \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\chi_j(x', p', \mathbf{y}')} \widehat{\chi_0(x', p', \mathbf{y}')} d\mathbf{y}' \right) \phi(x', \mu) dx', \tag{31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1^y(x, \mathbf{y}, [\widehat{\chi}_0 \phi]) &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\phi(x', \mu)} \times \\
&\times \left(\int_{\mathbb{R}^2} G_1(x, x', \mathbf{y}, \mathbf{y}') \widehat{\chi_0(x', p', y')} \chi_0(x', p', y') d\mathbf{y}' \right) \phi(x', \mu) dx' + \\
&+ i \int_{\mathbb{R}} \overline{\phi(x', \mu)} \left(\frac{\partial}{\partial x'} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial \widehat{\chi_0(x', p', y')}}{\partial p'} G_0(x, x') \chi_0(x', p', y') d\mathbf{y}' \right) \phi(x', \mu) dx', \quad \dots
\end{aligned} \tag{32}$$

Выражения для $\mathcal{G}_j^y(x, y, [\chi_0], [\chi_1], \dots, [\chi_{j-1}], [\phi])$ сложные и нам не понадобятся.

Левая часть соотношения (29) при $G \equiv 1$ для функции $\Psi = \hat{\chi}\psi$ равна ее норме, потому автоматически имеем разложение для левой части условия унитарности (24). Перепишем это условие в виде соотношений для символов $\chi_i(x, p, \mathbf{y})$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \bar{\chi}_0(x, p, \mathbf{y}) \chi_0(x, p, \mathbf{y}) d\mathbf{y} &\equiv (\chi_0, \chi_0)_y = 1, \\
\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^2} \bar{\chi}_j(x, p, \mathbf{y}) \chi_0(x, p, \mathbf{y}) d\mathbf{y} &\equiv \operatorname{Re}(\chi_0, \chi_j)_y = R_j(x, p),
\end{aligned}$$

где R_j определяются через $\chi_0, \dots, \chi_{j-1}$, в частности

$$R_1(x, p) = i \frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_0 \frac{\partial \bar{\chi}_0}{\partial p} d\mathbf{y}. \tag{33}$$

Ввиду неоднозначности полученного ниже ответа дополним эти соотношения условиями $\operatorname{Im} \chi_0 = 0$ и $\operatorname{Im}(\chi_0, \chi_j) = 0$. В итоге имеем

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \bar{\chi}_0(x, p, \mathbf{y}) \chi_0(x, p, \mathbf{y}) d\mathbf{y} &\equiv (\chi_0, \chi_0)_y = 1, \quad \operatorname{Im} \chi_0 = 0, \\
\int_{\mathbb{R}^2} \bar{\chi}_j(x, p, \mathbf{y}) \chi_0(x, p, \mathbf{y}) d\mathbf{y} &\equiv (\chi_0, \chi_j)_y = R_j(x, p).
\end{aligned} \tag{34}$$

Далее подставляя разложения (27)–(29) в уравнение (25), получим равенство, содержащее члены разного порядка по μ . Последовательно рассматривая это равенство для членов разных порядков в системе с соответствующим соотношением из (34), получим рекуррентную цепочку линейных систем, из которой можно определить все члены разложения $\mathcal{L}, \chi$ (см. аналогичные вычисления для $G \equiv 0$ в [2]).

5.1. Вычисление символов $\mathcal{L}_0, \chi_0$. Собирая члены нулевого порядка по μ , получаем так называемую задачу на поперечную моду:

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{1}{2} \Delta_y + v_{\text{int}}(x, \mathbf{y}) \right) \chi_0(x, p, \mathbf{y}, [\phi]) &= \\
&= \chi_0(x, p, \mathbf{y}, [\phi]) \left(\mathcal{L}_0(x, p, [\phi]) - \frac{p^2}{2} - \mathcal{G}_0(x, [\chi_0 \phi]) \right), \\
(\chi_0, \chi_0)_y &= 1, \quad \operatorname{Im} \chi_0 = 0.
\end{aligned} \tag{35}$$

Пусть ядро самосопряженного оператора $-\Delta_y/2 + v_{\text{int}}(x, \mathbf{y}) - \varepsilon(x)$ является одномерным, т.е. $\varepsilon(x)$ – невырожденное собственное значение оператора $-\Delta_y/2 + v_{\text{int}}(x, \mathbf{y})$.

Тогда для выбранного собственного значения $\varepsilon(x)$ полученное уравнение на χ_0 , $\mathcal{L}_0$ однозначно (вообще говоря, χ_0 определено с точностью до знака) разрешается:

$$\mathcal{L}_0(x, p, [\phi]) = \frac{p^2}{2} + \varepsilon(x) + \int_{\mathbb{R}} G_0(x, x') |\phi(x')|^2 dx', \quad (36)$$

где $\varepsilon(x)$, $\chi_0(x, p, \mathbf{y}, [\phi])$ – собственное значение и собственная функция для спектральной задачи

$$-\frac{1}{2}\Delta_y \chi_0(x, p, \mathbf{y}, [\phi]) + v_{\text{int}}(x, \mathbf{y}) \chi_0(x, p, \mathbf{y}, [\phi]) = \varepsilon(x) \chi_0(x, p, \mathbf{y}, [\phi]), \quad (37)$$

$$\|\chi_0\|_y \equiv 1, \quad \text{Im } \chi_0 \equiv 0.$$

При таком выборе функция χ_0 не зависит от p , ϕ , т.е. $\hat{\chi}_0$ является линейным оператором умножения на функцию (поперечную моду). Поэтому выражения, содержащие $\partial\chi_0/\partial p$, в дальнейшем упрощаются.

5.2. Вычисление поправок. Собирая члены при μ^j , $j = 1, 2, \dots$, получаем неоднородные уравнения для χ_j и L_j :

$$\left(-\frac{1}{2}\Delta_y + v_{\text{int}}(x, \mathbf{y}) - \varepsilon(x)\right) \chi_j = F_j - H_j \chi_0 + \chi_0(\mathcal{L}_j - \mathcal{G}_j), \quad (38)$$

$$(\chi_0, \chi_j)_y = R_j,$$

где функции $F_j = F_j(x, \mathbf{y}, p, [\phi])$ определяются через предварительно вычисленные $\chi_0, \dots, \chi_{j-1}$ и $\mathcal{L}_0, \dots, \mathcal{L}_{j-1}$, в частности

$$F_1(x, \mathbf{y}, p, [\phi]) = i \left(\frac{\partial H_0}{\partial p} \frac{\partial \chi_0}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x} \frac{\partial \chi_0}{\partial p} \right) - \mathcal{G}_1^y \chi_0 = ip \frac{\partial \chi_0}{\partial x} - \mathcal{G}_1^y \chi_0. \quad (39)$$

Левая часть первого уравнения в (38) ортогональна χ_0 , так как χ_0 является ядром самосопряженного оператора $-\Delta_y/2 + v_{\text{int}}(x, \mathbf{y}) - \varepsilon(x)$. Поэтому для разрешения (38) с необходимостью имеем ортогональность правой части этого уравнения ядру χ_0 :

$$\mathcal{L}_j(x, p, [\phi]) = \langle \chi_0, H_j \chi_0 \rangle_y - \langle \chi_0, F_j \rangle_y + \mathcal{G}_j(x, [\chi_0], [\chi_j], [\phi]), \quad (40)$$

что, однако, не определяет L_j , пока не найдено χ_j , но сильно упрощает уравнение (38). В самом деле, подставим (40) в (38), получим линейную систему уравнений для χ_j :

$$\left(-\frac{1}{2}\Delta_y + v_{\text{int}}(x, \mathbf{y}) - \varepsilon(x)\right) \chi_j = F_j - H_j \chi_0 - \langle \chi_0, F_j \rangle_y + \langle \chi_0, H_j \chi_0 \rangle_y, \quad (41)$$

$$(\chi_0, \chi_j)_y = R_j.$$

Система (41) имеет единственное решение χ_j . Индукцией по j легко показать, что χ_j является полиномом по переменной p . Подставив это решение в правую часть (40), мы найдем $\mathcal{L}_j$. В частности, для $\mathcal{L}_1$, χ_1 имеем

$$\left(-\frac{1}{2}\Delta_y + v_{\text{int}}(x, \mathbf{y}) - \varepsilon(x)\right) \chi_1 = F_1 - H_1 \chi_0 - \langle \chi_0, F_1 \rangle_y + \langle \chi_0, H_1 \chi_0 \rangle_y, \quad (42)$$

$$(\chi_0, \chi_1)_y = 0,$$

из второго равенства следует $\mathcal{G}_1 = 0$, а значит (40) имеет вид

$$\mathcal{L}_1(x, p, [\phi]) = \langle \chi_0, H_1 \chi_0 \rangle_y + \langle \chi_0, \mathcal{G}_1^y \chi_0 \rangle_y. \quad (43)$$

Для завершения доказательства леммы 1 остается подставить $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mu \mathcal{L}_1$, $\chi = \chi_0 + \mu \chi_1$ в выражение (25), отбросить члены нулевого и первого порядка по μ (они сокращаются, что следует, например, из процедуры вывода), перенести оставшиеся члены в правую часть равенства и оценить получившуюся невязку.

Описание асимптотических решений исходной задачи основано на следующем утверждении, непосредственно вытекающем из леммы 1.

ЛЕММА 2. Пусть функция вида $\phi(x, t, \mu) = A(\mu) e^{iS(x, t)/\mu} \varphi(x, t, \mu)$ удовлетворяет, вообще говоря, с некоторой невязкой вида $\mu^\alpha A(\mu) e^{i\tilde{S}(x, t)/\mu} \tilde{\varphi}(x, t, \mu)$, $\alpha > 1$, редуцированному уравнению (22) с найденным символом $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mu \mathcal{L}_1$, тогда функция

$$\Psi(x, \mathbf{y}, t, \mu) = (\chi_0(x, \mathbf{y}) + \mu \hat{\chi}_1) \phi(x, t, \mu)$$

удовлетворяет уравнению (5) с точностью до невязки по норме в $L_2(\Gamma)$, не превосходящей $O(\mu^\beta) = o(\mu)$, где $\beta = \min(\alpha, 2)$.

5.3. Конструкция локализованных волновых пакетов для редуцированного уравнения. Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что функция (13) удовлетворяет с нужной точностью редуцированному уравнению (22). Заметим, что при выполнении условия 3 (см. раздел 3) $\mathcal{L}_1 = 0$ и уравнение (22) имеет вид (7). Распространение локализованных волновых пакетов, асимптотически удовлетворяющих уравнению (7), исследовалось в работе [4], где приведены решения с любой степенной точностью по малому параметру, в главном эти решения определяются формулой (13). Используя конструкции [4], нетрудно определить, какой вид имеет невязка таких решений.

ЛЕММА 3. Функции (13) удовлетворяют уравнению (7) с точностью до невязки вида $\mu^{3/2} A(\mu) e^{iS(x, t, \mu)/\mu} \tilde{\varphi}(x, t, \mu)$, где S , $\tilde{\varphi}$ – гладкие функции.

Из лемм 2 и 3 следует, что функция

$$\Psi(x, \mathbf{y}, t) = (\chi_0(x, \mathbf{y}) + \mu \hat{\chi}_1) \phi(x, t, \mu)$$

является формально асимптотическим решением с точностью $\text{mod } O(\mu^{3/2})$ исходной задачи (5), что завершает доказательство теоремы.

5.4. Пример вычисления символов $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1$, χ_0 , χ_1 . Рассмотрим ситуацию, когда потенциал конфайнмента имеет вид

$$v_{\text{int}}(x, y_1, y_2) = \frac{\Omega_1^2(x) y_1^2}{2} + \frac{\Omega_2^2(x) y_2^2}{2}.$$

Тогда задача (37) соответствует двумерному гармоническому осциллятору, ее решения нумеруются двумя квантовыми числами ν_1 , ν_2 и имеют вид

$$\varepsilon(x) = \varepsilon^{(\nu_1, \nu_2)}(x) = \Omega_1(x) \left(\nu_1 + \frac{1}{2} \right) + \Omega_2(x) \left(\nu_2 + \frac{1}{2} \right), \quad \nu_i = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\chi_0 = \chi_0^{(\nu_1, \nu_2)}(x, y_1, y_2) = \frac{\sqrt[4]{\Omega_1(x)\Omega_2(x)}}{\sqrt{\pi 2^{\nu_1} 2^{\nu_2} \nu_1! \nu_2!}} \times \\ \times \exp\left(-\frac{\Omega_1 y_1^2}{2} - \frac{\Omega_2 y_2^2}{2}\right) H_{\nu_1}(\sqrt{\Omega_1(x)} y_1) H_{\nu_2}(\sqrt{\Omega_2(x)} y_2),$$

где $H_\nu(x)$ – ν -й полином Эрмита. Функция $\mathcal{L}_0$ определяется формулой (36).

Далее вычислим $\mathcal{L}_1$, χ_1 . Чтобы вычислить $\mathcal{G}_1^y$ по формуле (32), а затем правую часть уравнения (42), воспользуемся конкретным видом членов G_1 , H_1 разложений (4), (28):

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1^y &= \frac{1}{\sqrt{2\Omega_1}} (\sqrt{\nu_1+1} \chi_0^{\nu_1+1, \nu_2} + \sqrt{\nu_1} \chi_0^{\nu_1-1, \nu_2}) \int_{\mathbb{R}} G_{11}(x, x') |\phi(x')|^2 dx' + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\Omega_2}} (\sqrt{\nu_2+1} \chi_0^{\nu_1, \nu_2+1} + \sqrt{\nu_2} \chi_0^{\nu_1, \nu_2-1}) \int_{\mathbb{R}} G_{12}(x, x') |\phi(x')|^2 dx', \\ F_1 &= ip \frac{1}{4} \frac{\Omega'_1}{\Omega_1} (-\sqrt{(\nu_1+2)(\nu_1+1)} \chi_0^{\nu_1+2, \nu_2} + \sqrt{\nu_1(\nu_1-1)} \chi_0^{\nu_1-2, \nu_2}) + \\ &+ ip \frac{1}{4} \frac{\Omega'_2}{\Omega_2} (-\sqrt{(\nu_2+2)(\nu_2+1)} \chi_0^{\nu_1, \nu_2+2} + \sqrt{\nu_2(\nu_2-1)} \chi_0^{\nu_1, \nu_2-2}) - \mathcal{G}_1^y, \quad (44) \\ H_1(x, p, y) \chi_0^{\nu_1, \nu_2} &= k'(x) p^2 y_n \chi_0^{\nu_1, \nu_2} = \\ &= \frac{\cos \theta}{\sqrt{2\Omega_1}} k'(x) p^2 (\sqrt{\nu_1+1} \chi_0^{\nu_1+1, \nu_2} + \sqrt{\nu_1} \chi_0^{\nu_1-1, \nu_2}) - \\ &- \frac{\sin \theta}{\sqrt{2\Omega_2}} k'(x) p^2 (\sqrt{\nu_2+1} \chi_0^{\nu_1, \nu_2+1} + \sqrt{\nu_2} \chi_0^{\nu_1, \nu_2-1}), \\ \langle \mathcal{G}_1^y, \chi_0^{\nu_1, \nu_2} \rangle_y &= 0, \quad \langle F_1, \chi_0^{\nu_1, \nu_2} \rangle_y = 0, \quad \langle H_1 \chi_0^{\nu_1, \nu_2}, \chi_0^{\nu_1, \nu_2} \rangle_y = 0. \end{aligned}$$

Здесь первые три равенства можно получить с помощью известных формул для полиномов Эрмита

$$x H_\nu(x) = \frac{1}{2} (H_{\nu+1}(x) + 2\nu H_{\nu-1}(x)), \quad \frac{\partial H_\nu}{\partial x} = 2\nu H_{\nu-1},$$

а следующие три легко следуют, например, из ортогональности системы функций $\chi_0^{\nu_1, \nu_2}$ и первых двух равенств.

В итоге уравнение на χ_1 запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2} \Delta_y + v_{\text{int}}(x, \mathbf{y}) - \varepsilon^{\nu_1, \nu_2}(x)\right) \chi_1^{\nu_1, \nu_2} &= A_{\nu_1+2, \nu_2} \chi_0^{\nu_1+2, \nu_2} + A_{\nu_1+1, \nu_2} \chi_0^{\nu_1+1, \nu_2} + \\ &+ A_{\nu_1-1, \nu_2} \chi_0^{\nu_1-1, \nu_2} + A_{\nu_1-2, \nu_2} \chi_0^{\nu_1-2, \nu_2} + A_{\nu_1, \nu_2+2} \chi_0^{\nu_1, \nu_2+2} + A_{\nu_1, \nu_2+1} \chi_0^{\nu_1, \nu_2+1} + \\ &+ A_{\nu_1, \nu_2-1} \chi_0^{\nu_1, \nu_2-1} + A_{\nu_1, \nu_2-2} \chi_0^{\nu_1, \nu_2-2}, \quad (\chi_0^{\nu_1, \nu_2}, \chi_1^{\nu_1, \nu_2}) = 0, \quad (45) \end{aligned}$$

где коэффициенты $A_{i,j} = A_{i,j}(x, p, [\phi])$ равны

$$\begin{aligned} A_{\nu_1+2, \nu_2} &= -\frac{i\sqrt{(\nu_1+2)(\nu_1+1)}}{4} \frac{\Omega'_1(x)}{\Omega_1(x)} p, & A_{\nu_1, \nu_2+2} &= -\frac{i\sqrt{(\nu_2+2)(\nu_2+1)}}{4} \frac{\Omega'_2(x)}{\Omega_2(x)} p, \\ A_{\nu_1-2, \nu_2} &= \frac{i\sqrt{(\nu_1+1)\nu_1}}{4} \frac{\Omega'_1(x)}{\Omega_1(x)} p, & A_{\nu_1, \nu_2-2} &= -\frac{i\sqrt{(\nu_2+1)\nu_2}}{4} \frac{\Omega'_2(x)}{\Omega_2(x)} p, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{\nu_1+1,\nu_2} &= \frac{\sqrt{\nu_1+1}}{\sqrt{2\Omega_1(x)}} \left(k'(x)p^2 \cos \theta - \int_{\mathbb{R}} G_{11}(x,x') |\phi(x')|^2 dx' \right), \\
A_{\nu_1-1,\nu_2} &= \frac{\sqrt{\nu_1}}{\sqrt{2\Omega_1(x)}} \left(k'(x)p^2 \cos \theta - \int_{\mathbb{R}} G_{11}(x,x') |\phi(x')|^2 dx' \right), \\
A_{\nu_1,\nu_2+1} &= -\frac{\sqrt{\nu_2+1}}{\sqrt{2\Omega_2(x)}} \left(k'(x)p^2 \sin \theta + \int_{\mathbb{R}} G_{12}(x,x') |\phi(x')|^2 dx' \right), \\
A_{\nu_1,\nu_2-1} &= -\frac{\sqrt{\nu_2}}{\sqrt{2\Omega_2(x)}} \left(k'(x)p^2 \sin \theta + \int_{\mathbb{R}} G_{12}(x,x') |\phi(x')|^2 dx' \right).
\end{aligned}$$

Легко проверить, что решение имеет вид

$$\begin{aligned}
\chi_1^{\nu_1,\nu_2} &= B_{\nu_1+2,\nu_2} \chi_0^{\nu_1+2,\nu_2} + B_{\nu_1+1,\nu_2} \chi_0^{\nu_1+1,\nu_2} + B_{\nu_1-1,\nu_2} \chi_0^{\nu_1-1,\nu_2} + \\
&\quad + B_{\nu_1-2,\nu_2} \chi_0^{\nu_1-2,\nu_2} + B_{\nu_1,\nu_2+2} \chi_0^{\nu_1,\nu_2+2} + B_{\nu_1,\nu_2+1} \chi_0^{\nu_1,\nu_2+1} + \\
&\quad + B_{\nu_1,\nu_2-1} \chi_0^{\nu_1,\nu_2-1} + B_{\nu_1,\nu_2-2} \chi_0^{\nu_1,\nu_2-2},
\end{aligned} \tag{46}$$

где

$$B_{i,j}(x,p) = \frac{A_{i,j}(x,p)}{\varepsilon^{\nu_1,\nu_2}(x) - \varepsilon^{i,j}(x)} = \frac{A_{i,j}(x,p)}{\Omega_1(x)(\nu_1 - i) + \Omega_2(x)(\nu_2 - j)}.$$

Формула (43) с учетом соотношений (44) дает следующий результат:

$$\mathcal{L}_1 \equiv 0.$$

Отметим, что этот результат имеет место и для более общего случая “симметричного” потенциала конфайнмента, когда $\langle y_i \chi_0, \chi_0 \rangle_y \equiv 0$, $i = 1, 2$. Более старшие члены $\mathcal{L}_j$, χ_j , $j > 1$, также могут быть вычислены.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим основные результаты работы. Для нелинейного уравнения, описывающего квантовую частицу в тонком волноводе с интегральным потенциалом типа Хартри, построены асимптотические локализованные решения, имеющие вид гауссовых волновых пакетов. На примере волновода с периодически меняющимися стенками проанализирован характер таких решений и проведено сравнение со случаем линейного волновода. Выявлены три существенно различных режима поведения этих асимптотик – распыливание, пульсирование и периодическая сверхлокализация (фокусировка). Показано, что эти режимы связаны со спектральными характеристиками вспомогательной одномерной периодической спектральной задачи для оператора Штурма–Лиувилля.

Благодарности. Авторы благодарят В. Белова, В. Вольперта, В. Матвеева, М. Руло и А. Самсонова за полезные обсуждения. Р. Некрасов благодарен В. Вольперту, В. Матвееву и М. Руло за предоставленную возможность обсудить данную работу на их семинарах в Лионе, Дижоне и Марселе и за оказанное гостеприимство. Работа поддержана РФФИ-CNRS (грант № 05-01-22002), DFG-RAS (проект DFG 436 RUS 113/572) и Фондом содействия отечественной науке (Р. Некрасов).

Список литературы

- [1] В. П. Маслов, *ДАН СССР*, **123**:3 (1958), 631–633.
- [2] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, Т. Я. Тудоровский, *ТМФ*, **141**:2 (2004), 267–303; В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, В. П. Маслов, Т. Я. Тудоровский, *УФН*, **175**:9 (2005), 1004–1010; V. V. Belov, S. Yu. Dobrokhотов, T. Ya. Tudorovskiy, *J. Engrg. Math.*, **55**:1–4 (2006), 183–237.
- [3] G. F. Dell’Antonio, L. Tenuta, *J. Phys. A*, **37**:21 (2004), 5605–5624.
- [4] В. В. Белов, А. Ю. Трифонов, А. В. Шаповалов, *ТМФ*, **130**:3 (2002), 460–492.
- [5] В. В. Белов, Е. И. Смирнова, *Матем. заметки*, **80**:2 (2006), 309–312.
- [6] А. С. Давыдов, *Солитоны в молекулярных системах*, Наукова думка, Киев, 1988.
- [7] В. П. Маслов, *Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях*, Наука, М., 1976.
- [8] В. А. Якубович, В. М. Старжинский, *Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения*, Наука, М., 1972; В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1977.
- [9] S. Yu. Dobrokhотов, *Russ. J. Math. Phys.*, **6**:3 (1999), 282–313.
- [10] В. П. Маслов, *Операторные методы*, Наука, М., 1973; М. В. Карасев, В. П. Маслов, *Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование*, Наука, М., 1991; М. В. Карасев, В. П. Маслов, “Алгебры с общими перестановочными соотношениями и их приложения. II: Операторные унитарно-нелинейные уравнения”, *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения*, **13**, ВИНТИ, М., 1979, 145–267.

Поступила в редакцию 3.07.2007