Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Герштейн, А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, Массивный пылевой шар, пульсирующий под действием собственного гравитационного поля, *ТМФ*, 2008, том 155, номер 2, 244–251

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6208>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 18:04:17

© 2008 г.

С. С. Герштейн*, А. А. Логунов*,
М. А. Мествиришвили†

МАССИВНЫЙ ПЫЛЕВОЙ ШАР, ПУЛЬСИРУЮЩИЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОБСТВЕННОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Показано, что если гравитационное поле рассматривать как физическое поле, развивающееся в пространстве Минковского, то массивный пылевой шар с массой более трех масс Солнца, в противоположность выводам ОТО, не коллапсирует под действием собственного гравитационного поля, а будет при отсутствии диссипации пульсировать во времени.

Ключевые слова: гравитационный коллапс, релятивистская теория гравитации.

В статье Толмена [1] (см. также [2]) для пылевого шара (т.е. для случая, когда давление равно нулю) из уравнений ОТО получено точное решение для интервала

$$ds^2 = d\tau^2 - A(\tau, R) dR^2 - W^2(\tau, R)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1)$$

где

$$A(\tau, R) = \frac{\dot{W}^2}{1 + f(R)}, \quad 1 + f(R) > 0, \quad \dot{W} = \frac{\partial W}{\partial \tau}.$$

На основе этого решения найдена скорость $\dot{W}(\tau, R)$, которая определяется из равенства

$$\dot{W}^2(\tau, R) = f(R) + \frac{F(R)}{W}, \quad F(R) > 0, \quad \dot{W} = \frac{\partial W}{\partial \tau}. \quad (2)$$

Отсюда можно определить ускорение

$$\ddot{W}(\tau, R) = -\frac{F(R)}{2W^2}, \quad (3)$$

которое соответствует гравитационному притяжению.

*Институт физики высоких энергий, г. Протвино, Московская обл., Россия.
E-mail: Semen.Gershtein@ihep.ru, Anatoly.Logunov@ihep.ru

†Институт теоретических проблем микромира им. Н. Н. Боголюбова, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Из решения Толмена для плотности пыли $\rho(\tau, R)$ получено выражение

$$\kappa\rho(\tau, R) = \frac{\dot{F}(R)}{\dot{W}W^2}, \quad \dot{W} > 0, \quad \dot{F}(R) > 0. \quad (4)$$

Поскольку согласно решению Толмена функция W может обратиться в нуль, то плотность вещества при гравитационном сжатии будет бесконечной. Бесконечными будут и инварианты кривизны. На этом основании несколько позднее в статье [3] путем сшивания решения Толмена с внешним решением Шварцшильда с помощью сингулярных преобразований сделан вывод, что процесс сжатия массивного пылевого шара с массой более трех масс Солнца продолжается во времени удаленного наблюдателя неограниченное время. Такое бесконечное сжатие согласно уравнениям ОТО наступает, когда масса тела превышает три массы Солнца, поскольку в этом случае внутреннее давление вещества не может остановить процесс гравитационного сжатия. Таким образом, на основании уравнений Гильберта–Эйнштейна тела большой массы, исчерпавшие ядерные источники энергии, становятся неустойчивыми и неограниченно сжимаются. Именно работа [3] послужила основой для вывода о неизбежности гравитационного коллапса и существовании черных дыр.

В релятивистской теории гравитации (РТГ), в которой гравитационное поле рассматривается как физическое поле, развивающееся в пространстве Минковского, ситуация кардинально меняется.

Основные уравнения РТГ можно записать в виде [4]

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) + \frac{m^2}{2} (g_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}), \quad (5)$$

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (6)$$

Масса покоя гравитона m здесь с необходимостью возникает как прямое следствие полевого подхода к гравитации. Эти уравнения общеквариантны и форминвариантны относительно преобразований Лоренца. Система уравнений (5) и (6) вместе с уравнением состояния является полной.

Эффективное риманово пространство, описываемое метрикой $g_{\mu\nu}$, связано с гравитационным полем $\phi^{\mu\nu}$ соотношением

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{\phi}^{\mu\nu}, \quad \tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}, \quad \tilde{\gamma}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma} \gamma^{\mu\nu}, \quad \tilde{\phi}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma} \phi^{\mu\nu}. \quad (7)$$

Согласно уравнениям (5) и (6) гравитационное поле $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$ обладает только спинами 2 и 0.

В РТГ, в отличие от ОТО, эффективное риманово пространство имеет только простую топологию.

В инерциальной системе координат, определяемой метрическим тензором $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского, интервал имеет вид

$$d\sigma^2 = dt^2 - \xi^2 dW^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (8)$$

где $\xi^2 = (dr/dW)^2$.

Рассмотрим теперь в этой системе координат сферически-симметричное нестатическое гравитационное поле, описываемое в эффективном римановом пространстве интервалом

$$ds^2 = U(t, W) dt^2 - V(t, W) dW^2 - W^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (9)$$

Здесь имеются общие требования на метрические коэффициенты

$$U(t, W) > 0, \quad V(t, W) > 0. \quad (10)$$

Для задачи о массивном пылевом шаре, которую мы рассматриваем, естественно выбрать вместо инерциальной системы синхронную систему координат. Для этой цели сделаем следующие преобразования:

$$dt = \dot{t} d\tau + \dot{t} dR, \quad dW = \dot{W} d\tau + \dot{W} dR, \quad (11)$$

где

$$\dot{t} = \frac{\partial t(\tau, R)}{\partial \tau}, \quad \dot{t} = \frac{\partial t(\tau, R)}{\partial R}. \quad (12)$$

Подставляя (11) в интервал (9) и накладывая условия

$$\dot{t}^2 U - \dot{W}^2 V = 1, \quad U \dot{t} \dot{t} = V \dot{W} \dot{W}, \quad (13)$$

получим интервал ds^2 в форме

$$ds^2 = d\tau^2 - A(\tau, R) dR^2 - W^2(\tau, R)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (14)$$

где

$$g_{11} = -A = U \dot{t}^2 - V \dot{W}^2, \quad g_{22} = -W^2(\tau, R). \quad (15)$$

При преобразованиях (11) интервал (8) принимает вид

$$d\sigma^2 = \gamma_{00} d\tau^2 + 2\gamma_{01} d\tau dR + \gamma_{11} dR^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (16)$$

где

$$\gamma_{00} = (\dot{t}^2 - \xi^2 \dot{W}^2), \quad \gamma_{01} = (\dot{t} \dot{t} - \xi^2 \dot{W} \dot{W}), \quad \gamma_{11} = \dot{t}^2 - \xi^2 \dot{W}^2, \quad \gamma_{22} = -r^2. \quad (17)$$

Прежде чем переходить к уравнениям вещества (6) и гравитационного поля (5), исключим с помощью уравнений (13) из метрических коэффициентов (15) и (17) переменные $\dot{t}$ и $\dot{t}$. После вычислений получим

$$\begin{aligned} g_{11} = -A &= -\frac{V \dot{W}^2}{1 + V \dot{W}^2}, \quad g_{22} = -W^2, \\ \gamma_{00} &= \frac{1 + V \dot{W}^2}{U} - \xi^2 \dot{W}^2, \quad \gamma_{11} = \dot{W}^2 \left[\frac{V^2 \dot{W}^2}{U(1 + V \dot{W}^2)} - \xi^2 \right], \quad \gamma_{22} = -r^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Заметим, что на основании неравенств (10) A – положительная функция.

Поскольку для пыли давление p равно нулю, то частицы пыли будут находиться в покое в синхронной системе координат (14), а следовательно, компоненты тензора вещества в правой части уравнения (5) для пыли равны

$$T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T = \frac{1}{2}\rho, \quad T_{11} - \frac{1}{2}g_{11}T = \frac{1}{2}A\rho, \quad T_{22} - \frac{1}{2}g_{22}T = \frac{1}{2}W^2\rho, \quad T = \rho. \quad (19)$$

На основании уравнения вещества (6) для пылевого шара в синхронной системе координат получим

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{2}{W} \frac{\partial W}{\partial \tau}. \quad (20)$$

Из этого уравнения находим

$$\rho(\tau, R) \sqrt{A} W^2(\tau, R) = \psi(R), \quad (21)$$

где $\psi(R)$ – функция интегрирования.

В соотношении (21) зависимость от массы покоя гравитона входит через функции ρ , A и W . При массе покоя гравитона, равной нулю, из выражений (1) и (4) следует, что функция $\psi(R)$ положительна и в точке $R = 0$. Поскольку наличие массы покоя гравитона проявляется только через функции ρ , A и W , а последние сохраняют свои общие свойства и непрерывны, то и в том случае, когда масса покоя гравитона не равна нулю, естественно считать функцию $\psi(R)$ положительной и в точке $R = 0$.

В добавление к этим аргументам приведем еще один, основной, но для этого нам будет необходимо обратиться к уравнению (27), которое мы ниже получим из уравнений (5). Суть этого аргумента состоит в следующем: если бы функция $\psi(R)$ обращалась в точке $R = 0$ в нуль, то в силу ограниченности и положительности величин ρ и A это означало бы, что функция $W(\tau, 0)$ должна обратиться в нуль, но в сильном гравитационном поле во время сжатия это вступило бы в противоречие с уравнением (27). Итак, функция $\psi(R)$ для всех значений R , включая и точку $R = 0$, положительна.

Время сжатия пылевого шара ограничено, поэтому функции ρ , A и W , непрерывные в ограниченной замкнутой области изменения переменных τ и R , также будут ограничены [5]. На этом основании из (21) получаем неравенство

$$W^2(\tau, R) = \frac{\psi(R)}{\rho \sqrt{A}} > 0. \quad (22)$$

Отсюда следует, что гравитационный коллапс пылевого шара невозможен.

Условие (22), полученное из уравнения (6) и общих требований на метрические коэффициенты, находится в противоречии с решением Толмена, согласно которому сжатие пылевого шара происходит до точки $W = 0$, а следовательно, гравитационный коллапс неотвратим. Здесь возникает несоответствие между общими положениями ОТО и частным решением уравнений Гильберта–Эйнштейна.

Обратимся теперь к уравнению (5) для интервала (14). В этом случае для компонент матричного тензора g_{00} , g_{11} и g_{22} получим следующие уравнения:

$$-\frac{\ddot{A}}{4A} + \frac{\dot{A}^2}{8A^2} - \frac{\ddot{W}}{W} = \frac{\kappa\rho}{4} + \frac{m^2}{4}(1 - \gamma_{00}), \quad (23)$$

$$-\frac{\ddot{W}}{WA} + \frac{\dot{A}\dot{W}}{2WA^2} + \frac{\dot{A}\dot{W}}{2WA} + \frac{\ddot{A}}{4A} - \frac{\dot{A}^2}{8A^2} = \frac{\kappa\rho}{4} + \frac{m^2}{4A}(g_{11} - \gamma_{11}), \quad (24)$$

$$-\frac{\ddot{W}}{WA} + \frac{\dot{A}\dot{W}}{2WA^2} + \frac{\dot{A}\dot{W}}{2WA} + \frac{1}{W^2} - \frac{\dot{W}^2}{AW^2} + \frac{\dot{W}^2}{W^2} + \frac{\ddot{W}}{W} = \frac{\kappa\rho}{2} - \frac{m^2}{2}\left(1 - \frac{r^2}{W^2}\right). \quad (25)$$

Вычитая из уравнения (24) уравнение (25), получим

$$\frac{\ddot{A}}{4A} - \frac{\dot{A}^2}{8A^2} - \frac{1}{W^2} + \frac{\dot{W}^2}{AW^2} - \frac{\dot{W}^2}{W^2} - \frac{\ddot{W}}{W} = -\frac{\kappa\rho}{4} + \frac{m^2}{2}\left(1 - \frac{r^2}{W^2}\right) + \frac{m^2}{4A}(g_{11} - \gamma_{11}). \quad (26)$$

Складывая уравнения (23) и (26) и учитывая (18), находим

$$-2W\ddot{W} = \frac{V-1}{V} + \frac{m^2W^2}{2}\left(1 - \frac{r^2}{W^2}\right) - \frac{m^2W^2}{4U}\left(1 - \frac{U\xi^2}{V}\right)(1 + 2V\dot{W}^2). \quad (27)$$

Таким образом, мы исключили явную зависимость от плотности вещества. Поскольку при массе покоя гравитона, равной нулю, $\ddot{W}$ отрицательно в силу (3), получаем $V > 1$.

Из условия причинности [4], согласно которому все времениподобные векторы в эффективном римановом пространстве должны оставаться времениподобными и в пространстве Минковского, следует, что

$$\xi^2 U < V. \quad (28)$$

Уравнение (27) устанавливает связь между ускорением $\ddot{W}$ и важной физической характеристикой гравитационного поля – функцией U , определяющей степень замедления времени гравитационным полем. Как в случае массивного пылевого шара, так и при эволюции однородной и изотропной Вселенной силы отталкивания при гравитационном взаимодействии обязаны наличию в уравнениях движения члена вида m^2/U . Именно в РТГ от степени замедления времени U зависит, будут ли гравитационные силы силами притяжения или силами отталкивания. Это свойство гравитационного поля обнаружилось в РТГ, хотя как только гравитационное поле оказалось благодаря Эйнштейну связанным с римановым пространством, то, по существу, из его общих свойств уже следовала невозможность коллапса [6]. Однако, как оказалось, нет полного соответствия уравнений ОТО с общими положениями ОТО. Именно это несоответствие и привело к решениям типа черных дыр, “кротовых нор” и др.

В РТГ гравитационное поле рассматривается как физическое поле, а источником его является полный тензор энергии–импульса вещества и гравитационного поля. Такой подход привел к несколько другой системе уравнений. В этой системе уравнений с необходимостью возникла масса покоя гравитона, а риманово пространство

стало эффективным благодаря тензорному характеру гравитационного поля. На основе этих уравнений и открылось свойство гравитационного поля проявлять себя в зависимости от абсолютной величины или как сила притяжения, или как сила отталкивания.

Так возникло фундаментальное свойство гравитационного поля – *самоограничение* поля. Это свойство в данной задаче о пылевом шаре нашло отражение в уравнении (27). На качественном анализе этого уравнения мы и остановимся. Ранее исходя из уравнения (6) и общих требований на метрические коэффициенты было установлено неравенство (22). Теперь необходимо раскрыть динамическую сторону этого ограничения.

Из уравнения (27) и неравенства (28) видно, что наличие массы покоя гравитона привело к появлению в правой части уравнения (27) отрицательного члена. Рассмотрим массивный пылевой шар, находящийся в состоянии, когда член, содержащий массу покоя гравитона, мал. В этом случае отрицательный член мал и из уравнения (27) следует отрицательность ускорения $\ddot{W}$, что свидетельствует о наличии силы притяжения. Происходит процесс гравитационного сжатия пылевого шара. Усиление гравитационного поля приводит к замедлению времени, т.е. к уменьшению метрического коэффициента U . Метрический коэффициент U определяет степень замедления времени, вызванного гравитационным полем, по сравнению с инерциальным временем при отсутствии поля. При этом следует подчеркнуть, что в соответствии с (10) U не может обратиться в нуль. Обращение U в нуль означало бы локальную остановку времени, что физически неприемлемо.

При достаточно сильном гравитационном сжатии, а следовательно, при малом значении величины U , в области

$$0 < U < \frac{m^2 W^2}{4} \left(\frac{V}{V-1} \right) \left(1 - \frac{\xi^2 U}{V} \right) (1 + 2V \dot{W}^2) \quad (29)$$

роль отрицательного члена, содержащего массу покоя гравитона, увеличивается, и правая часть (27) становится отрицательной величиной, что означает положительность ускорения $\ddot{W}$, а следовательно, наличие силы гравитационного отталкивания.

Именно гравитационная сила отталкивания и приводит к остановке процесса сжатия. В точке остановки $\dot{W} = 0$ согласно (29) имеем

$$0 < U < \frac{m^2 W^2}{4} \left(\frac{V}{V-1} \right) \left(1 - \frac{\xi^2 U}{V} \right), \quad (30)$$

что согласно (27) соответствует положительному ускорению

$$\ddot{W} > 0 \quad \text{при} \quad \dot{W} = 0, \quad (31)$$

т.е. наличие силы отталкивания.

Из неравенства (30) следует, что процесс сжатия массивного пылевого шара останавливается, при этом

$$W^2(\tau, R) > 0. \quad (32)$$

Таким образом, при сжатии пылевого шара под действием силы притяжения точка $W = 0$ недостижима, а поэтому коллапс массивного пылевого шара под действием

собственного гравитационного поля невозможен. Отсюда следует, что для реальных тел большой массы он тем более невозможен из-за наличия внутреннего давления. Наличие точки остановки $\dot{W} = 0$ исключает также возможность геодезического движения вещества до линии, определяемой уравнением

$$U(\tau, R) = 0.$$

Неравенство (32), полученное в результате анализа уравнения (27), находится в полном соответствии с неравенством (22), полученным на основе уравнения (6) и общих требований ОТО на метрические коэффициенты.

Таким образом, система уравнений (5), (6), а следовательно, уравнения (20) и (27), исключают гравитационный коллапс пылевого шара.

При проведенном выше анализе мы не учитывали в уравнении (27) член вида $m^2(W^2 - r^2)/2$, поскольку в силу ограниченности величин W и r и малости m^2 он крайне мал и не влияет на наши выводы независимо от его знака.

С момента остановки процесса сжатия $\dot{W} = 0$ под действием силы отталкивания начинается процесс расширения пылевого шара. При расширении гравитационное поле уменьшается, а следовательно, величина U увеличивается, т.е. роль отрицательного члена в (27) ослабевает, поэтому из-за малости массы покоя гравитона он становится малым и при

$$V > 1 + \frac{m^2 W^2}{4U} \left(1 - \frac{\xi^2 U}{V}\right) (1 + 2V\dot{W}^2) \quad (33)$$

правая часть (27) становится положительной. Следовательно, ускорение будет отрицательным, что соответствует наличию силы гравитационного притяжения. Под действием этой силы возникнет точка остановки, в которой скорость $\dot{W} = 0$. Пренебрегая членом с массой гравитона, мы определим ускорение в точке остановки из уравнения

$$-2W\ddot{W} = \frac{V-1}{V}. \quad (34)$$

Оно отрицательно, что соответствует силе притяжения. С этого момента времени опять начнется процесс сжатия пылевого шара. Поскольку в наших исходных уравнениях отсутствуют диссипативные члены, мы будем иметь массивный пылевой шар (с массой более трех масс Солнца), который будет пульсировать во времени из-за собственного гравитационного поля.

Внешнее решение для пылевого шара в инерциальной системе координат, как показано в [7], будет статическим.

Идея о возможном пульсирующем пылевом шаре интересовала автора работы [8]. Однако, как показано в настоящей статье, в рамках уравнений ОТО она не может быть реализована.

В заключение отметим, что согласно РТГ пульсации массивного пылевого шара, как и циклическое развитие однородной и изотропной Вселенной, обязаны своим происхождением общему фундаментальному свойству гравитационного поля – свойству *самоограничения*. Именно это свойство исключает Большой взрыв, вместо

него возникает состояние, когда Вселенная имела большую плотность и высокую температуру. Оно также исключает коллапс и черные дыры, заменив их наличием во Вселенной физических объектов больших масс.

Необходимо особо отметить, что нет ни одного наблюдательного факта, который бы с необходимостью требовал для своего объяснения предположения о существовании черных дыр – объектов, не имеющих материальной поверхности. Все наблюдательные факты прекрасно объясняются существованием во Вселенной физических объектов больших масс, имеющих материальную поверхность. Именно такие объекты реально существуют во Вселенной. Наличие их следует из РТГ.

О невозможности гравитационного коллапса массивных тел около семидесяти лет назад писал еще А. Эддингтон. Поэтому иногда пишут, что он своим авторитетом якобы задержал развитие исследований по коллапсу. Как видно из изложенного, Эддингтон был прав. Гравитационный коллапс невозможен для тел любой массы.

Благодарности. Авторы выражают глубокую благодарность В. В. Киселеву, В. А. Петрову, Н. Е. Тюрину за ценные обсуждения.

Список литературы

- [1] R. C. Tolman, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **20**:3 (1934), 169–176.
- [2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. II. Теория поля*, Физматлит, М., 2001.
- [3] Дж. Оппенгеймер, Г. Снайдер, “О безграничном гравитационном сжатии”, *Эйнштейн и его теория гравитации*, Сб. статей, Мир, М., 1979, 353–361.
- [4] А. А. Логунов, *Релятивистская теория гравитации*, Наука, М., 2006.
- [5] В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов, *Математический анализ*, Наука, М., 1979.
- [6] С. С. Герштейн, А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, “Общая теория относительности и сингулярность Шварцшильда”, *ЭЧАЯ*, **39**:1 (2008).
- [7] А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, *ТМФ*, **145**:3 (2005), 425–432.
- [8] М. Е. Герценштейн, *Изв. вузов. Физика*, 1977, № 7, 90–98.

Поступила в редакцию 2.07.2007