Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. П. Пронько, Проблема Кеплера в пространстве постоянной кривизны, *ТМФ*, 2008, том 155, номер 2, 317–326

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6214>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 15:26:11

© 2008 г.

Г. П. Пронько*

ПРОБЛЕМА КЕПЛЕРА В ПРОСТРАНСТВЕ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Чисто алгебраическим путем получен спектр атома водорода в пространстве постоянной кривизны.

Ключевые слова: динамические системы, пространство постоянной кривизны, проблема Кеплера.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория различных механических систем в пространстве с постоянной кривизной имеет длинную историю. Особенно интересна теория атома водорода в таком пространстве, которая была впервые рассмотрена Шредингером [1] в связи с возможными космологическими применениями. Список литературы, в которой обсуждаются эти вопросы, приведен в [2]. В данной статье рассматривается динамическая симметрия атома водорода в пространстве постоянной кривизны в классическом и квантовом случаях и, как и в случае плоского пространства [3], [4], выводится формула для спектра этой системы чисто алгебраическим путем. Как оказалось, несмотря на схожесть двух систем (в плоском и искривленном пространствах), построение генераторов динамической симметрии в последнем случае весьма нетривиально.

Трехмерные пространства постоянной кривизны – это сфера S^3 , гиперboloиды H^3 , H'^3 и конус V^3 . Для определенности мы рассмотрим случай положительной кривизны, т.е. сферу S^3 . Координаты S^3 будем обозначать X_α , $\alpha = 1, 2, 3, 4$, и $X_\alpha^2 = 1$. Простейшее отображение $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^3/\{\infty\}$) на S^3 дается стереографической проекцией

$$X_\alpha = \left(\frac{2\lambda \mathbf{x}}{\mathbf{x}^2 + \lambda^2}, \frac{\mathbf{x}^2 - \lambda^2}{\mathbf{x}^2 + \lambda^2} \right). \quad (1)$$

*Институт физики высоких энергий, г. Протвино, Московская обл., Россия; Institute of Nuclear Physics, National Research Center “Demokritos”, Athens, Greece.
E-mail: george.pronko@ihep.ru

Единственный возможный кинетический член, инвариантный относительно группы движений $SO(4)$ сферы S^3 , получается, если мы возьмем лагранжиан, пропорциональный квадрату тензора углового момента $M_{\alpha\beta} = X_\alpha \dot{X}_\beta - \dot{X}_\alpha X_\beta$:

$$L = \frac{m}{2} \frac{1}{4\lambda^2} M_{\alpha\beta}^2 = \frac{m}{2} \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{(\mathbf{x}^2 + \lambda^2)^2}. \quad (2)$$

Кинетический член в гамильтониане, соответствующем лагранжиану (2), имеет следующий вид:

$$H = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 (\mathbf{x}^2 + \lambda^2)^2.$$

Этот гамильтониан имеет шесть интегралов движения, которые являются генераторами группы движений $SO(4)$:

$$L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k, \quad K_i = \frac{1}{2\lambda} (p_i (\mathbf{x}^2 - \lambda^2) - 2x_i \mathbf{p}\mathbf{x}).$$

Канонические скобки Пуассона для p_i, x_i индуцируют алгебру $SO(4)$ генераторов L_i, K_i :

$$\{L_i, L_j\} = -\epsilon_{ijk} L_k, \quad \{K_i, K_j\} = -\epsilon_{ijk} L_k, \quad \{L_i, K_j\} = -\epsilon_{ijk} K_k.$$

Гамильтониан H пропорционален одному из операторов Казимира:

$$H = \frac{1}{2m} 4\lambda^2 (\mathbf{L}^2 + \mathbf{K}^2),$$

в то время как второй оператор Казимира обращается в нуль: $\mathbf{L}\mathbf{K} = 0$. Теперь мы добавим к гамильтониану H потенциал Кеплера [1], [2]:

$$H = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 (\mathbf{x}^2 + \lambda^2)^2 + \frac{2\lambda\alpha}{m} \frac{\mathbf{x}^2 - \lambda^2}{|\mathbf{x}|}. \quad (3)$$

Как и в плоском случае, гамильтониан (3) обладает шестью интегралами движения (разумеется, они не все независимы) – это угловой момент и вектор Лапласа–Рунге–Ленца $\mathbf{A}$, который имеет вид

$$\mathbf{A} = \mathbf{K} \times \mathbf{L} + \alpha \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}.$$

Очевидно, что векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{L}$ удовлетворяют соотношению $\mathbf{A}\mathbf{L} = 0$, а их алгебра скобок Пуассона имеет следующий вид:

$$\{A_i, A_j\} = \epsilon_{ijk} L_k \left(\frac{m}{2\lambda^2} H - 2\mathbf{L}^2 \right), \quad \{L_i, A_j\} = -\epsilon_{ijk} A_k.$$

Квадрат вектора $\mathbf{A}$ выражается через $\mathbf{L}^2$ и гамильтониан:

$$\mathbf{A}^2 = \alpha^2 - \mathbf{L}^4 + \frac{m}{2\lambda^2} \mathbf{L}^2 H. \quad (4)$$

Читатель, знакомый со свойствами вектора Лапласа–Рунге–Ленца в плоском случае [3], сразу увидит отличие как в алгебре, так и в связи $\mathbf{A}^2$ с H и $\mathbf{L}^2$. Эти отличия

не позволяют простым образом построить вектор, который бы образовывал вместе с $\mathbf{L}$ алгебру $SO(4)$ – алгебру динамической симметрии, “ответственной” за дополнительное вырождение в квантовой механике. Однако такое построение возможно, и, как мы увидим ниже, классическая конструкция дает направление поиска и в квантовом случае. Чтобы упростить формулы, введем масштабно-преобразованный гамильтониан h :

$$h = \frac{m}{2\lambda^2} H.$$

Из уравнения (4) получаем

$$\mathbf{A}^2 = - \left[\mathbf{L}^2 - \left(\frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} + \alpha^2} \right) \right] \left[\mathbf{L}^2 - \left(\frac{h}{2} - \sqrt{\frac{h^2}{4} + \alpha^2} \right) \right].$$

Поскольку $\mathbf{A}^2 > 0$, $\mathbf{L}^2$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$0 \leq \mathbf{L}^2 \leq \left(\frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} + \alpha^2} \right). \quad (5)$$

Найдем теперь скобки Пуассона $\mathbf{A}f(\mathbf{L}^2)$ (функция $f(\mathbf{L}^2)$ может зависеть также и от h):

$$\{A_i f(\mathbf{L}^2), A_j f(\mathbf{L}^2)\} = \epsilon_{ijk} L_k \frac{\partial(\mathbf{A}^2 f^2(\mathbf{L}^2))}{\partial \mathbf{L}^2}. \quad (6)$$

Для того чтобы (6) стало частью алгебры Ли $SO(4)$, должно выполняться следующее условие:

$$\mathbf{A}^2 f^2(\mathbf{L}^2) = a - \mathbf{L}^2. \quad (7)$$

Очевидно, что если мы возьмем $a = \left(h/2 + \sqrt{h^2/4 + \alpha^2} \right)$, то правая часть (7) будет положительна в любой точке фазового пространства в силу неравенства (5). Более того, функция $f(\mathbf{L}^2)$ для такого a существенно упростится:

$$f(\mathbf{L}^2) = \sqrt{\frac{a - \mathbf{L}^2}{\mathbf{A}^2}} = \left[\mathbf{L}^2 - \left(\frac{h}{2} - \sqrt{\frac{h^2}{4} + \alpha^2} \right) \right]^{-1/2}.$$

Таким образом, вектор

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} \left[\mathbf{L}^2 - \left(\frac{h}{2} - \sqrt{\frac{h^2}{4} + \alpha^2} \right) \right]^{-1/2}$$

вместе с угловым моментом образуют нужную алгебру $SO(4)$:

$$\{L_i, L_j\} = -\epsilon_{ijk} L_k, \quad \{R_i, R_j\} = -\epsilon_{ijk} L_k, \quad \{L_i, R_j\} = -\epsilon_{ijk} R_k.$$

Далее нетрудно получить следующее выражение для нетривиального оператора Казимира алгебры $SO(4)$:

$$\mathbf{R}^2 + \mathbf{L}^2 = \left(\frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} + \alpha^2} \right), \quad (8)$$

второй оператор Казимира $\mathbf{RL}$ исчезает. Из (8) получаем

$$h = \mathbf{R}^2 + \mathbf{L}^2 - \frac{\alpha^2}{\mathbf{R}^2 + \mathbf{L}^2}.$$

Это равенство, которое мы получили в классической механике, чрезвычайно важно и в квантовом случае. Очевидным препятствием для его квантового обобщения является некоммутативность операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{L}^2$. Именно этой проблемой мы и займемся ниже.

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Гильбертовым пространством проблемы Кеплера в пространстве постоянной положительной кривизны является пространство L^2 на S^3 со скалярным произведением

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int d^4 X \bar{\phi}(X) \psi(X) \delta(X^2 - 1), \quad (9)$$

где X – это координаты четырехмерного пространства X_α , $\alpha = 1, 2, 3, 4$. Используя отображение $\mathbb{R}^3$ на S^3 , заданное соотношениями (1), мы можем переписать скалярное произведение (9) с точностью до несущественного сомножителя как интеграл по $\mathbb{R}^3$:

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int d^3 x \frac{1}{(\mathbf{x}^2 + \lambda^2)^3} \bar{\phi}(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}). \quad (10)$$

Мера в этом скалярном произведении делает нетривиальным определение операторов, необходимых для задачи Кеплера. Дело в том, что помимо определения этих операторов как эрмитовых, нам необходимо сохранить их алгебраические свойства. В качестве примера рассмотрим определение оператора $\mathbf{K}$. Если мы определим квантовый оператор следующим образом:

$$K_i = \frac{1}{2\lambda} [(\mathbf{x}^2 - \lambda^2)p_i - 2x_i \mathbf{x} \mathbf{p}],$$

где оператор $\mathbf{p} = -i\partial/\partial\mathbf{x}$ (заметим, что $\mathbf{p}$ неэрмитов), то оператор $\mathbf{K}$ будет эрмитовым и его коммутационные соотношения окажутся такими же, как и в классическом случае:

$$[K_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} L_k.$$

Определение оператора $\mathbf{L}$ не представляет трудностей, поскольку он коммутирует с мерой в (10). Имея операторы $\mathbf{K}$, $\mathbf{L}$, мы можем правильно определить кинетическую часть квантового гамильтониана

$$\mathbf{K}^2 + \mathbf{L}^2 = -\frac{(\mathbf{x}^2 + \lambda^2)^3}{4\lambda^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{\mathbf{x}^2 + \lambda^2} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

который, очевидно, оказывается эрмитовым относительно (10). Таким образом, полный гамильтониан имеет следующий вид:

$$H = \frac{2\lambda^2}{m} \left[\mathbf{K}^2 + \mathbf{L}^2 + \frac{\alpha}{\lambda} \frac{\mathbf{x}^2 - \lambda^2}{|\mathbf{x}|} \right] = \frac{2\lambda^2}{m} h.$$

Теперь мы можем определить квантовый вектор Лапласа–Рунге–Ленца

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{K} \times \mathbf{L} - \mathbf{L} \times \mathbf{K}) + \alpha \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}.$$

Определенный таким образом оператор $\mathbf{A}$ коммутирует с гамильтонианом: $[h, \mathbf{A}] = 0$. Коммутатор компонент $\mathbf{A}$ оказывается таким же, как и в классическом случае:

$$[A_i, A_j] = -i\epsilon_{ijk}L_k(h - 2\mathbf{L}^2),$$

а $\mathbf{A}^2$ несколько отличается от классического аналога:

$$\mathbf{A}^2 = \alpha^2 + h(\mathbf{L}^2 + 1) - (\mathbf{L}^2 + 1)^2 + 1.$$

Теперь мы займемся поиском оператора $\mathbf{R}$ такого, что

$$[R_i, R_j] = i\epsilon_{ijk}L_k, \quad (11)$$

в форме, не разрушающей эрмитовости:

$$R_i = f^{1/2}(\mathbf{L}^2)A_i f^{1/2}(\mathbf{L}^2).$$

Далее нам будет удобно использовать вместо оператора $\mathbf{L}^2$ его функцию

$$\gamma = \sqrt{\left(\mathbf{L}^2 + \frac{1}{4}\right)} - \frac{1}{2}, \quad \mathbf{L}^2 = \gamma(\gamma + 1).$$

Также нам понадобится следующая формула, доказанная в приложении, справедливая для любого векторного оператора $\mathbf{A}$ такого, что $\mathbf{A}\mathbf{L} = 0$:

$$A_i f(\gamma) = \frac{f(\gamma + 1)}{2\gamma + 1}[(\gamma + 1)A_i + i\epsilon_{ijk}L_j A_k] + \frac{f(\gamma - 1)}{2\gamma + 1}[\gamma A_i - i\epsilon_{ijk}L_j A_k]. \quad (12)$$

Теперь можно вычислить коммутатор (11):

$$[f^{1/2}(\gamma)A_i f^{1/2}(\gamma), f^{1/2}(\gamma)A_j f^{1/2}(\gamma)] = f^{1/2}(\gamma)(A_i f(\gamma)A_j - A_j f(\gamma)A_i)f^{1/2}(\gamma). \quad (13)$$

Для вычисления выражения в скобках в правой части равенства (13) мы используем уравнение (12) и после алгебраических преобразований получаем соотношение

$$(A_i f(\gamma)A_j - A_j f(\gamma)A_i) = i\epsilon_{ijk}L_k \left(\frac{f(\gamma + 1)}{2\gamma + 1}(\gamma r(\gamma) - \mathbf{A}^2) + \frac{f(\gamma - 1)}{2\gamma + 1}((\gamma + 1)r(\gamma) + \mathbf{A}^2) \right),$$

где мы ввели функцию $r(\gamma)$ с учетом равенства

$$[A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}L_k r(\gamma).$$

Используя этот результат, можно продолжить вычисления коммутатора (11) и переместить все функции $f^{1/2}(\gamma)$ направо, поскольку они коммутируют с $\mathbf{L}$:

$$[R_i, R_j] = i\epsilon_{ijk}L_k T,$$

где T задается равенством

$$T = \frac{f(\gamma)f(\gamma+1)}{2\gamma+1}(\gamma r(\gamma) - \mathbf{A}^2) + \frac{f(\gamma)f(\gamma-1)}{2\gamma+1}((\gamma+1)r(\gamma) + \mathbf{A}^2).$$

Наша цель – добиться выполнения равенства $T = 1$. Имея выражение для $r(\gamma)$ и $\mathbf{A}^2$:

$$\begin{aligned} r(\gamma) &= 2\gamma(\gamma+1) - h, \\ \mathbf{A}^2 &= \alpha^2 + h(\gamma(\gamma+1) + 1) - \gamma^2(\gamma+1)^2 - 2\gamma(\gamma+1), \end{aligned}$$

мы можем переписать соотношение $T = 1$ в следующей форме:

$$\begin{aligned} f(\gamma)f(\gamma+1)[\alpha^2 + h(\gamma+1)^2 - (\gamma+1)^2((\gamma+1)^2 - 1)] - \\ - f(\gamma)f(\gamma-1)[\alpha^2 + h\gamma^2 - \gamma^2(\gamma^2 - 1)] = -(2\gamma+1). \end{aligned} \quad (14)$$

Первый и второй члены в левой части равенства (14) отличаются сдвигом γ на единицу, поэтому мы немедленно приходим к уравнению

$$f(\gamma)f(\gamma-1) = \frac{\mu - \gamma^2}{\alpha^2 + h\gamma^2 - \gamma^2(\gamma^2 - 1)}, \quad (15)$$

где μ не зависит от γ . Прежде чем решать уравнение (15) для $f(\gamma)$, вычислим квадрат вектора $\mathbf{R}$,

$$\mathbf{R}^2 = f^{1/2}(\gamma)A_i f(\gamma)A_i f^{1/2}(\gamma).$$

Используя опять уравнение (12), мы после алгебраических преобразований получаем

$$\mathbf{R}^2 = \frac{f(\gamma)f(\gamma+1)}{2\gamma+1}(\gamma+1)[\mathbf{A}^2 - \gamma r(\gamma)] + \frac{f(\gamma)f(\gamma-1)}{2\gamma+1}\gamma[\mathbf{A}^2 + (\gamma+1)r(\gamma)].$$

Теперь, учитывая результат (15), перепишем уравнение в следующем виде:

$$\mathbf{R}^2 = \mu - 1 - \gamma(\gamma+1).$$

Следовательно, имеем

$$\mathbf{R}^2 + \mathbf{L}^2 = \mu - 1, \quad (16)$$

т.е. тот результат, который мы и ожидали. Теперь выберем μ . Уравнение (15) может быть записано в виде

$$f(\gamma)f(\gamma-1) = \frac{\mu - \gamma^2}{(k_1 - \gamma^2)(\gamma^2 - k_2)}, \quad k_{1,2} = \frac{h+1}{2} \pm \sqrt{\frac{(h+1)^2}{4} + \alpha^2}.$$

Эта формула напоминает нам классический случай. Положим

$$\mu = \frac{h+1}{2} + \sqrt{\frac{(h+1)^2}{4} + \alpha^2}. \quad (17)$$

Тогда формулу (16) запишем в следующем виде:

$$\mathbf{R}^2 + \mathbf{L}^2 = -1 + \frac{h+1}{2} + \sqrt{\frac{(h+1)^2}{4} + \alpha^2}$$

и, как следствие, получим выражение для гамильтониана через $\mathbf{R}^2 + \mathbf{L}^2$:

$$h = \mathbf{R}^2 + \mathbf{L}^2 - \frac{\alpha^2}{\mathbf{R}^2 + \mathbf{L}^2 + 1}.$$

Обсудим полученное представление для гамильтониана. Операторы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{L}$ образуют алгебру $SO(4)$, которая является прямой суммой двух алгебр $SO(3)$. Поэтому мы можем ввести вместо $\mathbf{R}$ и $\mathbf{L}$ другую пару операторов

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{R}), \quad \mathbf{N} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{R})$$

таких, что

$$[M_i, M_j] = i\epsilon_{ijk}M_k, \quad [N_i, N_j] = i\epsilon_{ijk}N_k, \quad [M_i, N_j] = 0.$$

Два оператора Казимира алгебры $SO(4)$ в терминах $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ имеют вид $C_1 = \mathbf{M}^2$, $C_2 = \mathbf{N}^2$. Поскольку $\mathbf{R}\mathbf{L} = 0$, имеем

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{4}(\mathbf{R}^2 + \mathbf{L}^2).$$

Спектр C_1 (C_2) дается известной формулой $k(k+1)$, $k = 0, 1/2, 1, \dots$. Представления, характеризуемые k , содержат все угловые моменты $l = 0, 1, \dots, 2k$ с кратностью, равной единице. В результате спектр гамильтониана h имеет вид

$$h = 4k(k+1) - \frac{\alpha^2}{4k(k+1)+1} = 2k(2k+2) - \frac{\alpha^2}{(2k+1)^2}. \quad (18)$$

Вводя другое квантовое число $n = 2k + 1$, $n = 1, 2, \dots$, мы можем представить (18) в форме

$$h = (n-1)(n+1) - \frac{\alpha^2}{n^2}, \quad (19)$$

что совпадает с результатом Шредингера [1].

Последний вопрос, который должен быть решен, – это получение явной формулы для функции $f(\gamma)$. В принципе мы можем обойтись и без этой формулы. Используя уравнение (12), можно построить вектор $\mathbf{R}$, зная только билинейные комбинации $f(\gamma)f(\gamma \pm 1)$. Однако для полноты картины мы приведем и эту формулу.

С нашим выбором μ (см. (17)), уравнение (15) принимает следующий вид:

$$f(\gamma)f(\gamma-1) = \frac{1}{\gamma^2 + \sqrt{\frac{(h+1)^2}{4} + \alpha^2} - \frac{h+1}{2}}.$$

Выражение

$$\sqrt{\frac{(h+1)^2}{4} + \alpha^2} - \frac{h+1}{2}$$

всегда положительно. Обозначая его ρ^2 , мы имеем

$$f(\gamma)f(\gamma-1) = \frac{1}{\gamma^2 + \rho^2}. \quad (20)$$

Решение этого уравнения задается формулой

$$f(x) = \frac{i}{x - i\rho} \frac{\Gamma\left(\frac{x - i\rho + 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x - i\rho}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(-\frac{x + i\rho}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{x + i\rho - 1}{2}\right)}.$$

Простейшее доказательство этого результата состоит в прямой подстановке в уравнение (20).

3. ОБСУЖДЕНИЕ

Итак, мы рассмотрели алгебраический вывод формулы для спектра атома водорода в пространстве постоянной положительной кривизны. Этот спектр замечательным образом представляется в виде суммы спектров свободного движения на S^3 и дискретной части кулоновского спектра в плоском пространстве. Этот факт был отмечен еще Шредингером. В отличие от плоского случая, спектр этой задачи чисто дискретный. Это обстоятельство позволяет надеяться на возможность построения алгебры, генерирующей спектр. Предварительные рассмотрения показывают, что это некомпактная алгебра $SO(4, 2)$. Элементами этой алгебры являются генераторы только что построенной алгебры $SO(4)$, гамильтониан, а также повышающие и понижающие операторы, с помощью которых можно построить все волновые функции, зная волновую функцию основного состояния. Последняя находится очень просто с помощью следующего построения. Из формулы (19) при $n = 1$ получаем энергию основного состояния $E_0 = -\alpha^2$. Далее нетрудно показать, что справедливо следующее соотношение:

$$\left[i(K_j + L_j) + \alpha \frac{x_j}{|\mathbf{x}|} \right] \left[-i(K_j + L_j) + \alpha \frac{x_j}{|\mathbf{x}|} \right] = h + \alpha^2.$$

Правая часть этого равенства обращается в нуль при действии на основное состояние. Отсюда мы получаем для основного состояния уравнение первого порядка

$$\left[-i(K_j + L_j) + \alpha \frac{x_j}{|\mathbf{x}|} \right] \psi_0(x_i) = 0,$$

решением которого является $\psi_0(x_i) = e^{-2\alpha \arctg(|\mathbf{x}|/\lambda)}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим функцию $F(\mathbf{L}^2)$, умноженную слева на оператор $\mathbf{A}$, который является вектором по отношению к $\mathbf{L}$ и удовлетворяет условию $\mathbf{A}\mathbf{L} = 0$. В общем случае справедливо следующее соотношение:

$$A_i F(\mathbf{L}^2) = S(\mathbf{L}^2) A_i + T(\mathbf{L}^2) i \epsilon_{ijk} L_j A_k, \quad (\text{П.1})$$

где функции S , T определяются функцией F . Ограничение $\mathbf{A}\mathbf{L} = 0$ не является существенным, и нам достаточно рассмотреть только такие операторы. Пусть функция $F(\mathbf{L}^2)$ представлена в виде

$$F(\mathbf{L}^2) = \int d\alpha \phi(\alpha) e^{i\alpha \mathbf{L}^2}.$$

Тогда для вывода соотношения (П.1) достаточно рассмотреть только случай экспоненциальной зависимости $F(\mathbf{L}^2)$ от $\mathbf{L}^2$. Умножая экспоненту слева на $\mathbf{A}$, имеем

$$A_i e^{i\alpha \mathbf{L}^2} = f(\alpha, \mathbf{L}^2) A_i + g(\alpha, \mathbf{L}^2) i\epsilon_{ijk} L_j A_k, \quad (\text{П.2})$$

где функции f , g должны быть определены. Продифференцируем обе части (П.2) по α :

$$\begin{aligned} \partial_\alpha A_i e^{i\alpha \mathbf{L}^2} &= i A_i e^{i\alpha \mathbf{L}^2} \mathbf{L}^2 = i [f(\alpha, \mathbf{L}^2) A_i + g(\alpha, \mathbf{L}^2) i\epsilon_{ijk} L_j A_k] \mathbf{L}^2 = \\ &= i [f(\alpha, \mathbf{L}^2)(\mathbf{L}^2 + 2) + 2g(\alpha, \mathbf{L}^2) \mathbf{L}^2] A_i + \\ &\quad + i [2f(\alpha, \mathbf{L}^2) + g(\alpha, \mathbf{L}^2)] i\epsilon_{ijk} L_j A_k = \\ &= \partial_\alpha f(\alpha, \mathbf{L}^2) A_i + \partial_\alpha g(\alpha, \mathbf{L}^2) i\epsilon_{ijk} L_j A_k, \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

где мы использовали следующее соотношение:

$$A_i \mathbf{L}^2 = (\mathbf{L}^2 + 2) A_i + 2i\epsilon_{ijk} L_j A_k.$$

Из (П.3) вытекают следующие два уравнения для функций f , g :

$$\begin{aligned} \partial_\alpha f(\alpha, \mathbf{L}^2) &= i [f(\alpha, \mathbf{L}^2)(\mathbf{L}^2 + 2) + 2g(\alpha, \mathbf{L}^2) \mathbf{L}^2], \\ \partial_\alpha g(\alpha, \mathbf{L}^2) &= i [2f(\alpha, \mathbf{L}^2) + g(\alpha, \mathbf{L}^2)], \\ f(0, \mathbf{L}^2) &= 1, \quad g(0, \mathbf{L}^2) = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Далее удобно ввести вместо $\mathbf{L}^2$ оператор

$$\gamma = \sqrt{\left(\mathbf{L}^2 + \frac{1}{4}\right)} - \frac{1}{2}, \quad \mathbf{L}^2 = \gamma(\gamma + 1).$$

В терминах γ решение (П.4) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} f(\alpha, \gamma(\gamma + 1)) &= \frac{1}{2\gamma + 1} [(\gamma + 1)e^{i\alpha(\gamma+1)(\gamma+2)} + \gamma e^{i\alpha\gamma(\gamma-1)}], \\ g(\alpha, \gamma(\gamma + 1)) &= \frac{1}{2\gamma + 1} [e^{i\alpha(\gamma+1)(\gamma+2)} - e^{i\alpha\gamma(\gamma-1)}]. \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Подставляя (П.5) в (П.2), получаем

$$\begin{aligned} A_i e^{i\alpha\gamma(\gamma+1)} &= e^{i\alpha(\gamma+1)(\gamma+2)} \frac{1}{2\gamma + 1} [(\gamma + 1) A_i + i\epsilon_{ijk} L_j A_k] + \\ &\quad + e^{i\alpha\gamma(\gamma-1)} \frac{1}{2\gamma + 1} [\gamma A_i - i\epsilon_{ijk} L_j A_k]. \end{aligned}$$

Таким образом, “пронося” векторный оператор через экспоненту от $\gamma(\gamma + 1)$, мы получаем два члена, в одном из которых γ сдвигается на $+1$, в другом – на -1 . Если бы мы имели оператор $\mathbf{A}$ такой, что $\mathbf{A}\mathbf{L} \neq 0$, то появился бы третий член, в котором γ не сдвигалась бы совсем. Производя преобразование Фурье, мы распространяем результат на произвольные функции:

$$\begin{aligned} A_i F(\gamma) &= F(\gamma + 1) \frac{1}{2\gamma + 1} [(\gamma + 1) A_i + i\epsilon_{ijk} L_j A_k] + \\ &\quad + F(\gamma - 1) \frac{1}{2\gamma + 1} [\gamma A_i - i\epsilon_{ijk} L_j A_k]. \end{aligned}$$

Аналогичная формула существует также и для умножения справа на оператор $\mathbf{A}$.

Благодарности. Автор выражает свою признательность А. К. Лиходеду и А. В. Разумову за их замечания и плодотворные дискуссии, М. Сантандеру за то, что он привлек внимание автора к этой проблеме. Работа была поддержана программой ENTER-2004/04EP-48 Европейского фонда и Министерства развития Греции и РФФИ (грант № 07-01-00234).

Список литературы

- [1] E. Schrödinger, *Proc. Roy Irish Acad. Sect. A*, **46** (1940), 9–16.
- [2] L. M. Nieto, H. C. Rosu, M. Santander, *Modern Phys. Lett. A*, **14**:35 (1999), 2463–2469; [arXiv: quant-ph/9911010](#).
- [3] V. Fock, *Z. Phys.*, **98**:3–4 (1935), 145–154.
- [4] W. Pauli Jr., *Z. Phys.*, **36**:5 (1926), 336–363.

Поступила в редакцию 21.10.2007