Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Я. Казаков, С. Ю. Славянов, Интегральные симметрии Эйлера для деформированного уравнения Гойна и симметрии уравнения Пенлеве PVI, *ТМФ*, 2008, том 155, номер 2, 252–264

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6209>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 15:19:52

© 2008 г.

А. Я. Казаков^{*,†}, С. Ю. Славянов[†]

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ ЭЙЛЕРА ДЛЯ ДЕФОРМИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ГОЙНА И СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ PVI

Интегральные преобразования Эйлера связывают между собой решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, порождая в одних случаях интегральные представления решений, а в других случаях соотношения (симметрии Эйлера) между решениями связанных уравнений. Эти соотношения приводят к соответствующим симметриям матриц монодромии. Обсуждаются симметрии Эйлера для случая простейшей фуксовой системы, эквивалентной деформированному уравнению Гойна, которое связано с уравнением Пенлеве PVI. Наличие интегральных симметрий деформированного уравнения Гойна приводит к соответствующим симметриям уравнения PVI.

Ключевые слова: преобразование Эйлера, уравнение Гойна, уравнение Пенлеве.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе обсуждаются интегральные симметрии Эйлера для деформированного уравнения Гойна. Уравнение Гойна – это фуксово дифференциальное уравнение с четырьмя регулярными особыми точками в комплексной плоскости. Само уравнение и различные его конфлюэнтные предельные случаи играют важную роль в прикладной математике. Много известных специальных функций математической физики (гипергеометрические функции, функции Матье, сфероидальные функции и т.д.) являются решениями уравнений класса Гойна (см. обзор этих уравнений в [1]). Если уравнение имеет, кроме четырех регулярных особых точек, еще ложные особые точки, мы будем называть его *деформированным уравнением Гойна* [1], [2]. Если имеется только одна ложная особая точка, мы обозначим такое уравнение *Heun1*. Напомним, что уравнение *Heun1* связано с теорией уравнения Пенлеве PVI [3], [4], [1]. А именно, пусть коэффициенты *Heun1* изменяются, причем это изменение связано соответствующим образом (см. подробнее в [3] или ниже)

^{*}Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, Россия

[†]Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: slav@ss2034.spb.edu

с уравнением PVI. Тогда группа монодромии Heun1 остается неизменной. Таким образом, уравнение PVI реализует изомонодромную деформацию уравнения Heun1 .

С одной стороны, как само уравнение Гойна, так и деформированное уравнение Гойна могут рассматриваться как квантовые уравнения. Преобразование Эйлера можно трактовать как переход к другому представлению наблюдаемых. С другой стороны, уравнение PVI – это результат “антиквантования” квантового уравнения [1], [2] и симметрии уравнения PVI, т.е. симметрии в фазовом пространстве классических переменных в динамике. Тем самым прослеживается дополнительная связь квантовой и классической динамики.

Мы установим интегральные связи Эйлера для решений фуксовой системы уравнений 2×2 , эквивалентной Heun1 . Как было показано в [5], [6], наличие интегральной связи для решений линейных дифференциальных уравнений приводит к связи между группами монодромии дифференциальных уравнений. Наша цель – описать эти соотношения для Heun1 . Наличие таких симметрий приводит к соответствующим симметриям уравнений Пенлеве [7]. В результате мы получаем набор симметрий уравнения PVI, связанных с интегральными симметриями уравнения Heun1 .

Опишем план работы. Исходным объектом в наших построениях является система линейных дифференциальных уравнений 2×2 , которая, однако, отлична от стандартно рассматриваемой в связи с уравнением PVI. Эта система редуцируется к уравнению Heun1 , так что мы получаем интегральные связи для решений уравнения Heun1 . Далее с помощью надлежащего аналитического продолжения находят соответствующие симметрии для элементов матриц связи. Если при деформации параметров исходного уравнения данный элемент матрицы связи не меняется (следствие изомонодромности исходного уравнения), то аналогичный элемент матрицы связи для преобразованного уравнения также не меняется. Этот факт позволяет установить симметрию решений уравнения Пенлеве PVI.

2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СВЯЗИ ЭЙЛЕРА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ 2×2

Рассмотрим следующую фуксову систему уравнений:

$$(z^2A + zB + C) \frac{dW}{dz} = (-\alpha zA + E)W. \quad (1)$$

Здесь A, B, C, E – (2×2) -матрицы, не зависящие от z , $W(z)$ – 2-вектор-функция; в данной работе мы рассматриваем случай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Эта система уравнений в качестве регулярных (фуксовых) особых точек имеет нули полинома $\det(z^2A + zB + C)$. В случае общего положения мы имеем три простых нуля z_j , $j = 1, 2, 3$. Система (1) имеет также регулярную особую точку на бесконечности. Кроме того, при редукции системы к уравнению второго порядка в этом уравнении могут возникать ложные особые точки, числом не более двух в случае произвольной матрицы A [2]. При выполнении условия (2) будет только одна ложная особая точка. Параметр α в уравнении (1) равен одному из характеристических

показателей решений на бесконечности. Второй характеристический показатель на бесконечности $\beta = -E_{22}$, где E_{22} – соответствующий матричный элемент матрицы E .

Представим решение системы (1) в виде

$$W(z) = \int_L (z-t)^{-\alpha} \Phi(t) dt, \quad (3)$$

где $\Phi(t)$ – 2-вектор-функция, а контур интегрирования L на комплексной плоскости мы опишем позднее. Подставив (3) в (1), получим

$$\begin{aligned} \int_L dt (z-t)^{-\alpha} \left\{ -\alpha \frac{z^2 A + zB + C}{z-t} - (-\alpha z A + E) \right\} \Phi(t) &= \int_L dt (z-t)^{-\alpha} \times \\ &\times \left\{ -\alpha \frac{(z^2 - t^2)A + (z-t)B + t^2 A + tB + C}{z-t} - (-\alpha z A + E) \right\} \Phi(t) = \\ &= \int_L dt (z-t)^{-\alpha} \left\{ -\alpha \frac{t^2 A + tB + C}{z-t} - \alpha t A - \alpha B - E \right\} \Phi(t) = I. \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что $-\alpha(z-t)^{-\alpha-1} = -d(z-t)^{-\alpha}/dt$, так что, интегрируя по частям в последнем интеграле в (4) (и предполагая, что внеинтегральные члены равны нулю), находим

$$\begin{aligned} I &= \int_L \left\{ \frac{d}{dt} [(t^2 A + tB + C)\Phi(t)] - (\alpha t A + \alpha B + E)\Phi(t) \right\} (z-t)^{-\alpha} dt = \\ &= \int_L \left\{ (t^2 A + tB + C) \frac{d\Phi(t)}{dt} + ((-\alpha + 2)tA + (-\alpha + 1)B - E)\Phi(t) \right\} (z-t)^{-\alpha} dt. \end{aligned}$$

Если $\Phi(t)$ – решение системы

$$(t^2 A + tB + C) \frac{d\Phi(t)}{dt} = ((\alpha - 2)tA + E + (\alpha - 1)B)\Phi(t) = 0, \quad (5)$$

то выражение под знаком интеграла равно нулю.

Контур интегрирования L и решение $\Phi(t)$ могут быть выбраны следующим образом. Система (5) имеет, очевидно, те же регулярные особые точки, что и система (1). В качестве $\Phi(t)$ берется решение системы, ветвящееся в регулярной особой точке t_* системы (5), а в качестве контура L – двойная восьмерка, охватывающая точки $t = t_*$ и $t = z$. Этот выбор приводит к исчезновению внеинтегральных членов при интегрировании по частям, описанном выше.

В итоге приходим к следующему выводу. Если $\Phi(t)$ – описанное выше решение системы (5) и L – описанный выше контур интегрирования, то вектор-функция $W(z)$, определенная интегралом (3), является решением системы (1). Заметим, что приведенная интегральная связь может быть записана в терминах коэффициентов как преобразование

$$\{A, B, C, -\alpha, E\} \rightarrow \{A, B, C, (\alpha - 2), E + (\alpha - 1)B\}. \quad (6)$$

Интегральная симметрия Эйлера (3) связывает, таким образом, решения систем (1) и (5), причем если $\Phi(t)$ ветвится в точке $t = t_*$, то соответствующая вектор-функция $W(z)$ ветвится в точке $z = z_*$, $z_* = t_*$. Выбирая различные матричные коэффициенты исходной системы уравнений (1) (не обязательно удовлетворяющие условию (2)), можно получить (после редукции к уравнению второго порядка) уравнение Гойна, конфлюэнтное уравнение Гойна и варианты этих уравнений с одной или двумя ложными особыми точками. Здесь рассматривается детально случай (2), соответствующий наличию одной ложной особой точки для уравнения Гойна.

3. КОНКРЕТИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ УРАВНЕНИЙ

Выберем значения матричных коэффициентов B , C , E так, чтобы получилась система

$$\begin{pmatrix} z^2 - z & \rho(z-1) \\ z & z - \tau - \rho \end{pmatrix} W' = \begin{pmatrix} -\alpha z + e_1 & e_2 \\ e_3 & -\beta \end{pmatrix} W \quad \text{или} \quad MW' = NW. \quad (7)$$

Положим

$$B = \begin{pmatrix} -1 & \rho \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ 0 & \rho - \tau \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & -\beta \end{pmatrix}.$$

Регулярные особые точки в конечной плоскости этой системы суть $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = \tau$. Система (7) приводится к виду

$$W' = TW, \quad T = M^{-1}N = (\sigma(z))^{-1}S, \quad (8)$$

где

$$\sigma(z) = \det M = \prod_{j=1}^3 (z - z_j).$$

Разрешив систему (8) относительно функции $w_1(z)$, получаем уравнение второго порядка вида

$$w_1''(z) + p^{(1)}(z)w_1'(z) + q^{(1)}(z)w_1(z) = 0, \quad (9)$$

где

$$p^{(1)}(z) = -T'_{12}T_{12}^{-1} - \operatorname{tr} T, \quad q^{(1)}(z) = T'_{12}T_{12}^{-1}T_{11} - T'_{11} + \det T.$$

Разрешив систему (8) теперь относительно функции $w_2(z)$, получаем уравнение второго порядка вида

$$w_2''(z) + p^{(2)}(z)w_2'(z) + q^{(2)}(z)w_2(z) = 0, \quad (10)$$

где

$$p^{(2)}(z) = -T'_{21}T_{21}^{-1} - \operatorname{tr} T, \quad q^{(2)}(z) = T'_{21}T_{21}^{-1}T_{22} - T'_{22} + \det T.$$

Матрица $S(z)$ вычисляется в соответствии с (8) и равна

$$S(z) = \begin{pmatrix} -\alpha z^2 + z(e_1 - \rho(e_3 + \alpha) + \alpha\tau) - \tau e_1 + \rho(e_1 + e_3) & (e_2 + \rho\beta)z - \rho\beta - (\tau - \rho)e_2 \\ (e_3 + \alpha)z^2 - z(e_3 + e_1) & -\beta z^2 + z(\beta - e_2) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Отсюда следует, что уравнения (9) и (10) имеют кроме регулярных особых точек, совпадающих с регулярными особыми точками системы (8), по одной ложной особой точке

$$\lambda^{(1)} = \frac{\rho\beta + (\tau - \rho)e_2}{\rho\beta + e_2}, \quad \lambda^{(2)} = \frac{e_3 + e_1}{e_3 + \alpha} \quad (12)$$

соответственно. Таким образом, эти уравнения являются уравнениями Neun1.

Вычислим величины $\text{tr } T$, $\det T$, одинаковые для уравнений (9), (10):

$$\begin{aligned} -\text{tr } T &= -\frac{1}{z} \left(-e_1 + \frac{\rho(e_3 + e_1)}{\tau} \right) - \frac{1}{z-1} \left(-\alpha + e_1 + \frac{e_2 - \rho(e_1 - \alpha)}{\tau-1} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{z-\tau} \left(-\beta - \frac{e_2 - \rho(e_1 - \alpha)}{\tau-1} - \frac{\rho(e_3 + e_1)}{\tau} \right), \\ \det T &= \frac{\alpha\beta}{z(z-1)} + \frac{\tau\alpha\beta - \beta e_1 - e_2 e_3}{\sigma}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из (11) получаем вычет $\text{tr } T$ на бесконечности:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \text{tr } T = -\alpha - \beta. \quad (14)$$

Далее с помощью (11) вычисляем следующие выражения, определяющие коэффициенты уравнений (9), (10):

$$\begin{aligned} -T'_{12} T_{12}^{-1} &= -\frac{1}{z - \lambda^{(1)}} + \sum_{j=1}^3 \frac{1}{z - z_j}, \quad -T'_{21} T_{21}^{-1} = -\frac{1}{z - \lambda^{(2)}} + \sum_{j=2}^3 \frac{1}{z - z_j}, \\ T'_{12} T_{12}^{-1} T_{11} - T'_{11} &= \frac{\alpha}{z(z-1)} + \left[\alpha\tau - e_1 + \rho \frac{e_1 + e_3 - \lambda^{(1)}(e_3 + \alpha)}{\tau - \lambda^{(1)}} \right] \frac{1}{\sigma} + \\ &\quad + \left[-\alpha\lambda^{(1)} + e_1 - \rho \frac{e_1 + e_3 - \lambda^{(1)}(e_3 + \alpha)}{\tau - \lambda^{(1)}} \right] \frac{1}{\sigma^{(1)}}, \\ T'_{21} T_{21}^{-1} T_{22} - T'_{22} &= \frac{e_2 + \beta(\lambda^{(2)} - 1)}{\tau - \lambda^{(2)}} \left(\frac{\lambda^{(2)}}{\sigma^{(2)}} - \frac{\tau}{\sigma} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\sigma^{(k)}(z) = z(z-1)(z - \lambda^{(k)}), \quad k = 1, 2.$$

Таким образом, находим явное выражение для коэффициентов уравнений (9) и (10):

$$\begin{aligned} p^{(1)}(z) &= -\frac{1}{z - \lambda^{(1)}} + \left(1 + e_1 - \frac{\rho(e_1 + e_3)}{\tau} \right) \frac{1}{z} + \\ &\quad + \left(1 + \alpha - e_1 - \frac{\rho(\alpha - e_1) + e_2}{\tau - 1} \right) \frac{1}{z-1} + \\ &\quad + \left(1 + \beta + \frac{\rho(\alpha - e_1) + e_2}{\tau - 1} + \frac{\rho(e_1 + e_3)}{\tau} \right) \frac{1}{z-\tau}, \\ q^{(1)}(z) &= \frac{\alpha(\beta + 1)}{z(z-1)} + \left[\alpha(\beta + 1)\tau - (\beta + 1)e_1 - e_2 e_3 + \rho \frac{e_1 + e_3 - \lambda^{(1)}(e_3 + \alpha)}{\tau - \lambda^{(1)}} \right] \frac{1}{\sigma} + \\ &\quad + \left(e_1 - \alpha\lambda^{(1)} + \rho \frac{\lambda^{(1)}(e_3 + \alpha) - e_1 - e_3}{\tau - \lambda^{(1)}} \right) \frac{1}{\sigma^{(1)}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p^{(2)}(z) &= -\frac{1}{z - \lambda^{(2)}} + \left(e_1 - \frac{\rho(e_1 + e_3)}{\tau} \right) \frac{1}{z} + \left(1 + \alpha - e_1 - \frac{\rho(\alpha - e_1) + e_2}{\tau - 1} \right) \frac{1}{z - 1} + \\
&\quad + \left(1 + \beta + \frac{\rho(\alpha - e_1) + e_2}{\tau - 1} + \frac{\rho(e_1 + e_3)}{\tau} \right) \frac{1}{z - \tau}, \\
q^{(2)}(z) &= \frac{\alpha\beta}{z(z-1)} + \left[\alpha\beta\tau - \beta e_1 - e_2 e_3 + \tau \frac{\beta - e_2 - \beta\lambda^{(2)}}{\tau - \lambda^{(2)}} \right] \frac{1}{\sigma} + \\
&\quad + \frac{\lambda^{(2)}(\beta\lambda^{(2)} - \beta + e_2)}{\tau - \lambda^{(2)}} \frac{1}{\sigma^{(2)}}.
\end{aligned}$$

Канонической формой уравнения Heun1 мы выберем следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
w'' + w' \left\{ \frac{1 - \theta_1}{z} + \frac{1 - \theta_2}{z - 1} + \frac{1 - \theta_3}{z - \tau} - \frac{1}{z - \lambda} \right\} + \\
+ w \left\{ \frac{\alpha\beta}{z(z-1)} + \frac{\lambda(\lambda-1)\mu}{z(z-1)(z-\lambda)} - \frac{\tau(\tau-1)H}{z(z-1)(z-\tau)} \right\} = 0.
\end{aligned} \quad (16)$$

Здесь θ_j , $j = 1, 2, 3$, – характеристические показатели для решений, сингулярных в особых точках z_j . Этому уравнению соответствует набор параметров $\theta_1, \theta_2, \alpha, \beta, \tau, \lambda, \mu$. Отметим, что параметр θ_3 мы считаем зависимым параметром, поскольку должно выполняться условие Фукса, связывающее характеристические показатели в особых точках (выбор одного независимого параметра θ_3 из трех $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ произволен). Параметр H также не является независимым параметром уравнения (16), он определяется из следующего условия: точка $z = \lambda$ является ложной особой точкой уравнения. Учет этого условия приводит к явному выражению H через параметры $\theta_1, \theta_2, \alpha, \beta, \lambda, \mu, \tau$, которое мы опускаем.

Сравнивая коэффициенты уравнения (16) и коэффициенты $p^{(k)}(z), q^{(k)}(z), k = 1, 2$, уравнений (9), (10), можно найти соответствие между параметрами $\theta_1, \theta_2, \lambda, \mu$ и e_1, e_2, e_3, ρ (параметры α, β присутствуют как в уравнении (16), так и в уравнениях (9), (10)). Эти соотношения связывают параметры исходной системы уравнений и уравнения Heun1, которое, в свою очередь, связано с уравнением Пенлеве PVI. Наша ближайшая цель – обратить эти соотношения, т.е. описать в явных терминах соответствие $\{\theta_1, \theta_2, \lambda, \mu\} \rightarrow \{e_1, e_2, e_3, \rho\}$. Так как наборы соотношений различны, мы будем искать это обращение отдельно для уравнений (9), (10), опуская при этом верхние индексы у параметров уравнений (9), (10).

3.1. Уравнение (9). Следующие соотношения связывают параметры уравнения (9) и уравнения (16):

$$\lambda = \frac{\rho\beta + (\tau - \rho)e_2}{\rho\beta + e_2}, \quad (17)$$

$$\theta_1 = -e_1 + \frac{\rho(e_3 + e_1)}{\tau}, \quad (18)$$

$$\theta_2 = -\alpha + e_1 + \frac{e_2 + \rho(\alpha - e_1)}{\tau - 1}, \quad (19)$$

$$\lambda(\lambda - 1)\mu = e_1 - \alpha\lambda + \rho \frac{\lambda(e_3 + \alpha) - e_1 - e_3}{\tau - \lambda}. \quad (20)$$

Характеристическими показателями решений на бесконечности являются числа $\alpha, \beta + 1$. Таким образом, в данном случае соотношение Фукса приобретает вид

$$\sum_{j=1}^3 \theta_j + \alpha + \beta + 1 = 1. \quad (21)$$

Из (17), (19) следует

$$e_2 = \frac{\rho\beta(\lambda-1)}{\tau-\rho-\lambda}, \quad e_1 = \alpha + \frac{\theta_2(\tau-1)-e_2}{\tau-\rho-1}. \quad (22)$$

Соотношение (18) перепишем в виде

$$e_3 = \frac{\tau\theta_1}{\rho} + \frac{\tau-\rho}{\rho} \left[\alpha + \frac{\theta_2(\tau-1)-e_2}{\tau-\rho-1} \right]. \quad (23)$$

Подставляя (22), (23) в соотношение (20), получаем

$$\lambda(\lambda-1)\mu = \frac{\lambda(\lambda-1)\alpha}{\tau-\lambda} + \frac{\tau(\lambda-1)\theta_1}{\tau-\lambda} + \frac{\lambda(\tau-1)\theta_2}{\tau-\lambda} - \frac{\lambda(\lambda-1)\rho\beta}{(\tau-\lambda)(\tau-\lambda-\rho)},$$

откуда находим значение ρ :

$$\rho = \frac{(\tau-\lambda)Q}{\lambda(\lambda-1)\beta+Q}, \quad (24)$$

где

$$Q = \lambda(\lambda-1)\alpha + (\lambda-1)\tau\theta_1 + \lambda(\tau-1)\theta_2 - \lambda(\lambda-1)(\tau-\lambda)\mu.$$

Соотношения (22)–(24), задают явное описание соответствия $\Xi^{(1)}: \{\theta_1, \theta_2, \lambda, \mu\} \rightarrow \{e_1, e_2, e_3, \rho\}$.

3.2. Уравнение (10). Связь между параметрами уравнения (10) и уравнения (16) задается следующими соотношениями:

$$\theta_1 = 1 - e_1 + \frac{\rho(e_3 + e_1)}{\tau}, \quad (25)$$

$$\theta_2 = -\alpha + e_1 + \frac{e_2 + \rho(\alpha - e_1)}{\tau - 1}, \quad (26)$$

$$\lambda = \frac{e_3 + e_1}{e_3 + \alpha}, \quad (27)$$

$$(\lambda - 1)\mu = \frac{\beta\lambda - \beta + e_2}{\tau - \lambda}. \quad (28)$$

В данном случае характеристическими показателями решений на бесконечности являются числа α, β и выполняется соотношение Фукса

$$\sum_{j=1}^3 \theta_j + \alpha + \beta = 1. \quad (29)$$

С помощью (27) выражаем e_3 :

$$e_3 = \frac{e_1 - \lambda\alpha}{\lambda - 1}, \quad (30)$$

а с помощью (28) находим e_2 :

$$e_2 = (\lambda - 1)(\tau - \lambda)\mu - (\lambda - 1)\beta. \quad (31)$$

Подставив (30) в (25), получим

$$\rho = \tau \frac{\lambda - 1}{\lambda} \frac{\theta_1 + e_1 - 1}{e_1 - \alpha}. \quad (32)$$

Подставив (31), (32) в (26), найдем явное выражение для e_1 :

$$e_1 = -\lambda(\lambda - 1)\mu + \frac{(\lambda - 1)\tau(\theta_1 - 1) + \lambda(\tau - 1)\theta_2 + \lambda(\lambda - 1)\beta + \lambda(\tau - 1)\alpha}{\tau - \lambda}. \quad (33)$$

Соотношения (30)–(33) описывают соответствие $\Xi^{(2)}: \{\theta_1, \theta_2, \lambda, \mu\} \rightarrow \{e_1, e_2, e_3, \rho\}$ для второго случая положения ложной особой точки в деформированном уравнении Гойна.

4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭЙЛЕРА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ Heun1

Интегральное преобразование Эйлера связывает между собой решения систем уравнений (1), (5) (см. соотношение (3)). В терминах коэффициентов этих систем оно описывается довольно простым соотношением (6). Как было показано выше, соответствующие системы могут быть редуцированы к уравнениям Гойна с одной добавленной ложной особой точкой Heun1. Это уравнение представляет интерес из-за его связи с теорией уравнений Пенлеве. Ниже мы обсудим этот вопрос более детально, а пока нам потребуется выразить соответствие (6) в терминах коэффициентов уравнений Heun1.

При нашем выборе параметризации системы (1) преобразование (6) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} e_1 \rightarrow \tilde{e}_1 &= e_1 - \alpha + 1, & e_2 \rightarrow \tilde{e}_2 &= e_2 + \rho(\alpha - 1), \\ e_3 \rightarrow \tilde{e}_3 &= e_3 + \alpha - 1, & \beta \rightarrow \tilde{\beta} &= \beta + 1 - \alpha, \end{aligned}$$

при этом $\tilde{\rho} = \rho$, $\tilde{\tau} = \tau$, $\tilde{\alpha} = 2 - \alpha$. Здесь и ниже мы отмечаем тильдой объекты, относящиеся к системе (5) (и соответствующему уравнению Heun1). Эти соотношения описывают преобразование $\Psi: \{e_1, e_2, e_3, \alpha, \beta, \rho\} \rightarrow \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\rho}\}$. Опишем в явных терминах преобразование $\{\theta_1, \theta_2, \lambda, \mu\} \rightarrow \{\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}\}$. При этом, в соответствии с двумя вариантами выбора ложной особой точки, имеется два различных способа связать исходную систему с уравнением Heun1. Первый способ состоит в сведении системы к уравнению (9), так что мы имеем следующую цепочку преобразований наборов определяющих параметров:

$$\begin{aligned} \{\theta_1, \theta_2, \alpha, \beta, \lambda, \mu\} &\xrightarrow{\Xi^{(1)}} \{e_1, e_2, e_3, \alpha, \beta, \rho\} \xrightarrow{\Psi} \\ &\xrightarrow{\Psi} \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\rho}\} \xrightarrow{(\Xi^{(1)})^{-1}} \{\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}\}. \end{aligned}$$

Вычислим в явном виде преобразование

$$\mathfrak{S}^{(1)} = (\Xi^{(1)})^{-1} \Psi \Xi^{(1)}: \{\theta_1, \theta_2, \lambda, \mu\} \rightarrow \{\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}\}.$$

Имеем

$$\tilde{\theta}_1 = -\tilde{e}_1 + \frac{\tilde{\rho}(\tilde{e}_3 + \tilde{e}_1)}{\tilde{\tau}} = e_1 + \alpha - 1 + \frac{\rho(e_1 + e_3)}{\tau} = \theta_1 + \alpha - 1.$$

Аналогично

$$\tilde{\theta}_k = \theta_k + \alpha - 1, \quad k = 1, 2, 3. \quad (34)$$

Наиболее интересно для нас значение $\tilde{\lambda}$. Для этой величины получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \frac{\tilde{\rho}\tilde{\beta} + (\tilde{\tau} - \tilde{\rho})\tilde{e}_2}{\tilde{\rho}\tilde{\beta} + \tilde{e}_2} = \frac{\rho(\beta + 1 - \alpha) + (\tau - \rho)(e_2 + \rho(\alpha - 1))}{\rho(\beta + 1 - \alpha) + e_2 + \rho(\alpha - 1)} = \\ &= \frac{\rho\beta + (\tau - \rho)e_2 + \rho(\alpha - 1)(\tau - \rho - 1)}{\rho\beta + e_2} = \lambda + \frac{\rho(\alpha - 1)(\tau - \rho - 1)}{\rho\beta + e_2} = \\ &= \lambda + \frac{(\alpha - 1)(\tau - \rho - \lambda)}{\beta} = \lambda + \frac{(\alpha - 1)(\tau - \lambda)\lambda(\lambda - 1)}{\lambda(\lambda - 1)\beta + Q}. \end{aligned}$$

В итоге имеем

$$\tilde{\lambda} = \lambda + \frac{(1 - \alpha)\sigma(\lambda)}{\lambda(\lambda - 1)\beta + Q}. \quad (35)$$

Громоздкое выражение для $\tilde{\mu}$ мы опускаем.

Выпишем аналогичные результаты для уравнения (10), т.е. опишем преобразование

$$\begin{aligned} \{\theta_1, \theta_2, \alpha, \beta, \lambda, \mu\} &\xrightarrow{\Xi^{(2)}} \{e_1, e_2, e_3, \alpha, \beta, \rho\} \xrightarrow{\Psi} \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\rho}\} \xrightarrow{(\Xi^{(2)})^{-1}} \\ &\xrightarrow{(\Xi^{(2)})^{-1}} \{\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}\}, \end{aligned}$$

или, в более кратких обозначениях,

$$\mathfrak{Z}^{(2)} = (\Xi^{(2)})^{-1} \Psi \Xi^{(2)}: \{\theta_1, \theta_2, \lambda, \mu\} \rightarrow \{\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}\}. \quad (36)$$

Как и в предыдущем случае, находим

$$\theta_k \rightarrow \tilde{\theta}_k = \theta_k + \alpha - 1, \quad k = 1, 2, 3. \quad (37)$$

С помощью (27), (33), (30) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \frac{\tilde{e}_3 + \tilde{e}_1}{\tilde{e}_3 + \tilde{\alpha}} = \frac{e_3 + e_1}{e_3 + 1} = \\ &= \frac{\lambda[\tau(\lambda - 1)(\theta_1 + \alpha - 1) + \lambda(\tau - 1)\theta_2 + \lambda(\lambda - 1)\beta + \sigma(\lambda)\mu]}{\tau(\lambda - 1)\theta_1 + \lambda(\tau - 1)\theta_2 + \sigma(\lambda)\mu + \lambda(\lambda - 1)(\alpha + \beta - 1)}. \end{aligned} \quad (38)$$

Громоздкое выражение для параметра $\tilde{\mu}$ можно получить, используя подобные вычисления; мы его для краткости изложения опускаем. Соотношения (37), (38) описывают преобразование (36) в терминах параметров соответствующих уравнений Heun1.

Отметим, что преобразования $\mathfrak{Z}^{(1)}$ и $\mathfrak{Z}^{(2)}$ сдвигают параметры θ_k , $k = 1, 2, 3$, причем величина сдвига зависит только от параметра α и не зависит от τ .

Отметим также, что выбор одного из характеристических показателей на бесконечности в качестве параметра α произволен. Поэтому мы имеем не два, а четыре преобразования.

5. ГРУППА МОНОДРОМИИ УРАВНЕНИЯ Heun1

В данном разделе представлены необходимые понятия аналитической теории дифференциальных уравнений, более подробные сведения можно найти в [3], [4], [8]. Мы обсудим в рамках этой теории уравнение Heun1 в форме (16). Это уравнение имеет четыре регулярные особые точки $z = 0$, $z = 1$, $z = \tau$, $z = \infty$ и одну ложную особую точку $z = \lambda$. Пары характеристических показателей для регулярных особых точек в конечной плоскости равны соответственно $(0, \theta_1)$, $(0, \theta_2)$, $(0, \theta_3)$. Это означает, что одно из фундаментальных решений в окрестности этих регулярных особых точек можно взять голоморфным в соответствующей точке. Будем обозначать такие решения уравнения (16) $w_h^{(z_k)}$, $z_k = 0, 1, \tau$, а ветвящиеся решения в этих точках обозначим через $w_b^{(z_k)}$. При этом мы считаем, что эти решения нормированы на единицу:

$$w_h^{(z_k)} \sim 1, \quad w_b^{(z_k)} \sim 1 \cdot (z - z_k)^{\theta_k}$$

при $z \rightarrow z_k$, $z_k = 0, 1, \tau$. Эти ограничения однозначно фиксируют пару фундаментальных решений для каждой конечной регулярной особой точки. Введем матрицы связи, которые выражают решения, фиксированные в окрестности одной особой точки, как линейную комбинацию решений, фиксированных в окрестности другой особой точки:

$$\begin{pmatrix} w_b^{(z_m)} \\ w_h^{(z_m)} \end{pmatrix} = T[z_k \rightarrow z_m] \begin{pmatrix} w_b^{(z_k)} \\ w_h^{(z_k)} \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Матрицы $T[z_k \rightarrow z_m]$ зависят от параметров уравнения (16) $\{\theta_1, \theta_2, \alpha, \beta, \lambda, \mu, \tau\}$, так что следовало бы указывать эту зависимость явно. Однако мы предпочитаем здесь эту зависимость опускать, указывая ее только там, где это необходимо. Разумеется, матрица связи зависит от пути аналитического продолжения от точки z_m к точке z_k . Здесь мы предполагаем, что эти пути выбраны (для заданных точек $0, 1, \tau$) естественным раз и навсегда фиксированным образом. Зная полный набор матриц связи для данного уравнения, можно построить матрицу монодромии решений вдоль любого пути на комплексной плоскости, т.е. восстановить группу монодромии данного уравнения. Поэтому исследование монодромии уравнения можно свести к исследованию его матриц связи.

Хорошо известно, что с уравнением Heun1 связана теория уравнения Пенлеве PVI: решения уравнения Пенлеве PVI связаны с изомонодромными деформациями уравнения Heun1 (16) [3]. Приведем здесь соответствующий результат. Мы полагаем, что параметры λ, μ уравнения (16) зависят от τ , остальные параметры $\theta_1, \theta_2, \alpha, \beta$, которые определяют характеристические показатели в регулярных особых точках этого уравнения, не зависят от τ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть параметр τ меняется и соответственно меняются параметры $\lambda(\tau), \mu(\tau)$. Мы называем такое изменение параметров уравнения (16) *изомонодромной деформацией*, если при этом деформации матрицы связи уравнения не зависят от τ .

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы деформация параметров $\tau, \lambda(\tau), \mu(\tau)$ была изомонодромной, необходимо и достаточно, чтобы параметры $\lambda(\tau), \mu(\tau)$ удовлетворяли

Рис. 1. Путь L_{km} аналитического продолжения функции $w_b^{(z_m)}(z)$.

гамильтоновой системе уравнений

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial \mu}, \quad \frac{d\mu}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda}, \quad (40)$$

которая эквивалентна уравнению Пенлеве PVI

$$\begin{aligned} \frac{d^2\lambda}{d\tau^2} = & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-\tau} \right) \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^2 - \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau-1} + \frac{1}{\lambda-\tau} \right) \frac{d\lambda}{d\tau} + \\ & + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-\tau)}{2\tau^2(\tau-1)^2} \left[(\alpha-\beta)^2 - \theta_1^2 \frac{\tau}{\lambda^2} + \theta_2^2 \frac{\tau-1}{(\lambda-1)^2} + (1-\theta_3)^2 \frac{\tau(\tau-1)}{(\lambda-\tau)^2} \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

6. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ И КВАЗИСИММЕТРИИ ГРУПП МОНОДРОМИИ

В данном разделе мы опишем результат аналитического продолжения решений уравнения Heun1 двумя способами и на этой основе установим квазисимметрии группы монодромии этого уравнения. Возьмем одну из регулярных особых точек уравнения (16), $z = z_m$, и продолжим решение $w_b^{z_m}(z)$ вдоль контура L_{km} , обходящего вокруг другой регулярной особой точки z_k (рис. 1). Имеет место простое следствие соотношения (39), описывающее результат этого аналитического продолжения

$$w_b^{(z_m)} \rightarrow w_b^{(z_m)} + [e^{2\pi i \theta_k} - 1] T_{11}[z_k \rightarrow z_m] w_b^{(z_k)}. \quad (42)$$

Кроме того, мы можем реализовать аналитическое продолжение решения $w_b^{z_m}(z)$ уравнения (16) вдоль контура L_{km} с помощью интегрального соотношения (3). Отметим, что это интегральное преобразование имеет скалярное ядро и, таким образом, переводит верхнюю (нижнюю) компоненту вектор-функции $\Phi(t)$ в верхнюю (нижнюю) компоненту вектор-функции $W(z)$. Напомним, что выбор верхней (нижней) компоненты соответствует уравнению (9) (уравнению (10)). Запишем эту интегральную связь в виде

$$w_b^{(z_m)}(z) = \chi_m \int_{C_m} (z-t)^{-\alpha} \phi_b^{(z_m)}(t) dt, \quad (43)$$

где контур интегрирования C_m представлен на рис. 2, χ_m – нормировочная константа,

$$\chi_m = 4 \sin(-\pi\alpha) \sin[\pi(\theta_m + \alpha - 1)] e^{\pi\theta_m} B(1-\alpha, \theta_k + \alpha). \quad (44)$$

Рис. 2. Контур интегрирования C_m .

Используя соотношение (43), с помощью соответствующей деформации контура интегрирования и аналитического продолжения подынтегрального выражения можно получить [5], что

$$w_b^{(z_m)} \rightarrow w_b^{(z_m)} + \exp[-2\pi i(\theta_k + \alpha - 1)] [\exp[2\pi i(\theta_m + \alpha - 1)] - 1] \frac{\chi_k}{\chi_m} \tilde{T}_{11}[z_k \rightarrow z_m] w_b^{(z_k)}, \quad (45)$$

где $\tilde{T}_{11}[z_k \rightarrow z_m]$ – элемент матрицы связи для уравнения Neun1, соответствующего системе (5). Сравнивая (42) и (45), мы приходим к следующей квазисимметрии элементов матриц связи уравнения Neun1:

$$T_{11}[z_k \rightarrow z_m] = \tilde{T}_{11}[z_k \rightarrow z_m] \nu_{km}, \quad (46)$$

где

$$\nu_{km} = \frac{\sin[\pi(\theta_k + \alpha - 1)] B(1 - \alpha, \theta_k + \alpha)}{\sin(\pi\theta_k) B(1 - \alpha, \theta_m + \alpha)} \exp[\pi i(1 - \alpha - 2\theta_k)].$$

Подчеркнем, что величина ν_{km} зависит только от характеристических показателей уравнения (16) и тем самым не зависит от параметра τ . В соответствии с вышеприведенными соображениями соотношение (46) справедливо для обеих реализаций уравнения Neun1 – для уравнений (9) и (10).

7. СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ PVI

Для уравнения Neun1 в качестве пар регулярных особых точек можно рассматривать три варианта: $\{z_m = 0, z_k = 1\}$, $\{z_m = 0, z_k = \tau\}$, $\{z_m = \tau, z_k = 1\}$. Соответственно существуют три квазисимметрии (46) для этих пар особых точек: $\tilde{T}_{11}[0 \rightarrow 1]$, $\tilde{T}_{11}[0 \rightarrow \tau]$, $\tilde{T}_{11}[\tau \rightarrow 1]$. Напомним, что если $\lambda(\tau)$, $\mu(\tau)$ деформируются согласно гамильтоновой системе (40), то левые части трех соотношений (46) остаются постоянными. При этом, соответственно, остаются постоянными и правые части этих соотношений, т.е. указанные элементы матриц связи. Мы приходим к следующему выводу.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\lambda(\tau)$ является решением уравнения Пенлеве (41) с параметрами $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, значения θ_k , $k = 1, 2, 3$, $\tilde{\lambda}$ задаются соотношениями (34), (35) (или (37), (38)) и выполняется соотношение

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \lambda} \tilde{T}_{11}[0 \rightarrow 1] & \frac{\partial}{\partial \lambda} \tilde{T}_{11}[0 \rightarrow \tau] & \frac{\partial}{\partial \lambda} \tilde{T}_{11}[\tau \rightarrow 1] \\ \frac{\partial}{\partial \mu} \tilde{T}_{11}[0 \rightarrow 1] & \frac{\partial}{\partial \mu} \tilde{T}_{11}[0 \rightarrow \tau] & \frac{\partial}{\partial \mu} \tilde{T}_{11}[\tau \rightarrow 1] \end{pmatrix} = 2. \quad (47)$$

Тогда функция $\tilde{\lambda}(\tau)$, заданная соотношением (35) (или (38)) является решением уравнения Пенлеве PVI (41) с параметрами (34) (или (37)).

Условие (47) гарантирует возможность однозначного восстановления функций $\tilde{\lambda}(\tau)$, $\tilde{\mu}(\tau)$ с помощью подходящей пары функций $\tilde{T}_{11}[z_k \rightarrow z_m]$. По-видимому, оно выполняется в ситуации общего положения.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы обсудили интегральные связи для решений уравнения Heun1 – фуксова уравнения с четырьмя регулярными особыми точками и одной ложной особой точкой первого порядка. Эти интегральные связи проще выводить для систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка, а затем редуцировать эти системы к уравнению Heun1. Интегральные связи для решений уравнения Heun1 приводят к квазисимметриям соответствующих матриц связи уравнения Heun1. Затем мы использовали известные результаты об изомонодромной деформации уравнения Heun1 для того, чтобы установить симметрию функций $\lambda(t)$ – решений уравнения Пенлеве PVI. Совместно с опущенным нами явным описанием симметрий функций $\mu(t)$ мы получаем бирациональные преобразования решений системы (40). Таким образом, с помощью интегральной симметрии деформированного уравнения Гойна мы построили часть бирациональных преобразований, принадлежащих известной группе симметрий Окамото.

С помощью наших построений можно вывести и интегральные связи для решений уравнения Гойна с двумя добавленными ложными особыми точками. Изомонодромные деформации такого уравнения описываются с помощью решений системы Шлезингера. Это позволяет надеяться, что в рамках предложенного подхода можно построить и аналогичные симметрии решений систем Шлезингера.

Благодарности. Авторы благодарны М. В. Бабичу за ценные дискуссии.

Список литературы

- [1] С. Ю. Славянов, В. Лай, *Специальные функции. Единая теория, основанная на анализе особенностей*, Невский диалект, СПб, 2002.
- [2] С. Ю. Славянов, Ф. Р. Вукайлович, *ТМФ*, **150**:1, 143–151.
- [3] Y. Sibuya, *Linear Differential Equations in the Complex Domain: Problem of Analytic Continuation*, Transl. Math. Monogr., **82**, AMS, Providence, RI, 1990.
- [4] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, *From Gauss to Painlevé. A Modern Theory of Special Functions*, Aspects of Math. E, **16**, Braunschweig, Vieweg, 1991.
- [5] А. Я. Казаков, *ТМФ*, **116**:3 (1998), 323–335.
- [6] А. Я. Казаков, *Записки науч. сем. ПОМИ*, **275** (2001), 55–71.
- [7] Д. П. Новиков, *ТМФ*, **146**:3 (2006), 355–364.
- [8] А. А. Болибрух, *Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения*, МЦНМО, М., 2000.

Поступила в редакцию 29.10.2007