Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Лакаев, А. М. Халхужаев, О спектре двухчастичного оператора Шредингера на решетке, *ТМФ*, 2008, том 155, номер 2, 287–300

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6211>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 15:13:18

© 2008 г.

С. Н. Лакаев*, А. М. Халхужаев†

О СПЕКТРЕ ДВУХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА РЕШЕТКЕ

Рассматривается семейство двухчастичных дискретных операторов Шредингера $H(k)$, ассоциированных с гамильтонианом системы двух фермионов на ν -мерной решетке $\mathbb{Z}^\nu$, $\nu \geq 1$, где $k \in \mathbb{T}^\nu \equiv (-\pi, \pi]^\nu$ – двухчастичный квазиимпульс. Доказано, что для любой размерности $\nu = 1, 2, \dots$ оператор $H(k)$, $k \in \mathbb{T}^\nu$, $k \neq 0$, имеет собственное значение, лежащее левее существенного спектра, если оператор $H(0)$ имеет виртуальный уровень ($\nu = 1, 2$) или собственное значение ($\nu \geq 3$) на дне существенного спектра (двухчастичного континуума).

Ключевые слова: спектральные свойства, двухчастичный дискретный оператор Шредингера, принцип Бирмана–Швингера, виртуальный уровень, собственное значение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Основной целью настоящей работы является доказательство существования собственных значений двухчастичных дискретных операторов Шредингера $H(k)$, ассоциированных с гамильтонианом системы двух фермионов на ν -мерной решетке $\mathbb{Z}^\nu$, $\nu \geq 1$, при всех ненулевых значениях квазиимпульса $k \in \mathbb{T}^\nu$ и при условии, что оператор $H(0)$ имеет виртуальный уровень ($\nu = 1, 2$) или собственное значение ($\nu \geq 3$) на дне существенного спектра (двухчастичного континуума).

Спектральные свойства двухчастичных операторов Шредингера $H_\mu(k) = H_0(k) - \mu V$, $k \in \mathbb{T}^\nu$, ассоциированных с гамильтонианом системы двух частиц на ν -мерной решетке $\mathbb{Z}^\nu$, $\nu \geq 1$, и взаимодействующих с помощью короткодействующих потенциалов μV , изучены в работах [1]–[5]. В работах [1], [4], [5] рассматриваются гамильтонианы систем двух частиц, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения. Установлено, что соответствующий оператор Шредингера $H_\mu(k)$ либо имеет единственное собственное значение, либо не имеет собственных значений в зависимости от значений энергии взаимодействия $\mu > 0$ и квазиимпульса $k \in \mathbb{T}^3$.

*Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан.
E-mail: slakaev@mail.ru

†Комплексный научно-исследовательский институт региональных проблем Самаркандского отделения АН РУз, Самарканд, Узбекистан. E-mail: ahmad_x@mail.ru

В [2] доказано существование собственных значений двухчастичных операторов Шредингера $H(k)$, ассоциированных с гамильтонианом системы двух произвольных частиц на ν -мерной решетке $\mathbb{Z}^\nu$, $\nu \geq 3$, при всех ненулевых значениях квазиимпульса $k \in \mathbb{T}^\nu$ и при условии, что оператор $H(0)$ имеет либо виртуальный уровень ($\nu = 3, 4$), либо собственное значение ($\nu \geq 5$) на дне существенного спектра (двухчастичного континуума).

Следует отметить следующее отличие: в случае бозонов дно существенного спектра является виртуальным уровнем (если размерность решетки $\nu = 3, 4$) и собственным значением при $\nu \geq 5$ оператора Шредингера $H(0)$. В настоящей статье для случая системы фермионов дно существенного спектра является виртуальным уровнем оператора $H(0)$ при $\nu = 1, 2$ (см. определение в разделе 4) и его собственным значением при $\nu \geq 3$.

Кроме того, в работе показано, что для любого $k \in \mathbb{T}^\nu$ оператор $H(k)$ может иметь лишь конечное число собственных значений, лежащих вне существенного спектра.

В настоящей работе через C , C_1 и C_2 обозначены положительные числа, принимающие различные значения; $\mathcal{U}_\delta(0) = \{K \in \mathbb{T}^\nu : |K| < \delta\}$ означает достаточно малую δ -окрестность нуля. Через $\mathcal{B}(\theta, \mathcal{U}_\delta(0))$, $0 < \theta \leq 1$, обозначено банахово пространство непрерывных по Гёльдеру функций на $\mathcal{U}_\delta(0)$ с показателем θ , полученное пополнением пространства гладких функций на $\mathcal{U}_\delta(0)$ относительно нормы

$$\|f\|_\theta = \sup_{k, \ell \in \mathbb{T}^\nu, \ell \neq 0} [|f(k)| + |\ell|^{-\theta} |f(k + \ell) - f(k)|].$$

2. КООРДИНАТНОЕ И ИМПУЛЬСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГАМИЛЬТОНИАНА СИСТЕМЫ ДВУХ ЧАСТИЦ (ФЕРМИОНОВ) НА РЕШЕТКЕ

Пусть $\mathbb{Z}^\nu$ – ν -мерная целочисленная решетка и $(\mathbb{Z}^\nu)^2$ – декартово произведение $\mathbb{Z}^\nu$. Обозначим через $\ell_2((\mathbb{Z}^\nu)^2)$ гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определенных на $(\mathbb{Z}^\nu)^2$, и через $\ell_2^a((\mathbb{Z}^\nu)^2) \subset \ell_2((\mathbb{Z}^\nu)^2)$ – подпространство, состоящее из антисимметричных функций.

Свободный гамильтониан $\hat{H}_0$ рассматриваемой нами системы двух одинаковых частиц (фермионов) в координатном представлении определяется оператором, действующим в гильбертовом пространстве $\ell_2^a((\mathbb{Z}^\nu)^2)$, по формуле

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m} \Delta_{x_1} + \frac{1}{2m} \Delta_{x_2}, \quad (2.1)$$

где $\Delta_{x_1} = \Delta \otimes I$ и $\Delta_{x_2} = I \otimes \Delta$, а $m > 0$ обозначает массу фермиона. Решетчатый лапласиан Δ есть разностный оператор, описывающий перенос частицы с каждого узла на соседний узел, т.е.

$$(\Delta \hat{\psi})(x) = \sum_{|s|=1} [\hat{\psi}(x) - \hat{\psi}(x + s)], \quad \hat{\psi} \in \ell_2(\mathbb{Z}^\nu).$$

Гамильтониан системы двух фермионов (двухчастичный гамильтониан) $\hat{H}$ описывает взаимодействие двух частиц в гильбертовом пространстве $\ell_2^a((\mathbb{Z}^\nu)^2)$ по формуле

$\widehat{H} = \widehat{H}_0 - \widehat{V}$, где $\widehat{V}$ – оператор умножения на вещественнозначную функцию:

$$(\widehat{V}\widehat{\psi})(x_1, x_2) = \widehat{V}(x_1 - x_2)\widehat{\psi}(x_1, x_2), \quad \widehat{\psi} \in \ell_2^{\mathfrak{a}}((\mathbb{Z}^\nu)^2).$$

ОСНОВНОЕ УСЛОВИЕ. *Предположим, что функция $\widehat{V}(s) \geq 0$ является четной на $\mathbb{Z}^\nu$ и удовлетворяет условиям*

$$\begin{aligned} \lim_{|s| \rightarrow \infty} |s|^{2+\xi} \widehat{V}(s) &= 0 & \text{при} & \quad \nu = 1 & \text{или} & \quad \nu = 2, \\ \lim_{|s| \rightarrow \infty} |s|^{3+1/2+\xi} \widehat{V}(s) &= 0 & \text{при} & \quad \nu = 3, \\ \lim_{|s| \rightarrow \infty} |s|^{\nu+\xi} \widehat{V}(s) &= 0 & \text{при} & \quad \nu \geq 4, \end{aligned}$$

где $\xi > 0$ – некоторое положительное число.

При выполнении основного условия двухчастичный гамильтониан $\widehat{H}$ является ограниченным самосопряженным оператором в $\ell_2^{\mathfrak{a}}((\mathbb{Z}^\nu)^2)$.

Пусть $\mathbb{T}^\nu$ – ν -мерный тор, т.е. куб $(-\pi, \pi]^\nu$ с соответствующим отождествлением противоположных граней. Он рассматривается как абелева группа, в которой операции сложения и умножения на вещественное число введены как операции сложения и умножения на вещественное число в $\mathbb{R}^\nu$ по модулю $(2\pi\mathbb{Z})^\nu$.

Пусть $L_2((\mathbb{T}^\nu)^2)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $(\mathbb{T}^\nu)^2$, $L_2^{\mathfrak{a}}((\mathbb{T}^\nu)^2) \subset L_2((\mathbb{T}^\nu)^2)$ – подпространство антисимметричных функций. Пусть $\mathcal{F}: L_2((\mathbb{T}^\nu)^2) \rightarrow \ell_2^{\mathfrak{a}}((\mathbb{Z}^\nu)^2)$ – стандартное преобразование Фурье. Обозначим через $\widehat{\mathcal{F}}: L_2^{\mathfrak{a}}((\mathbb{T}^\nu)^2) \rightarrow \ell_2^{\mathfrak{a}}((\mathbb{Z}^\nu)^2)$ сужение $\mathcal{F}$ на $L_2^{\mathfrak{a}}((\mathbb{T}^\nu)^2)$.

Двухчастичный гамильтониан в импульсном представлении определяется как ограниченный самосопряженный оператор H , действующий в $L_2^{\mathfrak{a}}((\mathbb{T}^\nu)^2)$,

$$H = \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \widehat{H} \widehat{\mathcal{F}} \equiv H_0 - V.$$

Двухчастичный свободный гамильтониан H_0 является оператором умножения на функцию:

$$(H_0 f)(k_1, k_2) = \left(\frac{1}{m} \varepsilon(k_1) + \frac{1}{m} \varepsilon(k_2) \right) f(k_1, k_2), \quad f \in L_2^{\mathfrak{a}}((\mathbb{T}^\nu)^2),$$

где

$$\varepsilon(k) = \sum_{j=1}^{\nu} (1 - \cos k^{(j)}), \quad k = (k^{(1)}, k^{(2)}, \dots, k^{(\nu)}) \in \mathbb{T}^\nu.$$

При выполнении основного условия возмущение V определяется как ограниченный самосопряженный оператор, действующий в $L_2^{\mathfrak{a}}((\mathbb{T}^\nu)^2)$ по формуле

$$(Vf)(k_1, k_2) = (2\pi)^{-\nu/2} \int_{(\mathbb{T}^\nu)^2} V(k_1 - k'_1) \delta(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2) f(k'_1, k'_2) dk'_1 dk'_2.$$

Здесь $\delta(k)$ обозначает дельта-функцию Дирака на $\mathbb{T}^\nu$, функция V есть ряд Фурье

$$V(k) = (2\pi)^{-\nu/2} \sum_{s \in \mathbb{Z}^\nu} \widehat{V}(s) e^{i(k, s)}, \quad (2.2)$$

где

$$(k, s) = \sum_{j=1}^{\nu} k^{(j)} s^{(j)}, \quad k = (k^{(1)}, \dots, k^{(\nu)}) \in \mathbb{T}^{\nu}, \quad s = (s^{(1)}, \dots, s^{(\nu)}) \in \mathbb{Z}^{\nu}.$$

Обозначим через $\widehat{U}_s$, $s \in \mathbb{Z}^{\nu}$, унитарный оператор, действующий в $\ell_2^{\mathfrak{a}}((\mathbb{Z}^{\nu})^2)$ по формуле

$$(\widehat{U}_s f)(n_1, n_2) = f(n_1 + s, n_2 + s), \quad f \in \ell_2^{\mathfrak{a}}((\mathbb{Z}^{\nu})^2), \quad s \in \mathbb{Z}^{\nu}.$$

Так как для любых $s, p \in \mathbb{Z}^{\nu}$ имеет место равенство

$$\widehat{U}_{s+p} = \widehat{U}_s \widehat{U}_p, \quad s, p \in \mathbb{Z}^{\nu},$$

группа $\{\widehat{U}_s, s \in \mathbb{Z}^{\nu}\}$ образует унитарное представление абелевой группы $\mathbb{Z}^{\nu}$ в гильбертовом пространстве $\ell_2^{\mathfrak{a}}((\mathbb{Z}^{\nu})^2)$.

После преобразования Фурье оператор сдвига $\widehat{U}_s$ переходит в унитарный оператор $U_s = \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \widehat{U}_s \widehat{\mathcal{F}}$, $s \in \mathbb{Z}^{\nu}$, действующий как оператор умножения на функцию:

$$(U_s f)(k_1, k_2) = e^{-i(s, k_1 + k_2)} f(k_1, k_2), \quad f \in L_2^{\mathfrak{a}}((\mathbb{T}^{\nu})^2).$$

Для любого $k \in \mathbb{T}^{\nu}$ обозначим

$$\mathbb{F}_k = \{(k_1, k - k_1) \in (\mathbb{T}^{\nu})^2 : k_1 \in \mathbb{T}^{\nu}, k - k_1 \in \mathbb{T}^{\nu}\}.$$

Заметим, что $\mathbb{F}_k$ является ν -мерным многообразием, изоморфным к $\mathbb{T}^{\nu}$. Действительно, рассмотрим отображение

$$\pi : (\mathbb{T}^{\nu})^2 \rightarrow \mathbb{T}^{\nu}, \quad \pi((k_1, k_2)) = q, \quad q = \frac{k_1 + k_2}{2} - k_2.$$

Обозначим через π_k , $k \in \mathbb{T}^{\nu}$, сужение отображения π на $\mathbb{F}_k \subset (\mathbb{T}^{\nu})^2$, т.е.

$$\pi_k = \pi|_{\mathbb{F}_k}. \quad (2.3)$$

Отображение π_k , $k \in \mathbb{T}^{\nu}$, биективно отображает $\mathbb{F}_k \subset (\mathbb{T}^{\nu})^2$, $k \in \mathbb{T}^{\nu}$, на $\mathbb{T}^{\nu}$ с обратным отображением

$$\pi_k^{-1}(q) = \left(\frac{1}{2}k + q, \frac{1}{2}k - q \right).$$

3. РАЗЛОЖЕНИЕ В ПРЯМОЙ ОПЕРАТОРНЫЙ ИНТЕГРАЛ

Пространство $L_2^{\mathfrak{a}}((\mathbb{T}^{\nu})^2)$ разлагается в прямой интеграл

$$L_2^{\mathfrak{a}}((\mathbb{T}^{\nu})^2) = \int_{k \in \mathbb{T}^{\nu}} \oplus L_2^{\mathfrak{a}}(\mathbb{F}_k) dk,$$

где $L_2^{\mathfrak{a}}(\mathbb{F}_k)$ – пространство квадратично-интегрируемых и антисимметричных функций, определенных на $\mathbb{F}_k$.

Соответственно унитарное отображение U_s , $s \in \mathbb{Z}^\nu$, разлагается в прямой интеграл

$$U_s = \int_{k \in \mathbb{T}^\nu} \oplus U_s(k) dk,$$

где

$$U_s(k) = e^{-i(s,k)} I_{L_2^a(\mathbb{F}_k)},$$

а через $I_{L_2^a(\mathbb{F}_k)}$ обозначен единичный оператор в пространстве $L_2^a(\mathbb{F}_k)$.

Гамильтониан $\hat{H}$ коммутирует с группой операторов $\hat{U}_s$, $s \in \mathbb{Z}^\nu$, т.е. $\hat{U}_s \hat{H} = \hat{H} \hat{U}_s$, $s \in \mathbb{Z}^\nu$. Соответственно гамильтониан H коммутирует с группой U_s , $s \in \mathbb{Z}^\nu$, и поэтому оператор H разлагается в прямой интеграл

$$H = \int_{k \in \mathbb{T}^\nu} \oplus \tilde{H}(k) dk.$$

Слойный оператор $\tilde{H}(k)$, $k \in \mathbb{T}^\nu$, действует в $L_2^a(\mathbb{F}_k)$ по формуле

$$\begin{aligned} (\tilde{H}(k)f)(q, k-q) &= \left[\frac{1}{m} \varepsilon(q) + \frac{1}{m} \varepsilon(k-q) \right] f(q, k-q) - \\ &\quad - (2\pi)^{-\nu/2} \int_{\mathbb{T}^\nu} V(q-s) f(s, k-s) ds. \end{aligned}$$

Рассмотрим оператор $H(k)$, $k \in \mathbb{T}^\nu$, действующий в гильбертовом пространстве $L_2^o(\mathbb{T}^\nu) = \{f \in L_2(\mathbb{T}^\nu) : f(-q) = -f(q)\}$ по формуле

$$H(k) = H_0(k) - V. \quad (3.1)$$

Невозмущенный оператор $H_0(k)$ есть оператор умножения на функцию $E_k(q)$ в пространстве $L_2^o(\mathbb{T}^\nu)$, т.е.

$$(H_0(k)f)(q) = E_k(q)f(q), \quad f \in L_2^o(\mathbb{T}^\nu), \quad (3.2)$$

где

$$E_k(q) = \frac{1}{m} \varepsilon\left(\frac{1}{2}k + q\right) + \frac{1}{m} \varepsilon\left(\frac{1}{2}k - q\right). \quad (3.3)$$

Оператор взаимодействия (оператор возмущения) V действует в гильбертовом пространстве $L_2^o(\mathbb{T}^\nu)$ по формуле

$$(Vf)(q) = (2\pi)^{-\nu/2} \int_{\mathbb{T}^\nu} V(q-t)f(t) dt, \quad f \in L_2^o(\mathbb{T}^\nu). \quad (3.4)$$

Слойный оператор $\tilde{H}(k)$, $k \in \mathbb{T}^\nu$, унитарно эквивалентен оператору $H(k)$, $k \in \mathbb{T}^\nu$. Эта эквивалентность осуществляется с помощью унитарного оператора

$$u_k : L_2^a(\mathbb{F}_k) \rightarrow L_2^o(\mathbb{T}^\nu), \quad k \in \mathbb{T}^\nu, \quad u_k g = g \circ \pi_k^{-1}, \quad (3.5)$$

где отображение π_k определено в (2.3).

4. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

При выполнении основного условия возмущение V оператора $H_0(k)$ принадлежит классу операторов со следом. Следовательно, из теоремы Вейля о существенном спектре (см. [6]) существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H(k))$ оператора $H(k)$, определенного в (3.1), совпадает со спектром оператора $H_0(k)$. Так как $H_0(k)$ есть оператор умножения на функцию, то

$$\sigma_{\text{ess}}(H(k)) = [m(k), M(k)],$$

где

$$m(k) = \min_{q \in \mathbb{T}^\nu} E_k(q), \quad M(k) = \max_{q \in \mathbb{T}^\nu} E_k(q).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $k = (\pi, \pi, \dots, \pi) \in \mathbb{T}^\nu$ существенный спектр оператора $H(k)$ вырождается, т.е. превращается в точку, и поэтому мы не можем утверждать, что $\sigma_{\text{ess}}(H(k))$ является абсолютно непрерывным при любом $k \in \mathbb{T}^\nu$.

В силу основного условия оператор $\hat{V}$ является оператором умножения на положительную функцию $\hat{V}(s)$, поэтому положительный корень $\hat{V}^{1/2}$ является оператором умножения на положительную функцию $\hat{V}^{1/2}(s)$. Следовательно, положительный корень $V^{1/2}$ оператора V имеет вид

$$(V^{1/2}f)(p) = (2\pi)^{-\nu/2} \int_{\mathbb{T}^\nu} V^{1/2}(p-p')f(p') dp',$$

где ядро $V^{1/2}(p)$ есть обратное преобразование Фурье функции $\hat{V}^{1/2}(s)$, т.е.

$$V^{1/2}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}} \sum_{s \in \mathbb{Z}^\nu} \hat{V}^{1/2}(s) e^{i(p,s)}. \quad (4.1)$$

Для каждого $k \in (-\pi, \pi)^\nu$ и $z \leq m(k)$ (и для каждого $k \in \mathbb{T}^\nu \setminus (-\pi, \pi)^\nu$ и $z < m(k)$) определим интегральные операторы $G(k, z)$ и $G_{1/2}(k, z)$ соответственно с ядрами

$$G(k, z; p, s) = \frac{1}{(2\pi)^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{V^{1/2}(p-t)V^{1/2}(t-s) dt}{E_k(t) - z},$$

$$G_{1/2}(k, z; p, s) = \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}} \frac{V^{1/2}(p-s)}{(E_k(p) - z)^{1/2}}.$$

Отметим, что для любого $z < m(k)$ имеют место следующие равенства: $G(k, z) = V^{1/2}R_0(k, z)V^{1/2}$ и $G_{1/2}(k, z) = R_0^{1/2}(k, z)V^{1/2}$, где $R_0(k, z)$ – резольвента оператора $H_0(k)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\nu = 1$ или $\nu = 2$ и выполняется основное условие. Предположим, что уравнение $G(0, 0)\psi = \psi$ имеет ненулевое решение $\psi \in L_2^0(\mathbb{T}^\nu)$. Будем говорить, что оператор $H(0)$ имеет виртуальный уровень в нуле, если

$$\frac{(V^{1/2}\psi)(p)}{E_0(p)} \notin L_2^0(\mathbb{T}^\nu)$$

(см. также ниже лемму 3).

Дальнейшие результаты опираются только на уравнение $G(0,0)\psi = \psi$. Однако функции

$$\frac{(V^{1/2}\psi)(p)}{E_0(p)}$$

может как принадлежать пространству $L_2^0(\mathbb{T}^\nu)$, так и не принадлежать ему. В первом случае нуль является собственным значением оператора $H(0)$, а во втором случае естественно говорить о виртуальном уровне.

Предположим, что выполняется основное условие. Тогда справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\nu = 1$ или $\nu = 2$. Если число $\lambda = 1$ является собственным значением оператора $G(0,0)$, то для любого $k \neq 0$ оператор $H(k)$ имеет собственное значение, лежащее левее существенного спектра.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\nu \geq 3$. Если число $z = 0$ является n -кратным собственным значением оператора $H(0)$, то для любого $k \neq 0$ оператор $H(k)$ имеет не менее n собственных значений, лежащих левее существенного спектра.

ТЕОРЕМА 3. Для любых $k \in (-\pi, \pi)^\nu$ и $\nu \in \mathbb{N}$ оператор $H(k)$ может иметь лишь конечное число собственных значений, лежащих левее существенного спектра.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Так как возмущенный оператор V положителен, $H(k)$ не имеет собственных значений, лежащих правее $M(k)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Множество операторов, удовлетворяющих условиям теорем 1 и 2, не пусто (см. пример в разделе 6).

5. ПРИНЦИП БИРМАНА–ШВИНГЕРА

ЛЕММА 1. Оператор $G(k, z)$ действует в $L_2^0(\mathbb{T}^\nu)$, положителен, непрерывен по $z \leq m(k)$ и принадлежит классу Σ_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функцию $E_k(q)$, определенную по формуле (3.3), представим в виде

$$E_k(q) = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^{\nu} \left(1 - \cos \frac{k^{(i)}}{2} \cos q^{(i)} \right).$$

Из четности функций $E_k(q)$ и $V^{1/2}(q)$ на $\mathbb{T}^\nu$ следует, что

$$G_{1/2}(k, z; -p, -s) = G_{1/2}(k, z; p, s).$$

Поэтому пространство $L_2^0(\mathbb{T}^\nu)$ инвариантно относительно оператора $G_{1/2}(k, z)$.

Напомним (см. [6, теорема VI.22]), что оператор A принадлежит классу операторов Гильберта–Шмидта тогда и только тогда, когда $\{\|A\varphi_n\|\} \in \ell_2(\mathbb{Z}^\nu)$ для некоторого ортонормированного базиса φ_n .

Пусть

$$\left\{ \varphi_n(p) = \frac{\sqrt{2}}{(2\pi)^\nu} \sin(n, p), n \in \mathbb{Z}^\nu \right\}$$

– ортонормированный базис в $L_2^0(\mathbb{T}^\nu)$. Тогда

$$(G_{1/2}(k, z)\varphi_n)(p) = \frac{\widehat{V}^{1/2}(n)\varphi_n(p)}{\sqrt{E_k(p) - z}}, \quad z \leq m(k).$$

Имеем

$$\|G_{1/2}(k, z)\varphi_n\|^2 = \frac{2\widehat{V}(n)}{(2\pi)^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{\sin^2(n, q) dq}{E_k(q) - z}, \quad n \in \mathbb{Z}^\nu. \quad (5.1)$$

Пусть $\nu = 1$ или $\nu = 2$. Так как для каждого $0 < \zeta \leq 1$ и $q \in \mathbb{T}^\nu$, $n \in \mathbb{Z}^\nu$, имеет место неравенство $\sin(n, q) \leq |q|^\zeta |n|^\zeta$, интеграл в правой части равенства (5.1) удовлетворяет неравенству

$$\int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{\sin^2(n, q) dq}{E_k(q) - z} \leq \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{|n|^{2\zeta} |q|^{2\zeta} dq}{\frac{2}{m} \sum_{i=1}^\nu (1 - \cos(k^{(i)}/2) \cos q^{(i)}) - z}. \quad (5.2)$$

Знаменатель подынтегральной функции в правой части неравенства (5.2) имеет невырожденный минимум в нуле. Поэтому, переходя к сферическим системам координат, после вычислений получим неравенство

$$\int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{|q|^{2\zeta} dq}{\frac{2}{m} \sum_{i=1}^\nu (1 - \cos(k^{(i)}/2) \cos q^{(i)}) - z} \leq C_1 \int_0^\delta \frac{dt}{|t|^{2-2\zeta-\nu+1}} + C_2. \quad (5.3)$$

Интеграл правой части неравенства (5.3) сходится в одномерном случае при $\zeta > 1/2$ и в двумерном случае при $\zeta > 0$. Учитывая соотношения (5.1)–(5.3), в силу основного условия для каждого $\xi > 0$ получим, выбирая $1 < 2\zeta < 1 + \xi$ при $\nu = 1$ и $0 < 2\zeta < \xi$ при $\nu = 2$, что $\{\|G_{1/2}(k, z)\varphi_n\|\} \in \ell_2(\mathbb{Z}^\nu)$.

Пусть $\nu \geq 3$. Пользуясь неравенством $\sin(n, q) \leq 1$, оценим интеграл в правой части равенства (5.1) сверху интегралом

$$(2\pi)^{-\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{dq}{E_k(q) - z}, \quad z \leq m(k).$$

Так как функция $E_k(q)$, $k \in (-\pi, \pi)^\nu$, имеет единственный невырожденный минимум в $q = 0$, этот интеграл сходится и его значение мы обозначим через $d(k, z)$. Имеем

$$\|G_{1/2}(k, z)\varphi_n\|^2 \leq C d(k, z) \widehat{V}(n), \quad n \in \mathbb{Z}^\nu.$$

Пользуясь основным условием, получим, что $\{\|G_{1/2}(k, z)\varphi_n\|\} \in \ell_2(\mathbb{Z}^\nu)$. Поэтому $G_{1/2}(k, z)$ принадлежит классу операторов Гильберта–Шмидта.

Из монотонности интеграла Лебега вытекает, что $G_{1/2}(k, z)$ как операторнозначная функция является непрерывной слева по $z \leq m(k)$. Из равенства $G(k, z) = (G_{1/2}(k, z))^* G_{1/2}(k, z)$ вытекает, что оператор $G(k, z)$ также непрерывен слева по $z \leq m(k)$, положителен и $G(k, z) \in \Sigma_1$.

Для ограниченного самосопряженного оператора A , действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и не имеющего существенного спектра правее (соответственно левее) точки $\mu \in \mathbb{R}$, определим $n_+(\mu, A)$ (соответственно $n_-(\mu, A)$):

$$n_+(\mu, A) = \sup\{\dim L: L \subset \mathcal{H}; (Af, f) > \mu, \|f\| = 1\},$$

$$n_-(\mu, A) = \sup\{\dim L: L \subset \mathcal{H}; (Af, f) < \mu, \|f\| = 1\}.$$

Число $n_+(\mu, A)$ (соответственно $n_-(\mu, A)$) совпадает с числом собственных значений оператора A , лежащих правее (соответственно левее) точки μ .

Для оператора $H(k)$, $k \in \mathbb{T}^\nu$, справедлив следующий принцип Бирмана–Швингера.

ЛЕММА 2. Для каждого $k \in (-\pi, \pi)^\nu$ и $z \leq m(k)$ выполняется равенство

$$n_-(z, H(k)) = n_+(1, G(k, z)). \quad (5.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z < m(k)$. Сначала мы докажем неравенство

$$n_-(z, H(k)) \leq n_+(1, G(k, z)).$$

Пусть $z_1(k) \leq z_2(k) \leq \dots \leq z_m(k) < m(k)$ – собственные значения оператора $H(k)$. Обозначим через L_i подпространство, порожденное собственными функциями, соответствующими собственным значениям $z_i(k)$, $i = \overline{1, m}$. Для любого $u \in L_m$ имеем

$$((H_0(k) - z)u, u) < (Vu, u). \quad (5.5)$$

Это неравенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$(y, y) < (R_0^{1/2}(k, z)VR_0^{1/2}(k, z)y, y),$$

где $y = (H_0(k) - z)^{1/2}u$. Следовательно,

$$n_-(z, H(k)) \leq n_+(1, R_0^{1/2}(k, z)VR_0^{1/2}(k, z)). \quad (5.6)$$

Для ограниченных операторов A и B каждое ненулевое собственное значение оператора AB является собственным значением BA с той же кратностью (см., например, [7]), поэтому имеем

$$n_+(1, R_0^{1/2}(k, z)VR_0^{1/2}(k, z)) = n_+(1, V^{1/2}R_0(k, z)V^{1/2}).$$

Отсюда и из (5.6) получаем

$$n_-(z, H(k)) \leq n_+(1, G(k, z)). \quad (5.7)$$

Заменяя аргументы, мы получим неравенство, обратное к (5.7), и, следовательно,

$$n_-(z, H(k)) = n_+(1, G(k, z)). \quad (5.8)$$

Осталось доказать равенство $n_+(1, G(k, m(k))) = n_-(m(k), H(k))$. Так как оператор $G(k, m(k))$ компактен, число $n_+(1, G(k, m(k)))$ конечно. Для любых $\psi \in L_2^0(\mathbb{T}^\nu)$ и $z < m(k)$ имеем

$$\begin{aligned} (G(k, z)\psi, \psi) &= (V^{1/2}R_0(k, z)V^{1/2}\psi, \psi) = (R_0(k, z)V^{1/2}\psi, V^{1/2}\psi) = \\ &= \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{|(V^{1/2}\psi)(p)|^2 dp}{E_k(p) - z} \leq \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{|(V^{1/2}\psi)(p)|^2 dp}{E_k(p) - m(k)} = (G(k, m(k))\psi, \psi). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$n_+(1, G(k, z)) \leq n_+(1, G(k, m(k))). \quad (5.9)$$

Пусть $\lambda_1(k) \geq \lambda_2(k) \geq \dots \geq \lambda_n(k) > 1$ – собственные значения оператора $G(k, m(k))$ и H_i – подпространство, порожденное собственными функциями, соответствующими собственным значениям $\lambda_i(k)$, $i = \overline{1, n}$.

Для любого $\varphi \in H_n$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} (G(k, z)\varphi, \varphi) &= (G(k, m(k))\varphi, \varphi) + (G(k, z) - G(k, m(k))\varphi, \varphi) > \\ &> (\lambda_n(k)\varphi, \varphi) + ((1 - \lambda_n(k))\varphi, \varphi) = (\varphi, \varphi), \\ \|G(k, m(k)) - G(k, z)\| &< \lambda_n(k) - 1. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$n_+(1, G(k, z)) \geq \dim H_n = n_+(1, G(k, m(k))). \quad (5.10)$$

Из неравенств (5.9), (5.10) следует, что

$$n_+(1, G(k, z)) = n_+(1, G(k, m(k))) \quad (5.11)$$

для достаточно малых $m(k) - z$. Существует $\delta > 0$ такое, что

$$n_-(z, H(k)) = n_-(m(k), H(k)), \quad z \in (m(k) - \delta, m(k)]. \quad (5.12)$$

Учитывая (5.8), (5.11), (5.12), получим равенство (5.4).

В следующей лемме описываются некоторые свойства функций, удовлетворяющих уравнению Бирмана–Швингера, и ассоциированных с ними собственных функций.

ЛЕММА 3. Пусть уравнение

$$G(0, 0)\psi = \psi \quad (5.13)$$

имеет ненулевое решение $\psi \in L_2^0(\mathbb{T}^\nu)$ и $\varphi(p) = (V^{1/2}\psi)(p)$. Тогда функция $f(p) = \varphi(p)/E_0(p)$ удовлетворяет уравнению $H(0)f = 0$. Функция $\varphi(p)$ является нечетной и удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\varphi(p) \in \mathcal{B}(\theta, \mathcal{U}_\delta(0)), \quad \frac{1}{2} < \theta < \min\left\{1, \frac{1+\xi}{2}\right\} \quad \text{при} \quad \nu = 1, \quad (5.14)$$

$$\varphi(p) \in \mathcal{B}(\theta, \mathcal{U}_\delta(0)), \quad 0 < \theta < \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\xi}{2}\right\}, \quad \text{при} \quad \nu = 2, \quad (5.15)$$

$$\varphi(p) \in \mathcal{B}(\theta, \mathcal{U}_\delta(0)), \quad \frac{1}{2} < \theta < \min\left\{1, \frac{1}{2} + \xi\right\} \quad \text{при} \quad \nu = 3, \quad (5.16)$$

$$\varphi(p) \in \mathcal{B}(\theta, \mathcal{U}_\delta(0)), \quad 0 < \theta < \min\{1, \xi\} \quad \text{при} \quad \nu \geq 4, \quad (5.17)$$

где $\xi > 0$ определено в основном условии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство нечетности функции $\varphi(p)$ на $\mathbb{T}^\nu$ непосредственно вытекает из четности функции $V^{1/2}(p)$ на $\mathbb{T}^\nu$.

Из свойств преобразования Фурье следует, что имеет место равенство

$$V(p-s) = \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}} \int_{\mathbb{T}^\nu} V^{1/2}(p-t)V^{1/2}(t-s) dt. \quad (5.18)$$

Так как $\psi \in L_2^0(\mathbb{T}^\nu)$ есть решение уравнения (5.13), в силу (5.18) имеем, что

$$\varphi(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}} \int_{\mathbb{T}^\nu} V^{1/2}(p-q')\psi(q') dq'$$

удовлетворяет уравнению

$$\varphi(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}} \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{V(p-t)\varphi(t) dt}{E_0(t)}.$$

Поэтому функция $f(p) = \varphi(p)/E_0(p)$ удовлетворяет уравнению $H(0)f = 0$.

Пользуясь неравенством Коши–Буняковского и равенством (5.18), получаем

$$\begin{aligned} |\varphi(p+q) - \varphi(p)|^2 &= \left| \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}} \int_{\mathbb{T}^\nu} (V^{1/2}(p+q-t) - V^{1/2}(p-t))\psi(t) dt \right|^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} |V^{1/2}(p+q-t) - V^{1/2}(p-t)|^2 dt \int_{\mathbb{T}^\nu} |\psi(t)|^2 dt = \\ &= \frac{2}{(2\pi)^\nu} (V(0) - V(q)) \|\psi\|^2. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Пусть $\nu = 1$. Из основного условия и теории рядов Фурье следует, что функция V непрерывно дифференцируема и

$$\frac{\partial V(q)}{\partial q} \in \mathcal{B}(\theta_1, \mathcal{U}_\delta(0)), \quad 0 < \theta_1 < \min\{1, \xi\}.$$

Из четности функции V на $\mathbb{T}^1$ вытекает равенство $\partial V(0)/\partial q = 0$. По формуле Тейлора для малых $q \in \mathbb{T}^1$ имеем

$$V(q) = V(0) + \tilde{V}(q),$$

где $|\tilde{V}(q)| \leq C|q|^{1+\theta_1}$.

Отсюда, учитывая неравенство (5.19), получаем

$$|\varphi(p+q) - \varphi(p)| \leq C|q|^\theta, \quad \frac{1}{2} < \theta < \min\left\{1, \frac{1+\xi}{2}\right\}.$$

Пусть $\nu = 2$. Так как для каждого $0 < 2\theta \leq 1$ и $q \in \mathbb{T}^2$, $n \in \mathbb{Z}^2$ имеет место неравенство $|e^{i(q,n)} - 1| \leq |q|^{2\theta}|n|^{2\theta}$, в силу основного условия имеем

$$|V(q) - V(0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{s \in \mathbb{Z}^2} \hat{V}(s)(e^{i(q,s)} - 1) \right| \leq C \sum_{s \in \mathbb{Z}^2, s \neq 0} \frac{|q|^{2\theta}|s|^{2\theta}}{|s|^{2+\varepsilon}}. \quad (5.20)$$

Ряд, стоящий в правой части неравенства (5.20), сходится при $0 < 2\theta < \min\{1, \varepsilon\}$. Отсюда и из (5.19) вытекает соотношение (5.15).

Пусть $\nu \geq 3$. Имеем

$$|\varphi(p+q) - \varphi(p)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}} \sup_{t \in \mathbb{T}^\nu} |V(p+q-t) - V(p-t)| \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{|\varphi(t)| dt}{E_0(t)}. \quad (5.21)$$

Так как функция $E_0(p)$ имеет невырожденный минимум в нуле, существуют числа $C > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$E_0(p) \geq C|p|^2, \quad p \in \mathcal{U}_\delta(0). \quad (5.22)$$

Отсюда и из непрерывности функции φ следует, что

$$\int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{|\varphi(t)| dt}{E_0(t)} < \infty. \quad (5.23)$$

В силу основного условия имеем

$$|V(p+q-t) - V(p-t)| \leq C_1|q|^\theta, \quad \frac{1}{2} < \theta < \min\left\{1, \frac{1}{2} + \xi\right\} \quad \text{при } \nu = 3, \quad (5.24)$$

$$|V(p+q-t) - V(p-t)| \leq C_2|q|^\theta, \quad 0 < \theta < \min\{1, \xi\} \quad \text{при } \nu \geq 4. \quad (5.25)$$

Учитывая (5.21), (5.23)–(5.25), получим соотношения (5.16), (5.17).

ЛЕММА 4. Пусть $\nu \geq 3$. Число $\lambda = 1$ является собственным значением оператора $G(0, 0)$ тогда и только тогда, когда число $z = 0$ является собственным значением оператора $H(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть уравнение $G(0, 0)\psi = \psi$ имеет ненулевое решение $\psi \in L_2^0(\mathbb{T}^\nu)$. В силу утверждения леммы 3 функция

$$f(p) = \frac{(V^{1/2}\psi)(p)}{E_0(p)} \quad (5.26)$$

удовлетворяет уравнению $H(0)f = 0$. Пользуясь неравенствами (5.16), (5.17), (5.22), получим, что для функции f , определенной в (5.26), имеют место следующие соотношения:

$$\int_{\mathbb{T}^3} |f(p)|^2 dp = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{|\varphi(p)|^2}{(E_0(p))^2} dp \leq C_1 + C_2 \int_0^\delta \frac{dr}{r^{2-2\theta}} < \infty, \quad \frac{1}{2} < \theta < \min\left\{1, \frac{1}{2} + \xi\right\},$$

$$\int_{\mathbb{T}^\nu} |f(p)|^2 dp = \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{|\varphi(p)|^2}{(E_0(p))^2} dp \leq C_1 + C_2 \int_0^\delta \frac{dr}{r^{5-\nu-2\theta}} < \infty, \quad 0 < \theta < \min\{1, \xi\}.$$

Следовательно, $f \in L_2^0(\mathbb{T}^\nu)$, т.е. число $z = 0$ является собственным значением оператора $H(0)$.

Достаточность. Пусть число $z = 0$ является собственным значением оператора $H(0)$, т.е. уравнение

$$E_0(q)f(q) = \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}} \int_{\mathbb{T}^\nu} V(q-t)f(t) dt \quad (5.27)$$

имеет ненулевое решение $f \in L_2^\circ(\mathbb{T}^\nu)$.

Введем обозначение

$$\psi(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}} \int_{\mathbb{T}^\nu} V^{1/2}(p - q') f(q') dq'. \quad (5.28)$$

Тогда из (5.27) получаем

$$f(p) = \frac{(2\pi)^{-\nu/2}}{E_0(p)} \int_{\mathbb{T}^\nu} V^{1/2}(p - q') \psi(q') dq'. \quad (5.29)$$

Подставляя правую часть равенства (5.29) в (5.28), получим, что уравнение $\psi = G(0, 0)\psi$ имеет ненулевое решение $\psi \in L_2^\circ(\mathbb{T}^\nu)$, т.е. число $\lambda = 1$ является собственным значением оператора $G(0, 0)$.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. По определению уравнение $G(0, 0)\psi = \psi$ имеет ненулевое решение $\psi \in L_2^\circ(\mathbb{T}^\nu)$. Нормируем $\|\psi\| = 1$. Тогда

$$(\psi, \psi) = (G(0, 0)\psi, \psi) = \int_{\mathbb{T}^\nu} (E_0(p))^{-1} |\varphi(p)|^2 dp = 1.$$

Для любого ненулевого $k \in (-\pi, \pi)^\nu$ почти всюду имеет место соотношение $0 < E_k(p) - m(k) < E_0(p)$. Следовательно,

$$1 = \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{|\varphi(p)|^2 dp}{E_0(p)} < \int_{\mathbb{T}^\nu} \frac{|\varphi(p)|^2 dp}{E_k(p) - m(k)} = (G(k, m(k))\psi, \psi).$$

Это означает, что $n_+(1, G(k, m(k))) \geq 1$. Из непрерывности оператора $G(k, z)$ по $z \leq m(k)$ следует, что существует $z_0 < m(k)$ такое, что выполняется неравенство $(G(k, z_0)\psi, \psi) > 1$. Согласно лемме 2 оператор $H(k)$ при $k \neq 0$ имеет собственное значение, лежащее левее существенного спектра. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть число $z = 0$ является n -кратным собственным значением оператора $H(0)$. Для любого ненулевого $k \in (-\pi, \pi)^\nu$ почти всюду выполняется соотношение $0 < E_k(p) - m(k) < E_0(p)$. Следовательно,

$$((H(k) - m(k))f, f) < (H(0)f, f), \quad f \in L_2^\circ(\mathbb{T}^\nu), \quad f \neq 0.$$

Отсюда и из условия теоремы и принципа минимакса (см. [6]) мы заключаем, что оператор $H(k)$ имеет не менее n собственных значений, лежащих левее существенного спектра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Доказательство теоремы 3 непосредственно вытекает из положительности оператора V , компактности оператора $G(k, m(k))$, $k \in \mathbb{T}^\nu$, и утверждения леммы 2.

ПРИМЕР. Приведем пример того, что число $z = 0$ является собственным значением оператора $H_\mu(0)$ или оператор $H_\mu(0)$ имеет виртуальный уровень в нуле в зависимости от размерности решетки.

Рассмотрим оператор $H_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^\nu$, действующий в $L_2^0(\mathbb{T}^\nu)$ по формуле

$$H_\mu(k) = H_0(k) - \mu V.$$

Здесь оператор $H_0(k)$ определен по формуле (3.2), а V действует в $L_2^0(\mathbb{T}^\nu)$ согласно формуле

$$(Vf)(p) = \frac{1}{(2\pi)^\nu} \int_{\mathbb{T}^\nu} \sum_{i=1}^{\nu} \sin p^{(i)} \sin t^{(i)} f(t) dt,$$

$\mu > 0$ – энергия взаимодействия двух частиц (фермионов).

Преобразование Фурье ядра оператора V на $\mathbb{Z}^\nu$ имеет вид

$$\widehat{V}(s) = \begin{cases} 1/2 & \text{при } |s| = 1, \\ 0 & \text{при } |s| \neq 1. \end{cases}$$

Нетривиальное решение уравнения $H_\mu(0)f = 0$ имеет вид

$$f(p) = \frac{\mu \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \sin p^{(i)}}{E_0(p)}, \quad (6.1)$$

где α_i – ненулевые коэффициенты.

Так как функция $E_0(p)$ имеет единственный невырожденный минимум в нуле и $|\sin x| \leq |x|$, функция f , определенная в (6.1), принадлежит $L_2^0(\mathbb{T}^\nu)$ при $\nu \geq 3$. Следовательно, нуль является собственным значением оператора $H_\mu(0)$ при $\nu \geq 3$ и его виртуальным уровнем при $\nu = 1, 2$.

Список литературы

- [1] S. Albeverio, S. N. Lakaev, Z. I. Muminov, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **5**:4 (2004), 743–772.
- [2] S. Albeverio, S. N. Lakaev, K. A. Makarov, Z. I. Muminov, *Comm. Math. Phys.*, **262**:1 (2006), 91–115.
- [3] G. M. Graf, D. Schenker, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **67**:1 (1997), 91–107.
- [4] С. Н. Лакаев, *Функц. анализ и его прил.*, **27**:3 (1993), 15–28.
- [5] P. A. Faria da Veiga, L. Ioriatti, M. O’Carroll, *Phys. Rev. E* (3), **66**:1 (2002), 6130.
- [6] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
- [7] П. Р. Халмош, *Гильбертово пространство в задачах*, Мир, М., 1970.

Поступила в редакцию 20.12.2005,
после доработки 24.07.2007