Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. И. Данилов, О спектре периодического оператора Дирака, *ТМФ*, 2000, том 124, номер 1, 3–17

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf622>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 04:38:33

© 2000 г.

Л. И. Данилов*

О СПЕКТРЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ДИРАКА

Доказана абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Дирака

$$\hat{D} = \sum_{j=1}^n \left(-i \frac{\partial}{\partial x_j} - A_j \right) \hat{\alpha}_j + \hat{V}^{(0)} + \hat{V}^{(1)}, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad n \geq 3,$$

в случае, когда $A \in C(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n) \cap H_{\text{loc}}^q(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n)$, $2q > n-2$, а также когда ряд Фурье векторного потенциала $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ абсолютно сходится; $\hat{V}^{(s)} = (\hat{V}^{(s)})^*$ – непрерывные матричные функции, $\hat{V}^{(s)} \hat{\alpha}_j = (-1)^s \hat{\alpha}_j \hat{V}^{(s)}$ для всех антикоммутирующих эрмитовых матриц $\hat{\alpha}_j$, $\hat{\alpha}_j^2 = \hat{I}$, $s = 0, 1$.

В работе [1] была доказана абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Дирака

$$\hat{D} = \sum_{j=1}^n \left(-i \frac{\partial}{\partial x_j} - A_j \right) \hat{\alpha}_j + V \hat{I} + V_0 \hat{\alpha}_{n+1}$$

в пространстве $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, где $V, V_0 \in L_{\text{loc}}^q(\mathbf{R}^2; \mathbf{R})$, $A \in L_{\text{loc}}^q(\mathbf{R}^2; \mathbf{R}^2)$, $q > 2$, при $n = 2$ и $V, V_0 \in C(\mathbf{R}^n; \mathbf{R})$, $A \in C^{2n+3}(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n)$ при $n \geq 3$, $\hat{\alpha}_{n+1}$ – эрмитова матрица, антикоммутирующая с матрицами $\hat{\alpha}_j$, $j = 1, \dots, n$, $\hat{\alpha}_{n+1}^2 = \hat{I}$. При $n = 2$ доказательство опирается на результаты работ [2, 3], в которых рассматривается двумерный периодический оператор Шредингера. В статье [3] для него доказана абсолютная непрерывность спектра в случае, когда скалярный (электрический) и векторный (магнитный) потенциалы V и A удовлетворяют условиям $V \in L_{\text{loc}}^q(\mathbf{R}^2; \mathbf{R})$, $A \in L_{\text{loc}}^{2q}(\mathbf{R}^2; \mathbf{R}^2)$, $q > 1$. Для периодического оператора Дирака при $n = 2$ такой же, как и в работе [1], результат был независимо получен в статье [4]. Предполагалось, однако, что $V_0 \equiv m = \text{const}$, но без каких-либо существенных изменений доказательства можно также рассматривать функции $V_0 \in L_{\text{loc}}^q(\mathbf{R}^2; \mathbf{R})$, $q > 2$. При доказательстве в [4] применяется метод, предложенный в работе [5], в которой установлена абсолютная непрерывность спектра двумерного оператора Дирака с периодическим потенциалом $V \in L_{\text{loc}}^q(\mathbf{R}^2; \mathbf{R})$, $q > 2$ (и $A \equiv 0$). При $n \geq 3$ в [1] используются результаты Соболева [6] об абсолютной непрерывности спектра оператора Шредингера с периодическим векторным потенциалом

* Физико-технический институт Уральского отделения РАН, Ижевск, Россия.
E-mail: lyu@otf.fti.udmurtia.su

$A \in C^{2n+3}(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n)$, $n \geq 3$. Последнее условие в дальнейшем было Соболевым ослаблено (см. обзорную статью [7]) до условия $A \in H_{\text{loc}}^q(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n)$, $2q > 3n - 2$, $n \geq 3$, что позволяет соответствующим образом изменить условие гладкости на векторный потенциал A для периодического оператора Дирака [1, 7]. Для оператора Дирака в $\mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, с периодическим скалярным потенциалом V (при $A \equiv 0$) абсолютная непрерывность спектра доказывалась при разных ограничениях на V в работах [8–10].

1. Пусть $\mathcal{L}_M$, $M \in \mathbf{N}$, – линейное пространство комплексных $(M \times M)$ -матриц, $\mathcal{S}_M$ – множество эрмитовых матриц из $\mathcal{L}_M$, матрицы $\hat{\alpha}_j \in \mathcal{S}_M$ ($j = 1, \dots, n$) удовлетворяют антикоммутационным соотношениям $\hat{\alpha}_j \hat{\alpha}_l + \hat{\alpha}_l \hat{\alpha}_j = 2\delta_{jl} \hat{I}$, где $\hat{I} \in \mathcal{L}_M$ – единичная матрица, δ_{jl} – символ Кронекера. Обозначим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M^{(s)} &= \{ \hat{L} \in \mathcal{L}_M : \hat{L} \hat{\alpha}_j = (-1)^s \hat{\alpha}_j \hat{L} \text{ для всех } j = 1, \dots, n \}, \\ \mathcal{S}_M^{(s)} &= \mathcal{L}_M^{(s)} \cap \mathcal{S}_M, \quad s = 0, 1. \end{aligned}$$

Пусть

$$\hat{D} = \hat{D}_0 + \hat{V}^{(0)} + \hat{V}^{(1)} - \sum_{j=1}^n A_j \hat{\alpha}_j = \sum_{j=1}^n \left(-i \frac{\partial}{\partial x_j} - A_j \right) \hat{\alpha}_j + \hat{V}^{(0)} + \hat{V}^{(1)} \quad (1)$$

– оператор Дирака, $n \geq 3$ ($i^2 = -1$). Вектор-функция $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ и матричные функции $\hat{V}^{(s)}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathcal{S}_M^{(s)}$, $s = 0, 1$, предполагаются периодическими с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$. Положим

$$\hat{V} = \hat{V}^{(0)} + \hat{V}^{(1)} - \sum_{j=1}^n A_j \hat{\alpha}_j.$$

Координаты векторов из $\mathbf{R}^n$ задаются в некотором ортогональном базисе $\{\mathcal{E}_j\}$; E_j и E_j^* – базисные векторы решетки Λ и обратной к ней решетки Λ^* , $(E_j, E_l^*) = \delta_{jl}$ ($|\cdot|$ и $(\cdot, \cdot)$ – длина и скалярное произведение векторов из $\mathbf{R}^n$),

$$\begin{aligned} K &= \left\{ x = \sum \xi_j E_j : 0 \leq \xi_j < 1, j = 1, \dots, n \right\}, \\ K^* &= \left\{ y = \sum \eta_j E_j^* : 0 \leq \eta_j < 1, j = 1, \dots, n \right\}, \end{aligned}$$

$v(K)$ и $v(K^*)$ – объемы элементарных ячеек K и K^* .

В пространствах $L^2(K; \mathbf{C}^M)$ и $\mathbf{C}^M$ скалярные произведения и нормы вводятся обычным образом. Они будут (как правило) обозначаться одинаково (без указания в обозначениях самого пространства). Матрицы из $\mathcal{L}_M$ отождествляются с операторами на пространстве $\mathbf{C}^M$ (и их норма определяется как норма оператора на $\mathbf{C}^M$). Пусть $H^q(\mathbf{R}^n; \mathbf{C}^d)$, $d \in \mathbf{N}$, – класс Соболева порядка $q \geq 0$, $\tilde{H}^q(K; \mathbf{C}^d)$ – множество вектор-функций $\phi: K \rightarrow \mathbf{C}^d$, периодические продолжения которых (с решеткой периодов Λ) принадлежат $H_{\text{loc}}^q(\mathbf{R}^n; \mathbf{C}^d)$. Функции, определенные на элементарной ячейке K , в дальнейшем будут также отождествляться с их периодическими продолжениями на все пространство $\mathbf{R}^n$.

Через

$$\chi_N = v^{-1}(K) \int_K \chi(x) e^{-2\pi i(N,x)} d^n x, \quad N \in \Lambda^*,$$

обозначаются коэффициенты Фурье функций $\chi \in L^1(K; U)$, где $U = \mathbf{C}, \mathbf{C}^M$ или $\mathcal{L}_M$.

Пусть $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ – множество борелевских подмножеств $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}$; $\mathcal{M}_h, h > 0$, – множество закононеопределенных четных (борелевских) мер $\mu: \mathcal{B}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$, для которых

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(p) &= \int_{\mathbf{R}} e^{ipt} d\mu(t) = 1 \quad \text{при } |p| \leq 2\pi h, \\ p \in \mathbf{R}; \quad \|\mu\| &= \sup_{\mathcal{O} \in \mathcal{B}(\mathbf{R})} (|\mu(\mathcal{O})| + |\mu(\mathbf{R} \setminus \mathcal{O})|) < +\infty, \quad \mu \in \mathcal{M}_h. \end{aligned}$$

Для любых вектора $\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}$, меры $\mu \in \mathcal{M}_h, h > 0$, и вектора $\tilde{e} \in S_{n-2}(|\gamma|^{-1}\gamma) = \{e' \in S_{n-1} : (\gamma, e') = 0\}$ (S_{n-1} – единичная сфера в $\mathbf{R}^n$) обозначим

$$\tilde{A}(\gamma, \mu, \tilde{e}; x) = \int_{\mathbf{R}} d\mu(t) \int_0^1 A(x - \xi\gamma - t\tilde{e}) d\xi, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

В данной работе будут рассматриваться непрерывные (периодические) функции $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ и $\hat{V}^{(s)}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathcal{S}_M^{(s)}, s = 0, 1$. В этом случае $\hat{D} = \hat{D}_0 + \hat{V}$ – самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbf{R}^n; \mathbf{C}^M)$ с областью определения $D(\hat{D}) = D(\hat{D}_0) = H^1(\mathbf{R}^n; \mathbf{C}^M)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ и $\hat{V}^{(s)}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathcal{S}_M^{(s)}, s = 0, 1$, – непрерывные периодические с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$ функции, $n \geq 3$. Предположим, что

$$\max_{\tilde{e} \in S_{n-2}(|\gamma|^{-1}\gamma)} \|\tilde{A}(\gamma, \mu, \tilde{e}; \cdot) - A_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} < \pi|\gamma|^{-1} \quad (2)$$

для некоторых вектора $\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}$ и меры $\mu \in \mathcal{M}_h, h > 0$, где

$$A_0 = v^{-1}(K) \int_K A(x) d^n x.$$

Тогда спектр оператора (1) абсолютно непрерывен.

Оператор $\hat{D}$ унитарно-эквивалентен прямому интегралу

$$\int_{2\pi K^*} \bigoplus \hat{D}(k) \frac{d^n k}{(2\pi)^n v(K^*)}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{D}(k) &= \hat{D}_0(k) + \hat{V}, \quad \hat{D}_0(k) = \sum \left(-i \frac{\partial}{\partial x_j} + k_j \right) \hat{a}_j, \\ k_j &= (k, \mathcal{E}_j), \quad D(\hat{D}(k)) = D(\hat{D}_0(k)) = \tilde{H}^1(K; \mathbf{C}^M) \subset L^2(K; \mathbf{C}^M). \end{aligned}$$

Вектор $k \in \mathbf{R}^n$ называется квазиимпульсом. Унитарная эквивалентность устанавливается с помощью преобразования Гельфанда [11] (в случае периодического оператора Дирака см. также статью [9]). Самосопряженные операторы $\widehat{D}(k)$ имеют компактную резольвенту и, следовательно, дискретный спектр. Пусть $E_\nu(k)$, $\nu \in \mathbf{Z}$, — упорядоченные по возрастанию (с учетом кратности) собственные значения операторов $\widehat{D}(k)$. Нумерацию собственных значений при разных k можно выбрать так, чтобы функции $\mathbf{R}^n \ni k \rightarrow E_\nu(k)$ были непрерывными.

Пусть $e \in S_{n-1}$. Для $k \in \mathbf{R}^n$ и $\kappa \geq 0$ обозначим

$$\begin{aligned}\widehat{D}_0(k + i\kappa e) &= \widehat{D}_0(k) + i\kappa \sum e_j \widehat{\alpha}_j, \quad e_j = (e, \mathcal{E}_j), \\ \widehat{D}(k + i\kappa e) &= \widehat{D}_0(k + i\kappa e) + \widehat{V}, \\ D(\widehat{D}(k + i\kappa e)) &= D(\widehat{D}_0(k + i\kappa e)) = \widetilde{H}^1(K; \mathbf{C}^M).\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Воспользуемся методом Томаса [12]. Так как этот метод хорошо известен [4, 9] (в случае периодического оператора Шредингера см. [2, 13]), то приведем только его краткую схему. Из разложения оператора $\widehat{D}$ в прямой интеграл (3) и кусочной аналитичности функций $\mathbf{R} \ni \xi \rightarrow E_\nu(k + \xi e)$, $\nu \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{R}^n$, следует [13, теоремы XIII.85 и XIII.86], что для доказательства абсолютной непрерывности спектра оператора (1) достаточно доказать, что функции $\xi \rightarrow E_\nu(k + \xi e)$ не являются постоянными (для некоторого единичного вектора e) ни на одном интервале $(\xi_1, \xi_2) \subset \mathbf{R}$. Однако если предположить, что $E_\nu(k + \xi e) = E$ при всех $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, $\xi_1 < \xi_2$, то из аналитической теоремы Фредгольма получаем, что E — собственное значение оператора $\widehat{D}(k + (\xi + i\kappa)e)$ при всех $\xi + i\kappa \in \mathbf{C}$. Следовательно, достаточно доказать обратимость операторов $\widehat{D}(k + (\xi + i\kappa)e) - E$, $k \in \mathbf{R}^n$, $E \in \mathbf{R}$, для каких-либо значений $\xi + i\kappa \in \mathbf{C}$. Поэтому теорема 1 является следствием следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}$, $e = |\gamma|^{-1}\gamma$, $\mu \in \mathcal{M}_h$, $h > 0$; $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$ и $\widehat{V}^{(s)}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathcal{L}_M^{(s)}$, $s = 0, 1$, — непрерывные периодические с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$ функции, $n \geq 3$. Предположим, что $A_0 = 0$ и

$$\max_{\tilde{e} \in S_{n-2}(|\gamma|^{-1}\gamma)} \left\| (\tilde{A}(\gamma, \mu, \tilde{e}; \cdot), \tilde{e}) + i(\tilde{A}(\gamma, \mu, \tilde{e}; \cdot), e) \right\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} = \widetilde{\theta} \pi |\gamma|^{-1},$$

где $\widetilde{\theta} \in [0, 1)$. Тогда для любого $\theta \in (0, 1 - \widetilde{\theta})$ найдется число $\kappa_0 = \kappa_0(\gamma, h, \mu; \widehat{V}, \theta) > 0$ такое, что для всех $k \in \mathbf{R}^n$: $(k, \gamma) = \pi$, всех $\kappa \geq \kappa_0$ и всех вектор-функций $\phi \in \widetilde{H}^1(K; \mathbf{C}^M)$ справедливо неравенство

$$\|\widehat{D}(k + i\kappa e)\phi\| \geq \theta \pi |\gamma|^{-1} \exp(-2C\|\mu\| \max\{|\gamma|, h^{-1}\} \|A\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n; \mathbf{C}^n)}) \|\phi\|,$$

где $C > 0$ — некоторая универсальная постоянная.

Доказательство теоремы 2 приведено в п. 3. Следующая теорема является следствием теоремы 1.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ и $\widehat{V}^{(s)}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathcal{S}_M^{(s)}$, $s = 0, 1$, – непрерывные периодические с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$ ($n \geq 3$) функции. Предположим, что выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

- 1) $A \in H_{\text{loc}}^q(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n)$, $2q > n - 2$;
- 2) $\sum_{N \in \Lambda^*} \|A_N\|_{\mathbf{C}^n} < +\infty$.

Тогда спектр оператора (1) абсолютно непрерывен.

При доказательстве теоремы 3 используется также теорема 4.

ТЕОРЕМА 4. Пусть Λ – решетка в $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$. Существуют положительные константы c_1 и c_2 , зависящие от n и Λ , такие, что для любой неотрицательной (борелевской) меры μ на единичной сфере $S_{n-1} \subset \mathbf{R}^n$, любого $h > 0$ и любого $R_0 \geq \min_{\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}} |\gamma|$ найдется такой вектор $\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}$, что:

- 1) $|\gamma| \leq R_0$;
- 2) если $(\gamma, \gamma') = 0$ для некоторого вектора $\gamma' \in \Lambda^* \setminus \{0\}$, то $|\gamma'| > c_1 R_0^{-\frac{1}{n-1}}$ (Λ^* – обратная к Λ решетка);
- 3) $\mu(\{e' \in S_{n-1} : |(e', \gamma)| \leq h\}) \leq c_2 |\gamma|^{-1} \max\{h, R_0^{-\frac{1}{n-1}}\} \mu(S_{n-1})$.

Доказательство теоремы 4 для решетки $\Lambda = \mathbf{Z}^n$ и при $h = c_3 R_0^{-\frac{1}{n-1}}$ (где $c_3 = c_3(n) > 0$) приведено в работе [14] (при $n = 3$ см. [15]). В общем случае ее доказательство с небольшими изменениями следует доказательству, предложенному в [14].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Можно считать, что $A_0 = 0$. Обозначим

$$F(A; \gamma, \mu) = \max_{\tilde{e} \in S_{n-2}(|\gamma|^{-1}\gamma)} |\gamma| \|\tilde{A}(\gamma, \mu, \tilde{e}; \cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n)}, \quad \gamma \in \Lambda \setminus \{0\}, \quad \mu \in \mathcal{M}_h.$$

Пусть выполнено условие 1. На единичной сфере S_{n-1} определим меру

$$\mu^{(1)}(\cdot) = \sum_{N \in \Lambda^* \setminus \{0\}} |N|^{2q} \|A_N\|_{\mathbf{C}^n}^2 \delta_{\frac{N}{|N|}}(\cdot)$$

($\delta_{e'}(\cdot)$ – мера Дирака, сосредоточенная в точке $e' \in S_{n-1}$). Из теоремы 4 (примененной к мере $\mu^{(1)}$) следует, что для любого $R_0 \geq \min_{\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}} |\gamma|$ существует вектор $\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}$, для которого $|\gamma| \leq R_0$,

$$\sum_{N \in \Pi(\gamma)} |N|^{2q} \|A_N\|_{\mathbf{C}^n}^2 \leq c_2 |\gamma|^{-1} R_0^{-\frac{1}{n-1}} \sum_{N \in \Lambda^*} |N|^{2q} \|A_N\|_{\mathbf{C}^n}^2$$

и $|\gamma'| > c_1 R_0^{-\frac{1}{n-1}}$ для всех $\gamma' \in \Pi(\gamma) = \{\gamma' \in \Lambda^* \setminus \{0\} : (\gamma, \gamma') = 0\}$. Выберем меру $\mu \in \mathcal{M}_h$ (для некоторого $h > 0$) так, что $|\widehat{\mu}(p)| \leq 1$ для всех $p \in \mathbf{R}$ и $\widehat{\mu}(p) = 0$ для всех $|p| \geq 2\pi h_1 > 2\pi h$. Для вектора $\tilde{e} \in S_{n-2}(|\gamma|^{-1}\gamma)$ обозначим $\Pi(\gamma, \tilde{e}) = \{\gamma' \in \Pi(\gamma) : |(\gamma', \tilde{e})| \leq h_1\}$. Так как $2q > n - 2$, то

$$\sum_{N \in \Pi(\gamma, \tilde{e})} |N|^{-2q} \leq c_4 R_0^{-\frac{2q}{n-1}}$$

для всех $\tilde{e} \in S_{n-2}(|\gamma|^{-1}\gamma)$, где константа $c_4 > 0$ зависит от n, Λ, q и h_1 . Следовательно,

$$\begin{aligned} F(A; \gamma, \mu) &\leq \sup_{\tilde{e} \in S_{n-2}(|\gamma|^{-1}\gamma)} |\gamma| \sum_{N \in \Pi(\gamma, \tilde{e})} \|A_N\|_{\mathbf{C}^n} \leq \\ &\leq |\gamma| \left(\sup_{\tilde{e} \in S_{n-2}(|\gamma|^{-1}\gamma)} \sum_{N \in \Pi(\gamma, \tilde{e})} |N|^{-2q} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{N \in \Pi(\gamma)} |N|^{2q} \|A_N\|_{\mathbf{C}^n}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \sqrt{c_2 c_4} R_0^{\frac{n-2-2q}{2(n-1)}} \left(\sum_{N \in \Lambda^*} |N|^{2q} \|A_N\|_{\mathbf{C}^n}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

При выборе достаточно большого числа R_0 правая часть неравенства (4) может быть сделана сколь угодно малой (и, следовательно, справедливо неравенство (2)). Аналогично (несколько проще) рассматривается случай 2, при этом выбирается мера Дирака $\mu = \delta$. Теорема 3 доказана.

2. Выберем и зафиксируем вектор $\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}$ и меру $\mu \in \mathcal{M}_h$, $h > 0$, $e = |\gamma|^{-1}\gamma$. Вводимые далее константы и числа могут зависеть от γ, h и μ , но явно эта зависимость (до теоремы 8 ниже) указываться не будет.

Обозначим через $\hat{P}^{\mathcal{C}}$, где $\mathcal{C} \subset \Lambda^*$, ортогональный проектор в пространстве $L^2(K; \mathbf{C}^M)$, ставящий в соответствие вектор-функциям $\phi \in L^2(K; \mathbf{C}^M)$ вектор-функции

$$\hat{P}^{\mathcal{C}} \phi = \phi^{\mathcal{C}} = \sum_{N \in \mathcal{C}} \phi_N e^{2\pi i(N, x)}$$

($\phi^{\emptyset} \equiv 0$); $\mathcal{H}(\mathcal{C}) = \{\phi \in L^2(K; \mathbf{C}^M) : \phi_N = 0 \text{ при } N \notin \mathcal{C}\}$.

Пусть $\mathcal{P}(e) = \{\tau e : \tau \in \mathbf{R}\}$. Для векторов $x \in \mathbf{R}^n \setminus \mathcal{P}(e)$ обозначим

$$\tilde{e}(x) = (x - (x, e)e) |x - (x, e)e|^{-1} \in S_{n-2}(e),$$

где $S_{n-2}(e) = \{\tilde{e} \in S_{n-1} : (e, \tilde{e}) = 0\}$; $\text{mes}(\cdot)$ – стандартная мера (“площадь поверхности”) на единичной сфере $S_{n-2} = S_{n-2}(e)$, $\sigma_{n-2} = \text{mes}(S_{n-2})$. Для $\beta > 0$ при $\kappa > \beta$ обозначим

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_\beta &= \mathcal{O}_\beta(\kappa) = \{x \in \mathbf{R}^n : |(x, e)| < \beta \text{ и } |\kappa - |x - (x, e)e|| < \beta\}, \\ \mathcal{K}_\beta &= \mathcal{K}_\beta(k; \kappa) = \{N \in \Lambda^* : k + 2\pi N \in \mathcal{O}_\beta\}, \quad k \in \mathbf{R}^n. \end{aligned}$$

Для всех $\tilde{e} \in S_{n-2}(e)$ положим

$$\hat{P}_{\tilde{e}}^{\pm} = \frac{1}{2} \left(\hat{I} \mp i \left(\sum e_j \hat{\alpha}_j \right) \left(\sum \tilde{e}_j \hat{\alpha}_j \right) \right),$$

$\hat{P}_{\tilde{e}}^{\pm}$ – ортогональные проекторы в $\mathbf{C}^M$.

Для $k \in \mathbf{R}^n$, $\kappa \geq 0$ и $N \in \Lambda^*$ обозначим

$$\begin{aligned}\widehat{D}_N(k; \kappa) &= \sum_{j=1}^n (k_j + 2\pi N_j + i\kappa e_j) \widehat{\alpha}_j, \\ G_N^\pm(k; \kappa) &= \left((k + 2\pi N, e)^2 + (\kappa \pm \sqrt{|k + 2\pi N|^2 - (k + 2\pi N, e)^2})^2 \right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

$G_N(k; \kappa) = G_N^-(k; \kappa)$. Справедливы неравенства

$$G_N(k; \kappa) \|u\| \leq \|\widehat{D}_N(k; \kappa)u\| \leq G_N^+(k; \kappa) \|u\|, \quad u \in \mathbf{C}^M.$$

Если $(k, \gamma) = \pi$, то $G_N(k; \kappa) \geq |(k + 2\pi N, e)| \geq \pi |\gamma|^{-1}$. Для всех вектор-функций $\phi \in \widetilde{H}^1(K; \mathbf{C}^M)$ имеем

$$\widehat{D}_0(k + i\kappa e)\phi = \sum_{N \in \Lambda^*} \widehat{D}_N(k; \kappa) \phi_N e^{2\pi i(N, x)}.$$

При этом (для всех $\kappa \geq 0$ и $k + 2\pi N \notin \mathcal{P}(e)$)

$$\|\widehat{D}_N(k; \kappa) \widehat{P}_{\tilde{e}(k+2\pi N)}^\pm \phi_N\| = G_N^\pm(k; \kappa) \|\widehat{P}_{\tilde{e}(k+2\pi N)}^\pm \phi_N\|$$

и

$$\widehat{P}_{\tilde{e}(k+2\pi N)}^\pm \widehat{D}_N(k; \kappa) \widehat{P}_{\tilde{e}(k+2\pi N)}^\pm = \widehat{O},$$

где $\widehat{O} \in \mathcal{L}_M$ — нулевая матрица.

Обозначим через $\widehat{P}^\pm = \widehat{P}^\pm(k)$, где $k \in \mathbf{R}^n$, операторы в $L^2(K; \mathbf{C}^M)$, ставящие в соответствие вектор-функциям $\phi \in L^2(K; \mathbf{C}^M)$ вектор-функции $\widehat{P}^\pm \phi \in L^2(K; \mathbf{C}^M)$ с коэффициентами Фурье $(\widehat{P}^\pm \phi)_N = \widehat{P}_{\tilde{e}(k+2\pi N)}^\pm \phi_N$, если $k + 2\pi N \notin \mathcal{P}(e)$, и $(\widehat{P}^\pm \phi)_N = 0$ в противном случае.

Для матричной функции $\widehat{V} = \widehat{V}^{(0)} + \widehat{V}^{(1)} - \sum A_j \widehat{\alpha}_j$, где $\widehat{V}^{(s)}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathcal{L}_M^{(s)}$, $s = 0, 1$, и $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$ — непрерывные периодические с решеткой периодов Λ функции, обозначим

$$W = W(\widehat{V}) = n \|A\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n; \mathbf{C}^n)} + \sum_{s=0,1} \|\widehat{V}^{(s)}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n; \mathcal{L}_M)}.$$

Положим $c_5(A) = c_5(A; \gamma, h, \mu) = \exp(-2C \|\mu\| \max\{|\gamma|, h^{-1}\}) \|A\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n; \mathbf{C}^n)}$, где $C > 0$ — универсальная постоянная, которая будет определена в лемме 1.

ТЕОРЕМА 5. Пусть (при фиксированных векторе $\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}$, числе $h > 0$ и мере $\mu \in \mathcal{M}_h$; $e = |\gamma|^{-1} \gamma$) $\tilde{\theta} \in [0, 1)$, $\theta \in (0, 1 - \tilde{\theta})$, $W_0 \geq 0$, $R \geq 1$, $\beta > 0$ и $a \in (0, 1]$. Тогда найдутся числа $b = b(\tilde{\theta}, \theta, W_0; a) > 0$ и $\kappa_0 = \kappa_0(\tilde{\theta}, \theta, W_0, R, \beta; a) > 4\beta + R$ такие, что для всех векторов $k \in \mathbf{R}^n$: $(k, \gamma) = \pi$, всех $\kappa \geq \kappa_0$, всех непрерывных периодических с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$ ($n \geq 3$) функций $\widehat{V}^{(s)}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathcal{L}_M^{(s)}$, $s = 0, 1$, и $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$, для которых $A_0 = 0$,

$$W(\widehat{V}) \leq W_0, \tag{5}$$

$$\max_{\tilde{e} \in S_{n-2}(e)} \|(\tilde{A}(\gamma, \mu, \tilde{e}; \cdot), \tilde{e}) + i(\tilde{A}(\gamma, \mu, \tilde{e}; \cdot), e)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} \leq \tilde{\theta} \pi |\gamma|^{-1}, \tag{6}$$

$$\widehat{V}_N = 0 \quad \text{при} \quad 2\pi|N| > R, \tag{7}$$

и всех вектор-функций $\phi \in \mathcal{H}(\mathcal{K}_\beta(k; \kappa))$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \|\widehat{P}^+(k)\widehat{D}(k+ike)\phi\|^2 + a^2\|\widehat{P}^-(k)\widehat{D}(k+ike)\phi\|^2 \geq \\ & \geq c_5^2(A) \left(\left(\theta \frac{\pi}{|\gamma|} \right)^2 \|\widehat{P}^-(k)\phi\|^2 + \left(\frac{b\kappa}{\beta+R} \right)^2 \|\widehat{P}^+(k)\phi\|^2 \right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, будем считать, что базисный вектор $\mathcal{E}_2$ совпадает с e . Выберем (и зафиксируем) числа $\theta < \theta_4 < \theta_3 < \theta_2 < \theta_1 < 1 - \tilde{\theta}$. Обозначим $\delta = 1 - \theta_4^2\theta_3^{-2}$, $c'_5 = \exp(-2C\|\mu\|\max\{|\gamma|, h^{-1}\}W_0)$. Выберем число $\tilde{\epsilon} \in (0, 1)$, исходя из условия $(c'_5)^2((1 - \tilde{\epsilon})\theta_4^2 - \theta^2)\pi^2|\gamma|^{-2} \geq 2\delta^{-1}W_0^2\tilde{\epsilon}$. Ограничения (снизу) на константу κ_0 будут уточняться по ходу доказательства. Вначале предположим, что $\kappa_0 > 4\beta + R$. В этом случае, если $N \in \mathcal{K}_\beta(k; \kappa)$, $k \in \mathbf{R}^n$, $\kappa \geq \kappa_0$, и $2\pi|N'| \leq R$ (где $N' \in \Lambda^*$), то $|\tilde{e}(k+2\pi(N+N')) - \tilde{e}(k+2\pi N)| < 2R/\kappa$. Существует число $c_6 = c_6(\tilde{\epsilon}) > 0$ такое, что для всех $\kappa \geq \kappa_0$ найдутся непересекающиеся (непустые) открытые множества $\tilde{\Omega}_\lambda = \tilde{\Omega}_\lambda(\kappa) \subset S_{n-2} = S_{n-2}(e)$ и векторы $E^\lambda = E^\lambda(\kappa) \in \tilde{\Omega}_\lambda$, $\lambda = 1, \dots, \lambda(\tilde{\epsilon}, R; \kappa)$, такие, что:

- 1) $|\tilde{e} - E^\lambda| \leq \tilde{\rho} = c_6 R/\kappa$ для всех $\tilde{e} \in \tilde{\Omega}_\lambda$;
- 2) $|\tilde{e}' - \tilde{e}''| > 8R/\kappa$ для всех $\tilde{e}' \in \tilde{\Omega}_{\lambda_1}$, $\tilde{e}'' \in \tilde{\Omega}_{\lambda_2}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$;
- 3) $\text{mes}(S_{n-2} \setminus \bigcup_\lambda \tilde{\Omega}_\lambda) < (1/2)\tilde{\epsilon}\sigma_{n-2}$.

Обозначим $\rho = \tilde{\rho} + 2R/\kappa$, $\rho' = \tilde{\rho} + 4R/\kappa$. Пусть

$$\Omega_\lambda = \left\{ \tilde{e} \in S_{n-2} : |\tilde{e} - \tilde{e}'| < \frac{2R}{\kappa} \text{ для некоторого } \tilde{e}' \in \tilde{\Omega}_\lambda \right\};$$

$\tilde{\Omega}_\lambda \subset \Omega_\lambda$ и $|\tilde{e}' - \tilde{e}''| > 4R/\kappa$ для всех $\tilde{e}' \in \Omega_{\lambda_1}$, $\tilde{e}'' \in \Omega_{\lambda_2}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Из свойства 3 следует, что для любых $k \in \mathbf{R}^n$: $(k, \gamma) = \pi$, $\kappa \geq \kappa_0$ и $\phi \in \mathcal{H}(\mathcal{K}_\beta(k; \kappa))$ существует ортогональное преобразование $\widehat{S} = \widehat{S}(k, \kappa; \phi)$ единичной сферы S_{n-2} такое, что (для каждого из знаков)

$$\sum_{N \in \mathcal{K}_\beta: \tilde{e}(k+2\pi N) \notin \bigcup_\lambda \tilde{\Omega}_\lambda} \|\widehat{P}_{\tilde{e}(k+2\pi N)}^\pm \phi_N\|^2 \leq \tilde{\epsilon} v^{-1}(K) \|\widehat{P}^\pm \phi\|^2.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \tilde{e}^\lambda &= \widehat{S}(k, \kappa; \phi) E^\lambda, \\ \tilde{\mathcal{K}}_\beta^\lambda &= \tilde{\mathcal{K}}_\beta^\lambda(k, \kappa; \phi) = \{N \in \mathcal{K}_\beta(k; \kappa) : \tilde{e}(k+2\pi N) \in \tilde{\Omega}_\lambda\}, \\ \mathcal{K}_\beta^\lambda &= \mathcal{K}_\beta^\lambda(k, \kappa; \phi) = \{N \in \mathcal{K}_\beta(k; \kappa) : \tilde{e}(k+2\pi N) \in \widehat{S}\Omega_\lambda\}, \quad \tilde{\mathcal{K}}_\beta^\lambda \subset \mathcal{K}_\beta^\lambda. \end{aligned}$$

Выбор ортогонального преобразования $\widehat{S}$ означает, что

$$\|(\widehat{P}^\pm \phi)^{\mathcal{K}_\beta \setminus \bigcup_\lambda \tilde{\mathcal{K}}_\beta^\lambda}\|^2 \leq \tilde{\epsilon} \|\widehat{P}^\pm \phi\|^2. \quad (8)$$

Для каждого индекса λ (при выбранных k , κ и ϕ) выберем ортогональную систему векторов $\mathcal{E}_j^{(\lambda)} \in S_{n-1}$, $j = 1, \dots, n$, так, что $\mathcal{E}_1^{(\lambda)} = \tilde{e}^\lambda$, $\mathcal{E}_2^{(\lambda)} = \mathcal{E}_2 = e$. Через $x_j^{(\lambda)} =$

$(x, \mathcal{E}_j^{(\lambda)})$ будем обозначать координаты векторов $x = \sum x_j \mathcal{E}_j \in \mathbf{R}^n$ (а также векторов из $\mathbf{C}^n$). Пусть $\mathcal{E}_j^{(\lambda)} = \sum_l T_{lj}^{(\lambda)} \mathcal{E}_l$. Тогда $A_j^{(\lambda)} = \sum_l T_{lj}^{(\lambda)} A_l$ (где $A_l = (A, \mathcal{E}_l)$, $A_j^{(\lambda)} = (A, \mathcal{E}_j^{(\lambda)})$), $\tilde{A}_j^{(\lambda)} = \tilde{A}_j^{(\lambda)}(\gamma, \mu, \tilde{e}^\lambda; \cdot) = \sum_l T_{lj}^{(\lambda)} \tilde{A}_l$, $\tilde{A}_l = \tilde{A}_l(\gamma, \mu, \tilde{e}^\lambda; \cdot)$. Обозначим $\hat{\alpha}_j^{(\lambda)} = \sum_l T_{lj}^{(\lambda)} \hat{\alpha}_l$, $j = 1, \dots, n$. Для коэффициентов Фурье $(\tilde{A}_j^{(\lambda)})_N$ функций $\tilde{A}_j^{(\lambda)}$, $j = 1, \dots, n$, имеем $(\tilde{A}_j^{(\lambda)})_N = \tilde{\mu}(2\pi N_1^{(\lambda)})(A_j^{(\lambda)})_N$, если $N_2 = 0$, и $(\tilde{A}_j^{(\lambda)})_N = 0$, если $N_2 \neq 0$ (где $(A_j^{(\lambda)})_N$ — коэффициенты Фурье функций $A_j^{(\lambda)}$, $N \in \Lambda^*$).

Пусть $\Phi^{(s, \lambda)}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}$, $s = 1, 2$, — периодические с решеткой периодов Λ тригонометрические многочлены, имеющие коэффициенты Фурье $\Phi_N^{(1, \lambda)} = \Phi_N^{(2, \lambda)} = 0$, если $N_1^{(\lambda)} = N_2 = 0$, и

$$\begin{aligned} \Phi_N^{(1, \lambda)} &= \left(2\pi i((N_1^{(\lambda)})^2 + N_2^2)\right)^{-1} (N_1^{(\lambda)}(A_1^{(\lambda)} - \tilde{A}_1^{(\lambda)})_N + N_2(A_2 - \tilde{A}_2)_N), \\ \Phi_N^{(2, \lambda)} &= -\left(2\pi i((N_1^{(\lambda)})^2 + N_2^2)\right)^{-1} (N_2(A_1^{(\lambda)} - \tilde{A}_1^{(\lambda)})_N - N_1^{(\lambda)}(A_2 - \tilde{A}_2)_N) \end{aligned}$$

в противном случае. Имеем

$$\frac{\partial \Phi^{(1, \lambda)}}{\partial x_1^{(\lambda)}} - \frac{\partial \Phi^{(2, \lambda)}}{\partial x_2} = A_1^{(\lambda)} - \tilde{A}_1^{(\lambda)}, \quad \frac{\partial \Phi^{(1, \lambda)}}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi^{(2, \lambda)}}{\partial x_1^{(\lambda)}} = A_2 - \tilde{A}_2.$$

ЛЕММА 1. *Существует универсальная постоянная $C > 0$ такая, что*

$$\|\Phi^{(s, \lambda)}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} \leq C \|\mu\| \max\{|\gamma|, h^{-1}\} \|A\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n; \mathbf{C}^n)}, \quad s = 1, 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta(\cdot) \in C^\infty(\mathbf{R}; \mathbf{R})$, $\eta(\tau) = 0$ при $\tau \leq \pi$, $0 \leq \eta(\tau) \leq 1$ при $\pi < \tau \leq 2\pi$ и $\eta(\tau) = 1$ при $\tau > 2\pi$. При $x, y \in \mathbf{R}$ (и $x^2 + y^2 > 0$) положим

$$G(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \int_0^{+\infty} \frac{\partial \eta(\tau)}{\partial \tau} J_0(\tau \sqrt{x^2 + y^2}) d\tau,$$

где $J_0(\cdot)$ — функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка; $G(\cdot, \cdot) \in L^q(\mathbf{R}^2)$, $q \in [1, 2)$. Обозначим $G_1(t; x, y) = t^{-1} G(t^{-1}x, t^{-1}y)$, $t > 0$; $G_2(t; x, y) = G_1(t; y, x)$; $\|G_s(t; \cdot, \cdot)\|_{L^1(\mathbf{R}^2)} = t \|G(\cdot, \cdot)\|_{L^1(\mathbf{R}^2)}$. Для произвольной непрерывной периодической с решеткой периодов Λ функции $\mathcal{F}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}$ положим

$$(\mathcal{F} *_{\lambda} G_s(t; \cdot, \cdot))(x) = \iint_{\mathbf{R}^2} G_s(t; \xi_1, \xi_2) \mathcal{F}(x - \xi_1 \tilde{e}^\lambda - \xi_2 e) d\xi_1 d\xi_2, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

при этом $(\mathcal{F} *_{\lambda} G_s(t; \cdot, \cdot))_N = 0$, если $N_1^{(\lambda)} = N_2 = 0$,

$$(\mathcal{F} *_{\lambda} G_s(t; \cdot, \cdot))_N = -\frac{i N_s^{(\lambda)}}{(N_1^{(\lambda)})^2 + N_2^2} \eta\left(2\pi t \sqrt{(N_1^{(\lambda)})^2 + N_2^2}\right) \mathcal{F}_N$$

в противном случае, $s = 1, 2$. Пусть $t = \max\{|\gamma|, h^{-1}\}$. Так как $(A - \tilde{A})_N = 0$ при $N_2 = 0$, $|N_1^{(\lambda)}| \leq h$ и $|N_2| = |\gamma|^{-1}|(N, \gamma)| \geq |\gamma|^{-1}$ при $N_2 \neq 0$, то

$$\begin{aligned} 2\pi\Phi^{(1,\lambda)} &= (A_1^{(\lambda)} - \tilde{A}_1^{(\lambda)}) *_{\lambda} G_1(|\gamma|; \cdot, \cdot) + (A_2 - \tilde{A}_2) *_{\lambda} G_2(|\gamma|; \cdot, \cdot), \\ 2\pi\Phi^{(2,\lambda)} &= -(A_1^{(\lambda)} - \tilde{A}_1^{(\lambda)}) *_{\lambda} G_2(|\gamma|; \cdot, \cdot) + (A_2 - \tilde{A}_2) *_{\lambda} G_1(|\gamma|; \cdot, \cdot). \end{aligned}$$

Осталось воспользоваться неравенствами $\|\tilde{A}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n; \mathbf{C}^n)} \leq \|\mu\| \|A\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n; \mathbf{C}^n)}$, $\|\mu\| \geq 1$; $C = 2\pi^{-1} \|G(\cdot, \cdot)\|_{L^1(\mathbf{R}^2)}$. Лемма доказана.

Обозначим

$$\begin{aligned} \hat{D}_0^{(\lambda)} &= \left(-i \frac{\partial}{\partial x_1^{(\lambda)}} + k_1^{(\lambda)}\right) \hat{\alpha}_1^{(\lambda)} + \left(-i \frac{\partial}{\partial x_2} + k_2 + i\kappa\right) \hat{\alpha}_2, \\ \hat{D}^{(\lambda)} &= \hat{D}_0^{(\lambda)} - \tilde{A}_1^{(\lambda)} \hat{\alpha}_1^{(\lambda)} - \tilde{A}_2 \hat{\alpha}_2, \\ \hat{D}^{(\lambda)}(k + i\kappa e) &= e^{-i\hat{\alpha}_1^{(\lambda)} \hat{\alpha}_2 \Phi(2, \lambda)} e^{i\Phi(1, \lambda)} \hat{D}^{(\lambda)} e^{-i\Phi(1, \lambda)} e^{-i\hat{\alpha}_1^{(\lambda)} \hat{\alpha}_2 \Phi(2, \lambda)}, \\ \hat{V}^{(\lambda)} &= \hat{V}^{(0)} + \hat{V}^{(1)} + \sum_{j=3}^n \left(-i \frac{\partial}{\partial x_j^{(\lambda)}} + k_j^{(\lambda)} - A_j^{(\lambda)}\right) \hat{\alpha}_j^{(\lambda)}, \\ \hat{D}(k + i\kappa e) &= \hat{D}^{(\lambda)}(k + i\kappa e) + \hat{V}^{(\lambda)}. \end{aligned}$$

Если $N \in \mathcal{K}_\beta^\lambda$, то $|\tilde{e}(k + 2\pi N) - \tilde{e}^\lambda| < \rho$, поэтому

$$|k + 2\pi N - (k_2 + 2\pi N_2)e - \kappa \tilde{e}^\lambda| < \beta + \rho\kappa.$$

Отсюда следует, что

$$\left| \sum_{j=3}^n (k_j^{(\lambda)} + 2\pi N_j^{(\lambda)}) \mathcal{E}_j^{(\lambda)} \right| < \beta + \rho\kappa, \quad |k_1^{(\lambda)} + 2\pi N_1^{(\lambda)} - \kappa| < \beta + \rho\kappa \quad (9)$$

и

$$\|\hat{V}^{(\lambda)} \phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\| \leq (\beta + (c_6 + 2)R + W) \|\phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\|.$$

Будем использовать краткое обозначение $\hat{P}_\lambda^\pm = \hat{P}_{\tilde{e}^\lambda}^\pm = (1/2)(\hat{I} \pm i\hat{\alpha}_1^{(\lambda)} \hat{\alpha}_2)$. Положим $\chi^{(\lambda)} = e^{-i\Phi(1, \lambda)} e^{-i\hat{\alpha}_1^{(\lambda)} \hat{\alpha}_2 \Phi(2, \lambda)} \phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}$. Справедливо равенство

$$\hat{D}_0^{(\lambda)} \hat{P}_\lambda^\pm \chi^{(\lambda)} = \sum_{N \in \Lambda^*} \left(k_2 + 2\pi N_2 + i(\kappa \pm (k_1^{(\lambda)} + 2\pi N_1^{(\lambda)})) \right) \hat{\alpha}_2 \hat{P}_\lambda^\pm \chi_N^{(\lambda)} e^{2\pi i(N, x)}. \quad (10)$$

Обозначим $\mathcal{O}^{(\lambda)}(\tau) = \{N \in \Lambda^* : |k_1^{(\lambda)} + 2\pi N_1^{(\lambda)} - \kappa| < 2\tau\}$, $\tau > 0$. Из неравенств (9) следует, что существует постоянная

$$c_7 = c_7(\tilde{\theta}, \theta, W_0, R, \beta) > \frac{1}{2}(\beta + (c_6 + 2)R)$$

такая, что (для всех λ)

$$\left\| \sum_{N \in \Lambda^* \setminus \mathcal{O}^{(\lambda)}(c_7)} \hat{P}_\lambda^+ \chi_N^{(\lambda)} e^{2\pi i(N, x)} \right\| \leq \frac{1}{2} \|\hat{P}_\lambda^+ \chi^{(\lambda)}\|. \quad (11)$$

Будем далее предполагать, что $\kappa_0 \geq c_7$. Из соотношений (10) и (11) получаем

$$\begin{aligned} \|\hat{D}_0^{(\lambda)} \hat{P}_\lambda^+ \chi^{(\lambda)}\| &\geq v^{\frac{1}{2}}(K) \left(\sum_{N \in \mathcal{O}^{(\lambda)}(c_7)} |\kappa + (k_1^{(\lambda)} + 2\pi N_1^{(\lambda)})|^2 \|\hat{P}_\lambda^+ \chi_N^{(\lambda)}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq \\ &\geq 2(\kappa - c_7) \left\| \sum_{N \in \mathcal{O}^{(\lambda)}(c_7)} \hat{P}_\lambda^+ \chi_N^{(\lambda)} e^{2\pi i(N, x)} \right\| \geq (\kappa - c_7) \|\hat{P}_\lambda^+ \chi^{(\lambda)}\|. \end{aligned}$$

С другой стороны, $|k_2 + 2\pi N_2| \geq \pi|\gamma|^{-1}$ и из условия (6) следует, что

$$\|\tilde{A}_1^{(\lambda)} \hat{\alpha}_1^{(\lambda)} + \tilde{A}_2 \hat{\alpha}_2\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n; \mathcal{L}_M)} \leq \tilde{\theta} \pi |\gamma|^{-1},$$

поэтому (см. (10))

$$\|\hat{D}^{(\lambda)} \hat{P}_\lambda^- \chi^{(\lambda)}\| \geq \|\hat{D}_0^{(\lambda)} \hat{P}_\lambda^- \chi^{(\lambda)}\| - \tilde{\theta} \pi |\gamma|^{-1} \|\hat{P}_\lambda^- \chi^{(\lambda)}\| \geq (1 - \tilde{\theta}) \pi |\gamma|^{-1} \|\hat{P}_\lambda^- \chi^{(\lambda)}\|.$$

Операторы $\hat{P}_\lambda^\pm$ коммутируют с операторами $e^{\pm i\Phi(1, \lambda)}$, $e^{-i\hat{\alpha}_1^{(\lambda)} \hat{\alpha}_2 \Phi(2, \lambda)}$ и $\hat{\mathcal{V}}^{(\lambda)}$; $\hat{P}_\lambda^\pm \hat{D}^{(\lambda)} = \hat{D}^{(\lambda)} \hat{P}_\lambda^\mp$. Следовательно,

$$\hat{P}_\lambda^\pm \hat{D}(k + i\kappa e) = \hat{D}^{(\lambda)}(k + i\kappa e) \hat{P}_\lambda^\mp + \hat{\mathcal{V}}^{(\lambda)} \hat{P}_\lambda^\pm.$$

Используя приведенные выше оценки, а также неравенство

$$\|e^{\pm i\Phi(1, \lambda)} e^{i\hat{\alpha}_1^{(\lambda)} \hat{\alpha}_2 \Phi(2, \lambda)}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n; \mathcal{L}_M)} \leq c_5^{-1}(A),$$

отсюда получаем

$$\|\hat{P}_\lambda^+ \hat{D}(k + i\kappa e) \phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\| \geq (1 - \tilde{\theta}) \pi |\gamma|^{-1} c_5(A) \|\hat{P}_\lambda^- \phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\| - \|\hat{\mathcal{V}}^{(\lambda)} \hat{P}_\lambda^+ \phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\|, \quad (12)$$

$$\|\hat{P}_\lambda^- \hat{D}(k + i\kappa e) \phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\| \geq (\kappa - c_7 - \pi |\gamma|^{-1}) c_5(A) \|\hat{P}_\lambda^+ \phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\| - \|\hat{\mathcal{V}}^{(\lambda)} \hat{P}_\lambda^- \phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\|. \quad (13)$$

Пусть

$$\sigma = \theta_2^2 \theta_3^{-2} - 1,$$

$$\tilde{a} = \min\{1, \sqrt{\sigma} a, (1 - \tilde{\theta} - \theta_1) \pi |\gamma|^{-1} c_5(A) (\beta + (c_6 + 2)R + W_0)^{-1}\}, \quad \tilde{a}' \in (0, \tilde{a}).$$

Из неравенств (12) и (13) при соответствующем выборе числа κ_0 (и при $\kappa \geq \kappa_0$) следует оценка

$$\begin{aligned} \|\hat{P}_\lambda^+ \hat{D}(k + i\kappa e) \phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\| + \tilde{a} \|\hat{P}_\lambda^- \hat{D}(k + i\kappa e) \phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\| &\geq \\ &\geq c_5(A) (\theta_1 \pi |\gamma|^{-1} \|\hat{P}_\lambda^- \phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\| + \tilde{a}' \kappa \|\hat{P}_\lambda^+ \phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\|). \end{aligned}$$

Для всех $\tilde{e} \in \widehat{S}\Omega_\lambda \subset S_{n-2}(e)$ имеем

$$\|(\widehat{P}^\pm - \widehat{P}_\lambda^\pm)\phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\| \leq \frac{1}{2}|\tilde{e} - \tilde{e}^\lambda| \|\phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\| \leq \frac{\rho}{2} \|\phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\|. \quad (14)$$

Если $(\widehat{D}(k + i\kappa e)\phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda})_N \neq 0$ для некоторого $N \in \Lambda^*$, то $k + 2\pi N \notin \mathcal{P}(e)$ и $|\tilde{e}(k + 2\pi N) - \tilde{e}^\lambda| < \rho + 2R/\kappa = \rho'$. Поэтому

$$\|(\widehat{P}^\pm - \widehat{P}_\lambda^\pm)\widehat{D}(k + i\kappa e)\phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\| \leq \frac{\rho'}{2} \|\widehat{D}(k + i\kappa e)\phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\|.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \|\widehat{P}_\lambda^+ \widehat{D}(k + i\kappa e)\phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\| + \tilde{a} \|\widehat{P}_\lambda^- \widehat{D}(k + i\kappa e)\phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\| \leq \\ & \leq (1 + \rho' \tilde{a}^{-1}) (\|\widehat{P}^+ \widehat{D}(k + i\kappa e)\phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\| + \tilde{a} \|\widehat{P}^- \widehat{D}(k + i\kappa e)\phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\|). \end{aligned} \quad (15)$$

Положим

$$b'' = \min\{1, \sqrt{\sigma}a, (1 - \tilde{\theta} - \theta_1)\pi|\gamma|^{-1}c_5(A)(c_6 + 2)^{-1}(1 + W_0)^{-1}, 2(\theta_1 - \theta_2)\pi|\gamma|^{-1}(c_6 + 2)^{-1}\}.$$

Тогда $(\beta + R)b'' \leq \tilde{a}'$ и $(c_6 + 2)b'' \leq 2(\theta_1 - \theta_2)\pi|\gamma|^{-1}$. Поэтому из неравенства (14) при подходящем выборе числа κ_0 (и при $\kappa \geq \kappa_0$) следует неравенство

$$\begin{aligned} & \theta_1 \frac{\pi}{|\gamma|} \|\widehat{P}_\lambda^- \phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\| + \frac{b''\kappa}{\beta + R} \|\widehat{P}_\lambda^+ \phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\| \geq \\ & \geq (1 + \rho' \tilde{a}^{-1}) \left(\theta_2 \frac{\pi}{|\gamma|} \|\widehat{P}^- \phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\| + \frac{b''\kappa}{2(\beta + R)} \|\widehat{P}^+ \phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\| \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Из неравенств (15) и (16) получаем

$$\begin{aligned} & \|\widehat{P}^+ \widehat{D}(k + i\kappa e)\phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\| + \tilde{a} \|\widehat{P}^- \widehat{D}(k + i\kappa e)\phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\| \geq \\ & \geq \theta_2 \frac{\pi}{|\gamma|} \|\widehat{P}^- \phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\| + \frac{b''\kappa}{2(\beta + R)} \|\widehat{P}^+ \phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\|. \end{aligned}$$

Обозначим $b' = (1/2)(1 + \sigma)^{-1/2}b''$. Тогда

$$\begin{aligned} & \|\widehat{P}^+ \widehat{D}(k + i\kappa e)\phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\|^2 + a^2 \|\widehat{P}^- \widehat{D}(k + i\kappa e)\phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\|^2 \geq \\ & \geq (1 + \sigma)^{-1} (\|\widehat{P}^+ \widehat{D}(k + i\kappa e)\phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\| + \tilde{a} \|\widehat{P}^- \widehat{D}(k + i\kappa e)\phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\|)^2 \geq \\ & \geq c_5^2(A) \left(\left(\theta_3 \frac{\pi}{|\gamma|} \right)^2 \|\widehat{P}^- \phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\|^2 + \left(\frac{b'\kappa}{2(\beta + R)} \right)^2 \|\widehat{P}^+ \phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}\|^2 \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Если $N \in \Lambda^*$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то либо $2\pi|N - N'| > R$ для всех $N' \in \mathcal{K}_\beta^{\lambda_1}$, либо $2\pi|N - N''| > R$ для всех $N'' \in \mathcal{K}_\beta^{\lambda_2}$. Поэтому

$$\widehat{V}\phi^{\cup \mathcal{K}_\beta^\lambda} = \sum_\lambda \widehat{V}\phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}, \quad \widehat{D}(k + i\kappa e)\phi^{\cup \mathcal{K}_\beta^\lambda} = \sum_\lambda \widehat{D}(k + i\kappa e)\phi^{\mathcal{K}_\beta^\lambda}.$$

Если $N \in \bigcup_{\lambda} \mathcal{K}_{\beta}^{\lambda}$, то $(\widehat{D}(k + i\kappa e)\phi)_N = (\widehat{D}(k + i\kappa e)\phi^{\cup \mathcal{K}_{\beta}^{\lambda}})_N + (\widehat{V}\phi^{\mathcal{K}_{\beta} \setminus \cup \mathcal{K}_{\beta}^{\lambda}})_N$. Если $N \in \Lambda^* \setminus \bigcup_{\lambda} \mathcal{K}_{\beta}^{\lambda}$, то $(\widehat{D}(k + i\kappa e)\phi^{\cup \mathcal{K}_{\beta}^{\lambda}})_N = (\widehat{V}\phi^{\cup (\mathcal{K}_{\beta}^{\lambda} \setminus \tilde{\mathcal{K}}_{\beta}^{\lambda})})_N$. Из этих равенств (для каждого из знаков) следуют оценки

$$\begin{aligned}
& \|\widehat{P}^{\pm} \widehat{D}(k + i\kappa e)\phi\|^2 \geq \\
& \geq v(K) \sum_{N \in \bigcup_{\lambda} \mathcal{K}_{\beta}^{\lambda}} \|(\widehat{P}^{\pm} \widehat{D}(k + i\kappa e)\phi^{\cup \mathcal{K}_{\beta}^{\lambda}})_N + (\widehat{P}^{\pm} \widehat{V}\phi^{\mathcal{K}_{\beta} \setminus \cup \mathcal{K}_{\beta}^{\lambda}})_N\|^2 \geq \\
& \geq (1 - \delta) \|\widehat{P}^{\pm} \widehat{D}(k + i\kappa e)\phi^{\cup \mathcal{K}_{\beta}^{\lambda}}\|^2 - (1 - \delta) \|\widehat{P}^{\Lambda^* \setminus \cup \mathcal{K}_{\beta}^{\lambda}} \widehat{P}^{\pm} \widehat{V}\phi^{\cup (\mathcal{K}_{\beta}^{\lambda} \setminus \tilde{\mathcal{K}}_{\beta}^{\lambda})}\|^2 - \\
& \quad - (1 - \delta) \delta^{-1} \|\widehat{P}^{\cup \mathcal{K}_{\beta}^{\lambda}} \widehat{P}^{\pm} \widehat{V}\phi^{\mathcal{K}_{\beta} \setminus \cup \mathcal{K}_{\beta}^{\lambda}}\|^2 \geq \\
& \geq (1 - \delta) \|\widehat{P}^{\pm} \widehat{D}(k + i\kappa e)\phi^{\cup \mathcal{K}_{\beta}^{\lambda}}\|^2 - (1 - \delta^2) \delta^{-1} W^2 \|\phi^{\mathcal{K}_{\beta} \setminus \cup \tilde{\mathcal{K}}_{\beta}^{\lambda}}\|^2 \geq \\
& \geq (1 - \delta) \|\widehat{P}^{\pm} \widehat{D}(k + i\kappa e)\phi^{\cup \mathcal{K}_{\beta}^{\lambda}}\|^2 - \varepsilon \delta^{-1} W^2 \|\phi\|^2.
\end{aligned} \tag{18}$$

Положим $b = (1/2) \sqrt{(1 - \delta)(1 - \tilde{\varepsilon})} b'$. Для числа κ_0 будем предполагать, что $3(c'_5)^2 b^2 \times \kappa_0^2 \geq 2\tilde{\varepsilon} \delta^{-1} W_0^2 R^2$. Тогда из (17), (18) (учитывая, что $a \leq 1$, и принимая во внимание неравенства (8)) при $\kappa \geq \kappa_0$ получаем

$$\begin{aligned}
& \|\widehat{P}^+ \widehat{D}(k + i\kappa e)\phi\|^2 + a^2 \|\widehat{P}^- \widehat{D}(k + i\kappa e)\phi\|^2 \geq \\
& \geq (1 - \delta) c_5^2(A) \sum_{\lambda} \left(\left(\theta_3 \frac{\pi}{|\gamma|} \right)^2 \|\widehat{P}^- \phi^{\mathcal{K}_{\beta}^{\lambda}}\|^2 + \left(\frac{b' \kappa}{2(\beta + R)} \right)^2 \|\widehat{P}^+ \phi^{\mathcal{K}_{\beta}^{\lambda}}\|^2 \right) - \\
& \quad - \frac{2}{\delta} W^2 \tilde{\varepsilon} \|\phi\|^2 \geq \\
& \geq (1 - \tilde{\varepsilon}) c_5^2(A) \left(\left(\theta_4 \frac{\pi}{|\gamma|} \right)^2 \|\widehat{P}^- \phi\|^2 + (1 - \delta) \left(\frac{b' \kappa}{\beta + R} \right)^2 \|\widehat{P}^+ \phi\|^2 \right) - \\
& \quad - \frac{2}{\delta} W^2 \tilde{\varepsilon} (\|\widehat{P}^- \phi\|^2 + \|\widehat{P}^+ \phi\|^2) \geq \\
& \geq c_5^2(A) \left(\left(\theta \frac{\pi}{|\gamma|} \right)^2 \|\widehat{P}^- \phi\|^2 + \left(\frac{b \kappa}{\beta + R} \right)^2 \|\widehat{P}^+ \phi\|^2 \right).
\end{aligned}$$

Теорема 5 доказана.

3. Следующие теоремы являются следствием теоремы 5. При доказательстве теоремы 6 нужно воспользоваться равенством

$$\widehat{P}^{\pm}(k) \widehat{D}_0(k + i\kappa e) = \widehat{D}_0(k + i\kappa e) \widehat{P}^{\mp}(k)$$

и возможностью выбирать число $a \in (0, 1]$ сколь угодно малым. При доказательстве теоремы 7 (см. ниже) существенна произвольность выбора числа $\beta > 0$. Теорема 6 используется при доказательстве абсолютной непрерывности спектра периодического оператора Шредингера.

ТЕОРЕМА 6. Пусть (при фиксированных векторе $\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}$ и мере $\mu \in \mathcal{M}_h$, $h > 0$; $e = |\gamma|^{-1}\gamma$) $\tilde{\theta} \in [0, 1)$, $W_0 \geq 0$, $R \geq 1$ и $\beta > 0$. Тогда найдутся числа $c_8 = c_8(\tilde{\theta}, W_0) > 0$ и $\kappa_0 = \kappa_0(\tilde{\theta}, W_0, R, \beta) > 4\beta + 5R$ такие, что для всех векторов $k \in \mathbf{R}^n$: $(k, \gamma) = \pi$, всех $\kappa \geq \kappa_0$, всех непрерывных периодических с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, функций $\hat{V}^{(s)}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathcal{L}_M^{(s)}$, $s = 0, 1$, и $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$, для которых $A_0 = 0$ и выполнены условия (5)–(7), и всех вектор-функций $\phi \in \mathcal{H}(\mathcal{K}_\beta(k; \kappa))$ справедливо неравенство

$$\|\hat{D}^2(k + i\kappa e)\phi\| \geq \frac{c_8 \kappa}{\beta + R} \|\phi\|.$$

ТЕОРЕМА 7. Пусть (при фиксированных векторе $\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}$ и мере $\mu \in \mathcal{M}_h$, $h > 0$; $e = |\gamma|^{-1}\gamma$) $\tilde{\theta} \in [0, 1)$, $\theta \in (0, 1 - \tilde{\theta})$, $W_0 \geq 0$, $R \geq 1$, $\delta \in (0, 1]$. Тогда существуют числа $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\theta, W_0, \delta) \geq 1$ и $\kappa_0 = \kappa_0(\tilde{\theta}, \theta, W_0, R, \delta) > (4\mathcal{D} + 1)R$ такие, что для всех $k \in \mathbf{R}^n$: $(k, \gamma) = \pi$, всех $\kappa \geq \kappa_0$, всех непрерывных периодических с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, функций $\hat{V}^{(s)}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathcal{L}_M^{(s)}$, $s = 0, 1$, и $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$, для которых $A_0 = 0$ и выполнены условия (5)–(7), и всех вектор-функций $\phi \in \tilde{H}^1(K; \mathbf{C}^M)$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|\hat{D}(k + i\kappa e)\phi\|^2 &\geq \\ &\geq (1 - \delta) \left(c_5^2(A) \left(\theta \frac{\pi}{|\gamma|} \right)^2 \|\phi^{\mathcal{K}_{\mathcal{D}R}}\|^2 + v(K) \sum_{N \in \Lambda^* \setminus \mathcal{K}_{\mathcal{D}R}} G_N^2(k; \kappa) \|\phi_N\|^2 \right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $\theta < \theta' < 1 - \tilde{\theta}$, $\hat{V}_\nu^{(s)}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathcal{L}_M^{(s)}$, $s = 0, 1$, и $A_\nu: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$, $\nu \in \mathbf{N}$, – последовательности тригонометрических многочленов с решеткой периодов Λ , равномерно сходящиеся при $\nu \rightarrow +\infty$ к функциям $\hat{V}^{(s)}$ и A , $(A_\nu)_0 = 0$ при всех $\nu \in \mathbf{N}$; $\hat{V}_\nu = \hat{V}_\nu^{(0)} + \hat{V}_\nu^{(1)} - \sum (A_\nu)_j \hat{\alpha}_j$. Из теоремы 7 следует (т.к. $G_N(k; \kappa) \geq \pi |\gamma|^{-1}$, $N \in \Lambda^*$), что для всех достаточно больших ν найдутся числа $\kappa_0^{(\nu)} > 0$ такие, что для всех $k \in \mathbf{R}^n$: $(k, \gamma) = \pi$, всех $\kappa \geq \kappa_0^{(\nu)}$ и всех вектор-функций $\phi \in \tilde{H}^1(K; \mathbf{C}^M)$ справедливо неравенство

$$\|(\hat{D}_0(k + i\kappa e) + \hat{V}_\nu)\phi\| \geq c_5(A_\nu) \theta' \pi |\gamma|^{-1} \|\phi\|.$$

Выбрав достаточно большой индекс ν , отсюда получаем (при $\kappa \geq \kappa_0^{(\nu)}$) требуемое неравенство. Теорема 2 доказана.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\hat{V}^{(s)}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathcal{L}_M^{(s)}$, $s = 0, 1$, и $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$ – непрерывные периодические с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, функции. Предположим, что $A_0 = 0$ и для некоторых вектора $\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}$ ($e = |\gamma|^{-1}\gamma$) и меры $\mu \in \mathcal{M}_h$, $h > 0$, выполнено условие (6), где $\tilde{\theta} \in [0, 1)$. Тогда для любого $\delta \in (0, 1]$ найдутся числа $\beta = \beta(\gamma, h, \mu; \hat{V}, \delta) > 0$ и $\kappa_0 = \kappa_0(\gamma, h, \mu; \hat{V}, \delta) > 0$ такие, что для всех $k \in \mathbf{R}^n$:

$(k, \gamma) = \pi$, всех $\kappa \geq \kappa_0$ и всех вектор-функций $\phi \in \tilde{H}^1(K; \mathbf{C}^M)$ справедливо неравенство

$$\|\hat{D}(k + i\kappa e)\phi\|^2 \geq (1 - \delta) \left(c_5^2(A; \gamma, h, \mu)(1 - \tilde{\theta})^2 \left(\frac{\pi}{|\gamma|} \right)^2 \|\phi^{\mathcal{K}_\beta}\|^2 + \right. \\ \left. + v(K) \sum_{N \in \Lambda^* \setminus \mathcal{K}_\beta} G_N^2(k; \kappa) \|\phi_N\|^2 \right).$$

Теорема 8 также вытекает из теоремы 7, если воспользоваться равномерной аппроксимацией функций $\hat{V}^{(s)}$ и A тригонометрическими многочленами с решеткой периодов Λ .

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\hat{V}^{(s)}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathcal{L}_M^{(s)}$, $s = 0, 1$, и $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$ — непрерывные периодические с решеткой периодов $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, функции, при этом $A_0 = 0$ и для некоторых вектора $\gamma \in \Lambda \setminus \{0\}$ ($e = |\gamma|^{-1}\gamma$) и меры $\mu \in \mathcal{M}_h$, $h > 0$, выполнено условие (6), где $\tilde{\theta} \in [0, 1)$. Тогда найдутся числа $c_9 = c_9(\gamma, h, \mu; \hat{V}) > 0$ и $\kappa_0 = \kappa_0(\gamma, h, \mu; \hat{V}) > 0$ такие, что для всех $k \in \mathbf{R}^n$: $(k, \gamma) = \pi$, всех $\kappa \geq \kappa_0$ и всех вектор-функций $\phi \in \tilde{H}^1(K; \mathbf{C}^M)$ справедливо неравенство

$$\|\hat{D}(k + i\kappa e)\phi\|^2 \geq c_9 v(K) \sum_{N \in \Lambda^*} G_N^2(k; \kappa) \|\phi_N\|^2.$$

Список литературы

- [1] *M. Sh. Birman, T. A. Suslina.* The periodic Dirac operator is absolutely continuous. Preprint ESI № 603. Wien: The Erwin Schrödinger Internat. Inst. for Math. Phys., 1998.
- [2] *М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина.* Алгебра и анализ. 1997. Т. 9. № 1. С. 32–48.
- [3] *М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина.* Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. № 4. С. 1–36.
- [4] *Л. И. Данилов.* ТМФ. 1999. Т. 118. № 1. С. 3–14.
- [5] *Л. И. Данилов.* Спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом. III. Деп. в ВИНТИ 10.07.92. № 2252–В92. М.: ВИНТИ, 1992.
- [6] *A. Sobolev.* Absolute continuity of the periodic magnetic Schrödinger operator. Preprint ESI № 495. Wien: The Erwin Schrödinger Internat. Inst. for Math. Phys., 1997.
- [7] *М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина.* Алгебра и анализ. 1999. Т. 11. № 2. С. 1–40.
- [8] *Л. И. Данилов.* ТМФ. 1990. Т. 85. № 1. С. 41–53.
- [9] *Л. И. Данилов.* ТМФ. 1995. Т. 103. № 1. С. 3–22.
- [10] *Л. И. Данилов.* Спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом. VI. Деп. в ВИНТИ 31.12.96. № 3855–В96. М.: ВИНТИ, 1996.
- [11] *И. М. Гельфанд.* ДАН СССР. 1950. Т. 73. № 6. С. 1117–1120.
- [12] *L. E. Thomas.* Commun. Math. Phys. 1973. V. 33. P. 335–343.
- [13] *М. Рид, Б. Саймон.* Методы современной математической физики. Т. 4. М.: Мир, 1982.
- [14] *Л. И. Данилов.* Спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом. I. Деп. в ВИНТИ 12.12.91. № 4588–В91. М.: ВИНТИ, 1991.
- [15] *Л. И. Данилов.* Одно свойство целочисленной решетки в $\mathbf{R}^3$ и спектр оператора Дирака с периодическим потенциалом. Препринт. Свердловск: ФТИ УрО АН СССР, 1988.

Поступила в редакцию 29.VI.1999 г.,
после доработки 27.X.1999 г.