Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Кандирмаз, Н. Юналь, Когерентные состояния
для потенциала Хартмана, *ТМФ*, 2008, том 155, но-
мер 3, 439–452

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6221>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 12:50:13

© 2008 г.

Н. Кандирмаз*, Н. Юналь†

КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА ХАРТМАНА

Получены когерентные состояния для частицы в нецентральной потенциале Хартмана. Для этого задача преобразована к случаю четырех изотропных осцилляторов, эволюционирующих в параметрическом времени. Квантовые состояния для этих осцилляторов найдены с использованием континуального интегрирования по голоморфным координатам. Разложение амплитуд перехода дает когерентные состояния и их эволюцию в параметрическом времени для частицы в потенциале Хартмана. Когерентные состояния выведены также в параболических координатах путем рассмотрения амплитуд перехода между когерентными состояниями и собственными состояниями в конфигурационном пространстве.

Ключевые слова: потенциал Хартмана, нецентральные потенциалы, когерентные состояния в параметрическом времени, интеграл по траекториям.

1. ВВЕДЕНИЕ

Шредингер сначала вывел когерентные состояния для одномерного линейного гармонического осциллятора, а затем указал конструкцию локализованных неуширяющихся волновых пакетов для электронов в кулоновском потенциале [1]. Когерентные состояния представляют собой собственные состояния понижающего оператора для гармонического осциллятора. Собственные значения комплексны и для когерентных состояний зависят от времени. Средние значения координаты и импульса удовлетворяют классическим уравнениям движения. Когерентные состояния являются “наиболее классическими”, имеют минимальную неопределенность и не уширяются в физическом времени. Для когерентных состояний вероятности зависят от времени, поэтому такие состояния более полезны, чем стационарные при анализе зависящих от времени процессов и классического предела квантовых систем. Когерентные состояния использовались в теории квантовой электродинамики [2] и были названы состояниями Глаубера.

*Department of Physics, Mersin University, Mersin, Turkey.
E-mail: nkandirmaz@mersin.edu.tr

†Department of Physics, Akdeniz University, Antalya, Turkey.
E-mail: nuriunal@akdeniz.edu.tr

В работах [3], [4] был развит общий формализм построения когерентных состояний для различных потенциалов. В этих работах была сделана попытка построить когерентные состояния для понижающих операторов динамической группы симметрии физической системы. Поскольку генераторы динамической группы симметрии задаются в терминах констант движения, средние значения этих генераторов и комплексные собственные значения понижающих операторов не зависят от времени.

В работе [5] были построены когерентные состояния с сохраняющимся зарядом для задачи Кеплера и показано, что эти состояния диспергируют. В указанной работе задача Кеплера была преобразована к задаче о четырех изотропных гармонических осцилляторах с использованием динамической симметрии задачи, представляющей собой $SU(2) \times SU(2)$ -симметрию, и построены собственные состояния понижающих операторов для этих осцилляторов. Эти состояния эволюционируют в физическом времени. Когерентные состояния с сохраняющимся зарядом отличаются от собственных состояний понижающих операторов для задачи Кеплера. В 1988 г. наблюдался радиально локализованный электронный волновой пакет [6]. В работе [7] временная эволюция в классической задаче Кеплера задавалась в терминах параметрического времени или эксцентрической аномалии.

С другой стороны, в работе [8] Кустанхеймо и Штифель (КШ) развили технику отображения для преобразования трехмерной классической задачи Кеплера к задаче о движении четырех изотропных гармонических осцилляторов, эволюционирующих в параметрическом времени. Это отображение является неголономным и сложным с технической точки зрения. Позднее преобразование КШ использовалось в работе [9] для решения задачи Кеплера с помощью фейнмановских интегралов по траекториям, причем (физическое) время было также введено как еще одна координата частицы. Недавно в работе [10] задача Кеплера была преобразована к задаче о четырех гармонических осцилляторах, эволюционирующих в параметрическом времени, с использованием квадратов параболических координат. В этой работе также рассматривались когерентные состояния для задачи Кеплера.

Фейнмановские интегралы по траекториям используются для вычисления амплитуд перехода между собственными состояниями в конфигурационном пространстве частиц. Мы вывели амплитуды перехода между собственными состояниями понижающего оператора линейного гармонического осциллятора и определили когерентные состояния в терминах этих амплитуд, используя дополнительную формулировку фейнмановских интегралов по траекториям [11]. Недавно когерентные состояния для задачи Кеплера были построены с использованием отображения КШ путем рассмотрения амплитуд переходов четырех гармонических осцилляторов между собственными состояниями понижающих операторов [12]. В указанной работе было показано, что средние значения координат электрона удовлетворяют законам Кеплера и осциллируют в параметрическом времени. Неопределенности не являются постоянными, но также осциллируют в параметрическом времени. Были построены когерентные состояния с положительной энергией; неопределенности для них диспергируют. Впоследствии эта техника применялась для вывода когерентных состояний частицы в потенциале Морса и в пятимерном кулоновском потен-

циале [13], [14]. Тогда же когерентные состояния из работы [10] были усовершенствованы за счет использования когерентных состояний с сохраняющимся зарядом, эволюционирующих в параметрическом времени [15], причем оказалось, что они совпадают с когерентными состояниями из работы [12].

Хартман предложил следующий нецентральный потенциал для модели кольцевых органических молекул таких, как циклические полиены и бензол [16]:

$$V(r, \theta) = -\frac{f}{r} + \frac{B}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (1)$$

Здесь $f = 2a_0\eta\sigma^2\varepsilon_0$, $B = q\varepsilon_0(a_0\eta\sigma)^2$, где a_0 – боровский радиус, ε_0 – энергия основного состояния атома водорода, q – вещественный параметр, а η и σ – положительные вещественные числа со значениями в интервале примерно от 1 до 10.

Цель данной работы – построить когерентные состояния в параметрическом времени для частицы в потенциале Хартмана (1) с помощью формализма интегралов по траекториям, предложенного в работе [12]. Вместо преобразования КШ мы используем квадраты параболических координат для преобразования к четырем изотропным гармоническим осцилляторам [17]. Чтобы представить радиальные осцилляторы в декартовых координатах, мы вводим две вспомогательные циклические координаты и сопряженные импульсы, используя множитель Лагранжа. Кроме азимутального угла и сопряженного импульса, физическое время и энергия также добавляются как координаты частицы, а когерентные состояния частицы описываются в параметрическом времени.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 обсуждается преобразование действия для классической частицы в потенциале Хартмана к действию для четырех изотропных гармонических осцилляторов. В разделе 3 выводятся когерентные состояния в терминах собственных состояний энергии четырех осцилляторов в параметрическом времени. В разделе 4 рассматриваются когерентные состояния в конфигурационном пространстве с использованием собственных состояний энергии системы в параболических координатах.

2. ДЕЙСТВИЕ ДЛЯ ЧАСТИЦЫ В ПОТЕНЦИАЛЕ ХАРТМАНА

Параболические координаты задаются как

$$\zeta = r \frac{1 - \cos \theta}{2}, \quad \eta = r \frac{1 + \cos \theta}{2}.$$

Сначала выразим $V(r, \theta)$ в параболических координатах (ζ, η, φ) :

$$V(\zeta, \eta) = -\frac{f}{\zeta + \eta} + \frac{B}{4\zeta\eta}. \quad (2)$$

Классический гамильтониан частицы можно записать в параболических координатах в виде

$$H(\zeta, \eta, \phi) = \frac{1}{2M(\zeta + \eta)}[\zeta p_\zeta^2 + \eta p_\eta^2] + \frac{1}{2M\eta\zeta}p_\phi^2 + V(\zeta, \eta). \quad (3)$$

Используя (3), запишем действие как

$$A = \int dt \left[p_\zeta \dot{\zeta} + p_\eta \dot{\eta} + p_\phi \dot{\phi} - \frac{1}{2M(\zeta + \eta)} (p_\zeta^2 \zeta + p_\eta^2 \eta) - \frac{1}{2M\eta\zeta} p_\phi^2 + \frac{f}{\zeta + \eta} - \frac{B}{4\zeta\eta} \right]. \quad (4)$$

Далее выполним следующее координатное преобразование в (4):

$$\zeta = \frac{1}{4}u^2, \quad \eta = \frac{1}{4}v^2, \quad 0 \leq u, v < \infty. \quad (5)$$

Это координатное преобразование влечет за собой следующее соотношение между канонически сопряженными импульсами:

$$p_u = \sqrt{\zeta} p_\zeta, \quad p_v = \sqrt{\eta} p_\eta. \quad (6)$$

Используя равенства (5) и (6), перепишем (4) в виде

$$A = \int dt \left\{ p_u \dot{u} + p_v \dot{v} + p_\phi \dot{\phi} - \frac{4}{u^2 + v^2} \left[\frac{1}{2M} \left(p_u^2 + p_v^2 + \frac{p_\phi^2 + 2MB}{u^2} + \frac{p_\phi^2 + 2MB}{v^2} \right) - f \right] \right\}. \quad (7)$$

В этом равенстве слагаемое

$$\frac{1}{2M} \left(p_u^2 + p_v^2 + \frac{p_\phi^2 + 2MB}{u^2} + \frac{p_\phi^2 + 2MB}{v^2} \right)$$

подобно гамильтониану частицы в четырехмерном пространстве. Чтобы вывести гамильтониан частицы в четырехмерном пространстве, введем в действие два вспомогательных импульса p_{ϕ_1} и p_{ϕ_2} с помощью множителей Лагранжа $d\phi_1/dt$ и $d\phi_2/dt$:

$$A = \int dt \left\{ p_u \dot{u} + p_v \dot{v} + p_\phi \dot{\phi} - \frac{4}{u^2 + v^2} \left[\frac{1}{2M} \left(p_u^2 + p_v^2 + \frac{p_{\phi_1}^2}{u^2} + \frac{p_{\phi_2}^2}{v^2} \right) - f \right] + \frac{d\phi_1}{dt} [p_{\phi_1} - \sqrt{p_\phi^2 + 2MB}] + \frac{d\phi_2}{dt} [p_{\phi_2} - \sqrt{p_\phi^2 + 2MB}] \right\}, \quad (8)$$

где ϕ_1 и ϕ_2 – канонически сопряженные вспомогательные координаты для азимутальных импульсов p_{ϕ_1} и p_{ϕ_2} . Положение частицы зададим в четырехмерных полярных координатах как $(\vec{u}, \vec{v})$, где

$$\vec{u} = (u_1, u_2) = u(\cos \phi_1, \sin \phi_1), \quad \vec{v} = (v_1, v_2) = v(\cos \phi_2, \sin \phi_2). \quad (9)$$

При этом, поскольку импульсы включают дополнительный негеометрический член $2MB$ в $\sqrt{p_\phi^2 + 2MB}$, не следует забывать, что ϕ_1 и ϕ_2 лежат в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Задача Кеплера обладает $SO(4)$ -симметрией при $B = 0$, и в этом случае можно преобразовать следующие члены в (8):

$$\begin{aligned} & \int dt \left\{ p_\phi \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\phi_2}{dt} (p_{\phi_2} - \sqrt{p_\phi^2}) + \frac{d\phi_1}{dt} [p_{\phi_1} - \sqrt{p_\phi^2}] \right\} = \\ & = \int dt \left\{ \frac{d\phi_2}{dt} p_{\phi_2} + p_\phi \left(\frac{d\phi}{dt} - \frac{d\phi_2}{dt} \right) + \frac{d\phi_1}{dt} [p_{\phi_1} - \sqrt{p_\phi^2}] \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь p_ϕ и p_{ϕ_2} – сохраняющиеся импульсы. Тогда можно проинтегрировать второе слагаемое в правой части равенства (10) и отождествить физическую координату ϕ со вспомогательной координатой ϕ_2 . Поэтому одной вспомогательной координаты ϕ_1 достаточно для задачи Кеплера; эта величина лежит в интервале $[0, 2\pi]$.

Чтобы исключить множитель $4/(u^2 + v^2)$ из (8), введем новый параметр времени s так, что

$$\frac{dt}{ds} = \frac{u^2 + v^2}{4}. \quad (11)$$

Добавим физическое время t к физическим координатам частицы и представим действие для частицы в терминах параметрического времени s . Перепишем действие в терминах параметрического времени:

$$\begin{aligned} A = \int ds \left\{ p_u \frac{du}{ds} + p_v \frac{dv}{ds} + \frac{d\phi_1}{ds} \left[p_{\phi_1} - \sqrt{p_\phi^2 + 2MB} \right] + \right. \\ \left. + \frac{d\phi_2}{ds} \left[p_{\phi_2} - \sqrt{p_\phi^2 + 2MB} \right] + (-p_0) \left(\frac{dt}{ds} - \frac{u^2 + v^2}{4} \right) + p_\phi \frac{d\phi}{ds} - \right. \\ \left. - \left[\frac{1}{2M} \left(p_u^2 + p_v^2 + \frac{p_{\phi_1}^2}{u^2} + \frac{p_{\phi_2}^2}{v^2} \right) - f \right] \right\}, \quad (12) \end{aligned}$$

где p_0 – еще один множитель Лагранжа, вводящий сопряженный импульс к физическому времени t . Мы здесь рассматриваем только случай $p_0 < 0$. Тогда действие (8) принимает вид

$$\begin{aligned} A = \int ds \left\{ p_{u_1} \frac{du_1}{ds} + p_{u_2} \frac{du_2}{ds} + p_{v_1} \frac{dv_1}{ds} + p_{v_2} \frac{dv_2}{ds} + \right. \\ \left. + p_\phi \frac{d\phi}{ds} + (-p_0) \frac{dt}{ds} - \frac{d\phi_1}{ds} \sqrt{p_\phi^2 + 2MB} - \frac{d\phi_2}{ds} \sqrt{p_\phi^2 + 2MB} - H_4 \right\}, \quad (13) \end{aligned}$$

где

$$H_4 = \frac{1}{2M} \left[p_{u_1}^2 + p_{u_2}^2 + p_{v_1}^2 + p_{v_2}^2 + \frac{(M\omega)^2}{2} (u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2) \right] - f, \quad (14)$$

а $\omega = \sqrt{-p_0/2M}$ – частота четырех изотропных осцилляторов. В силу того, что p_0 – константа движения, ω является постоянной. Поскольку p_0 и p_ϕ – сохраняющиеся величины, следующие слагаемые в (13) являются полными производными:

$$p_\phi \frac{d\phi}{ds} + (-p_0) \frac{dt}{ds} - \frac{d\phi_1}{ds} \sqrt{p_\phi^2 + 2MB} - \frac{d\phi_2}{ds} \sqrt{p_\phi^2 + 2MB}.$$

По этой причине рассмотрим их отдельно и обсудим действие системы четырех осцилляторов, имеющее вид

$$\begin{aligned} A_\omega = \int ds \left\{ p_{u_1} \frac{du_1}{ds} + p_{u_2} \frac{du_2}{ds} + p_{v_1} \frac{dv_1}{ds} + p_{v_2} \frac{dv_2}{ds} - \right. \\ \left. - \omega \left[\frac{p_{u_1}^2 + p_{u_2}^2 + p_{v_1}^2 + p_{v_2}^2}{2M\omega} + \frac{M\omega}{2} (u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2) + \frac{f}{\omega} \right] \right\}. \quad (15) \end{aligned}$$

Определим голоморфные координаты a как

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{M\omega}u_1 + i\sqrt{\frac{1}{M\omega}}p_{u_1} \\ \sqrt{M\omega}u_2 + i\sqrt{\frac{1}{M\omega}}p_{u_2} \\ \sqrt{M\omega}v_1 + i\sqrt{\frac{1}{M\omega}}p_{v_1} \\ \sqrt{M\omega}v_2 + i\sqrt{\frac{1}{M\omega}}p_{v_2} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Определим также сопряженные динамические переменные

$$a^\dagger = (a_1^*, a_2^*, a_3^*, a_4^*), \quad (17)$$

где

$$a_j^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{M\omega}u_j - i\sqrt{\frac{1}{M\omega}}p_{u_j} \right)$$

и

$$a_{j+2}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{M\omega}v_j - i\sqrt{\frac{1}{M\omega}}p_{v_j} \right), \quad j = 1, 2.$$

Теперь перепишем действие A_ω в терминах голоморфных координат a_j и a_j^* в виде

$$A_\omega[a^\dagger, s_b; a, s_a] = \int_{s_a}^{s_b} ds \left[\frac{1}{2i} \left(\frac{da^\dagger}{ds} a - a^\dagger \frac{da}{ds} \right) - \omega(a^\dagger a) \right] + f(s_b - s_a), \quad (18)$$

где мы опустили полные производные $(1/2) \sum_{j=1}^2 (p_{u_j} u_j + p_{v_j} v_j)|_{s_a}^{s_b}$ в действии A_ω .

В равенстве (13) H_4 является новым гамильтонианом, или энергией частицы с массой M в параметрическом времени s , при этом H_4 – константа движения в параметрическом времени со значением нуль, поскольку она пропорциональна $H - p_0$. Физическая энергия классической частицы имеет вид

$$p_0 = -2Mf^2 \left(\sum_{i=1}^4 a_i^\dagger a_i \right)^{-2}.$$

3. КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ЧЕТЫРЕХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Ядро системы четырех осцилляторов определено в работе [13]:

$$K_\omega^{(1)}(a_b^\dagger, s_b; a_a, s_a) = e^{i(f-2\omega)(s_b-s_a)} \times \\ \times \int \frac{Da^\dagger Da}{[2\pi i]^4} \exp \left\{ i \int_{s_a, a_a}^{s_b, a_b^\dagger} ds \left[\frac{1}{2i} \left(\frac{da^\dagger}{ds} a - a^\dagger \frac{da}{ds} \right) - \omega(a^\dagger a) \right] \right\}, \quad (19)$$

где мы положили $\hbar = 1$, а слагаемое 2ω в показателе экспоненты возникает из-за членов квантового упорядочения между операторами $\hat{a}^\dagger$ и $\hat{a}$. Эти операторы являются квантовыми вариантами классических голоморфных координат в (17) и (16) и

имеют коммутатор $[\hat{a}_j, \hat{a}_j^*] = 1$. Интегрируя теперь $a^\dagger$ и a в соответствии с методом, развитым в работе [11], переписываем ядро K_ω в виде

$$K_\omega^{(1)}(a_b^\dagger, s_b; a_a, s_a) = e^{i(f-2\omega)(s_b-s_a)} \exp\{a_b^\dagger a_a e^{-i\omega(s_b-s_a)}\}. \quad (20)$$

Ядро $K_\omega^{(1)}(a_b^\dagger, s_b; a_a, s_a)$ задает матричные элементы оператора эволюции частицы в параметрическом времени между собственными состояниями операторов $\hat{a}_j$. Другими словами, оно дает временную эволюцию собственных функций операторов $\hat{a}_i$ как функций координат a_j^* . Эти собственные функции соответствуют когерентным состояниям гармонических осцилляторов.

Координатное преобразование (5) является двузначным. Поэтому мы рассмотрим также ядро $K_\omega^{(1)}(-a_b^\dagger, s_b; a_a, s_a)$. Полный элемент перехода есть симметричная сумма этих двух ядер, коль скоро мы интересуемся бесспиновой частицей:

$$K_\omega(a_b^\dagger, s_b; a_a, s_a) = e^{i(f-2\omega)(s_b-s_a)} \times \\ \times \left\{ \exp[a_b^\dagger a_a e^{-i\omega(s_b-s_a)}] + \exp[-a_b^\dagger a_a e^{-i\omega(s_b-s_a)}] \right\}. \quad (21)$$

Можно представить ядро K_ω , разлагая экспоненты в фигурных скобках в (21) в степенной ряд по $a_b^\dagger a_a$ для каждого значения j :

$$K_\omega(a_b^\dagger, s_b; a_a, s_a) = e^{s_b-s_a} \sum_{n_1, 2, 3, 4=0}^{\infty} [1 + (-1)^{n_1+n_2+n_3+n_4}] \times \\ \times e^{-i[(n_1+n_2+n_3+n_4+2)\omega-f](s_b-s_a)} \prod_{j=1}^4 \frac{(a_{jb}^* a_{ja})^{n_j}}{\Gamma(n_j+1)}, \quad (22)$$

где $n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ есть четное число. Заметим, что зависимость собственных значений операторов $\hat{a}_j$ от параметрического времени имеет вид

$$a_j(s) = a_{ja} e^{-i\omega(s-s_a)}.$$

Параметризуем квантовые числа n_i в терминах радиальных и угловых квантовых чисел четырех осцилляторов n_r и m как

$$n_1 = (n_r)_1 + \frac{|m_1| + m_1}{2}, \quad n_2 = (n_r)_1 + \frac{|m_1| - m_1}{2}, \\ n_3 = (n_r)_2 + \frac{|m_2| + m_2}{2}, \quad n_4 = (n_r)_2 + \frac{|m_2| - m_2}{2}.$$

Обозначим конечное и начальное собственные состояния операторов $\hat{a}_i$ как $a_\pm$, $b_\pm$ и $\kappa_\pm$, $\lambda_\pm$ соответственно:

$$a_\pm = \frac{a_{1b} \pm ia_{2b}}{\sqrt{2}}, \quad b_\pm = \frac{a_{3b} \pm ia_{4b}}{\sqrt{2}}, \\ \kappa_\pm = \frac{a_{1a} \pm ia_{2a}}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_\pm = \frac{a_{3a} \pm ia_{4a}}{\sqrt{2}}. \quad (23)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 K_{\omega}(a_{\pm}^*, b_{\pm}^*, s; \kappa_{\pm}, \lambda_{\pm}, s_a) = \\
 = e^{s_b - s_a} \sum_{(n_r)_{1,2}=0}^{\infty} \sum_{m_{1,2}=-\infty}^{+\infty} e^{-2i[(n_r)_1 + |m_1|/2 + (n_r)_2 + |m_2|/2 + 1]\omega(s_b - s_a)} \times \\
 \times [1 + (-1)^{|m_1| + |m_2|}] \frac{(a_+^* \kappa_+)^{n_1} (a_-^* \kappa_-)^{n_2} (b_+^* \lambda_+)^{n_3} (b_-^* \lambda_-)^{n_4}}{D[(n_r)_1, m_1, (n_r)_2, m_2]}, \quad (24)
 \end{aligned}$$

где $D[(n_r)_1, m_1, (n_r)_2, m_2]$ задается формулой

$$D(n_1, n_2, n_3, n_4) = \Gamma(n_1 + 1)\Gamma(n_2 + 1)\Gamma(n_3 + 1)\Gamma(n_4 + 1).$$

При выводе соотношения (24) мы предполагаем, что ϕ_1 и ϕ_2 лежат в интервале $(-\pi, +\pi)$. Однако в физической задаче нет периодичности по ϕ_1 и ϕ_2 , которые лежат в интервале $(-\infty, +\infty)$. Если выполнить масштабные преобразования $\phi_j \rightarrow \frac{2\pi}{2L}\phi_j$ и $p_{\phi_j} \rightarrow \frac{2\pi}{2L}p_{\phi_j}$, $j = 1, 2$, и вычислить предел при $L \rightarrow \infty$ в (24), получим

$$\begin{aligned}
 K_{\omega}(a_{\pm}^*, b_{\pm}^*, s_b; \kappa_{\pm}, \lambda_{\pm}, s_a) = \\
 = \sum_{(n_r)_{1,2}=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dm_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dm_2 e^{-2i[(n_r)_1 + |m_1|/2 + (n_r)_2 + |m_2|/2 + 1 - f/2]\omega(s_b - s_a)} \times \\
 \times [1 + (-1)^{2(|m_1| + |m_2|)}] \frac{(a_+^* \kappa_+)^{n_1} (a_-^* \kappa_-)^{n_2} (b_+^* \lambda_+)^{n_3} (b_-^* \lambda_-)^{n_4}}{D[(n_r)_1, m_1, (n_r)_2, m_2]}; \quad (25)
 \end{aligned}$$

здесь K_{ω} – матричные элементы между симметричными когерентными состояниями четырех осцилляторов для оператора U эволюции по параметрическому времени. Тогда в терминах энергетических собственных состояний осцилляторов $|(n_r)_{1,2}, m_{1,2}\rangle$ имеем

$$\begin{aligned}
 K_{\omega}(a_{\pm}^*, b_{\pm}^*, s_b; \kappa_{\pm}, \lambda_{\pm}, s_a) = \sum_{(n_r)_{1,2}=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dm_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dm_2 \times \\
 \times \langle (n_r)_{1,2}, m_{1,2} | a_{\pm}, b_{\pm} \rangle^* \langle (n_r)_{1,2}, m_{1,2} | U(s_b - s_a) | \kappa_{\pm}, \lambda_{\pm} \rangle.
 \end{aligned}$$

Здесь $|a_{\pm}, b_{\pm}\rangle$ – конечное когерентное состояние, а $U(s_b - s_a) | \kappa_{\pm}, \lambda_{\pm} \rangle$ – временная эволюция начального когерентного состояния четырех симметричных осцилляторов. Они имеют вид

$$\begin{aligned}
 |a_{\pm}, b_{\pm}\rangle = \sum_{(n_r)_{1,2}=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dm_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dm_2 [1 + (-1)^{|m_1| + |m_2|}] \times \\
 \times \frac{(a_+)^{n_1} (a_-)^{n_2} (b_+)^{n_3} (b_-)^{n_4}}{\sqrt{D[(n_r)_1, m_1, (n_r)_2, m_2]}}, \quad (26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U(s_b - s_a)|\kappa_{\pm}, \lambda_{\pm}\rangle = \\
= \sum_{(n_r)_{1,2}=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dm_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dm_2 e^{-2i[(n_r)_1 + |m_1|/2 + (n_r)_2 + |m_2|/2 + 1 - f/2]\omega(s_b - s_a)} \times \\
\times [1 + (-1)^{|m_1| + |m_2|}] \frac{(\kappa_+)^{n_1} (\kappa_-)^{n_2} (\lambda_+)^{n_3} (\lambda_-)^{n_4}}{\sqrt{D[(n_r)_1, m_1, (n_r)_2, m_2]}}. \quad (27)
\end{aligned}$$

Чтобы вывести остальные физические условия на когерентные состояния, сначала рассмотрим интегрирование ядра по всем значениям s_b . Это дает функцию Грина четырех осцилляторов в виде

$$\begin{aligned}
G_{\omega}(a_{\pm}^*, b_{\pm}^*; \kappa_{\pm}, \lambda_{\pm}) = \\
= \sum_{(n_r)_{1,2}=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dm_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dm_2 \frac{i[1 + (-1)^{2|m_1| + 2|m_2|}]}{f - 2\omega[(n_r)_1 + |m_1| + (n_r)_2 + |m_2| + 1]} \times \\
\times \frac{(a_+^* \kappa_+)^{n_1} (a_-^* \kappa_-)^{n_2} (b_+^* \lambda_+)^{n_3} (b_-^* \lambda_-)^{n_4}}{D[(n_r)_1, m_1, (n_r)_2, m_2]}. \quad (28)
\end{aligned}$$

Функция Грина имеет полюсы при $f = 2\omega\tilde{n}$, где главное квантовое число $\tilde{n}$ равно

$$\tilde{n} = (n_r)_1 + \frac{1}{2}|m_1| + (n_r)_2 + \frac{1}{2}|m_2| + 1,$$

при этом собственные значения энергии частицы задаются формулой

$$p_0 = -\frac{Mf^2}{2\tilde{n}^2}. \quad (29)$$

Чтобы вывести функции Грина или матричные элементы оператора эволюции по физическому времени для физической частицы, исключим вспомогательные координаты ϕ_1 и ϕ_2 . Имеются два метода исключения: в формализме континуального интегрирования мы интегрируем по всем возможным конечным значениям этих переменных. В формализме волновой функции рассматриваются физические собственные значения соответствующего сопряженного импульса:

$$\hat{p}_{\phi_1} \Psi_{\text{phys}} = \pm \sqrt{m^2 + 2MB} \Psi_{\text{phys}}, \quad \hat{p}_{\phi_2} \Psi_{\text{phys}} = \pm \sqrt{m^2 + 2MB} \Psi_{\text{phys}}, \quad (30)$$

где m – азимутальное квантовое число, соответствующее оператору $\hat{p}_{\phi}$. Тогда функция Грина принимает вид

$$\begin{aligned}
G_{\omega}^{\text{phys}}(a_{\pm}^*, b_{\pm}^*; \kappa_{\pm}, \lambda_{\pm}) = \sum_{(n_r)_{1,2}=0}^{\infty} [1 + (-1)^{|m_1| + |m_2|}] \times \\
\times \frac{(a_+^* a_-^* \kappa_+ \kappa_-)^{(n_r)_1 + |m_1|} \left(\frac{a_+^*}{a_-^*} \frac{\kappa_+}{\kappa_-}\right)^{m_1} (b_+^* b_-^* \lambda_+ \lambda_-)^{(n_r)_2 + |m_2|} \left(\frac{b_+^*}{b_-^*} \frac{\lambda_+}{\lambda_-}\right)^{m_2}}{\sqrt{D[(n_r)_1, m_1, (n_r)_2, m_2]}},
\end{aligned}$$

где $|m_{1,2}| = \sqrt{m^2 + 2MB}$. Найдем физические когерентные состояния, вычислив $|a_{\pm}, b_{\pm}\rangle$ в полюсах величин $m_{1,2}$ и p_0 :

$$|a_{\pm}, b_{\pm}\rangle = \sum_{(n_r)_{1,2}=0}^{\infty} [1 + (-1)^{|m_1|+|m_2|}] \times \\ \times \frac{(a_+ a_-)^{(n_r)_1+|m_1|} \left(\frac{a_+}{a_-}\right)^{m_1} (b_+ b_-)^{(n_r)_2+|m_2|} \left(\frac{b_+}{b_-}\right)^{m_2}}{\sqrt{D[(n_r)_1, m_1, (n_r)_2, m_2]}} |(n_r)_{1,2}, m_{1,2}\rangle. \quad (31)$$

Здесь вновь $|m_{1,2}| = \sqrt{m^2 + 2MB}$, а когерентные состояния параметризованы тремя квантовыми числами $[(n_r)_1 + (n_r)_2 + 2\sqrt{m^2 + 2MB}]$, $[(n_r)_1 - (n_r)_2]$ и m .

4. ВЫВОД ЯДРА И КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ В КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В разделе 3 мы вывели формулу для ядра (матричного элемента оператора эволюции U) между когерентными состояниями. Чтобы вывести зависящую от конфигурационного пространства форму когерентных состояний, введем новое ядро, которое представляет собой матричный элемент оператора U между конечными собственными состояниями конфигурационного пространства и начальными когерентными состояниями. Соотношение между ядром (25) и этим ядром имеет вид

$$K_{\omega}(u, \phi_1, v, \phi_2; \kappa_{\pm}(s), \lambda_{\pm}(s)) = \int \frac{da_{\pm}^* da_{\pm}}{(2\pi i)^2} \int \frac{db_{\pm}^* db_{\pm}}{(2\pi i)^2} e^{-a_{\pm}^* a_{\pm} - b_{\pm}^* b_{\pm}} \times \\ \times \langle u, \phi_1 | a_{\pm} \rangle \langle v, \phi_2 | b_{\pm} \rangle K_{\omega}(a_{\pm}^*, b_{\pm}^*, s; \kappa_{\pm}, \lambda_{\pm}, s_a). \quad (32)$$

Матричные элементы $\langle u, \phi_1 | a_{\pm} \rangle$ и $\langle v, \phi_2 | b_{\pm} \rangle$ можно вычислить, используя представление для $a_{\pm}$ и $b_{\pm}$ в терминах u, ϕ_1, v, ϕ_2 и $p_u, p_{\phi_1}, p_v, p_{\phi_2}$ в формулах (16) и (17). Получаем

$$\langle u, \phi_1, v, \phi_2 | a_{\pm}, b_{\pm} \rangle = N(a, b) \times \\ \times \exp \left\{ -M\omega \frac{u^2 + v^2}{2} + 2\sqrt{M\omega} [u(a_+ e^{-i\phi_1} + a_- e^{i\phi_1}) + \right. \\ \left. + v(b_+ e^{-i\phi_2} + b_- e^{i\phi_2})] - \frac{a^2 + b^2}{2} \right\}, \quad (33)$$

где a^2 и нормировочная постоянная N равны

$$a^2 = a_+ a_- + a_- a_+, \quad N(a, b) = \left(\frac{M\omega}{\pi} \right)^2 e^{-(|a|^2 + |b|^2)/2}.$$

Подставим $\langle u, \phi_2, v, \phi_2 | a_{\pm}, b_{\pm} \rangle$ в (32) и проинтегрируем по $a_{\pm}^*, a_{\pm}$ и $b_{\pm}^*, b_{\pm}$. Результат имеет вид

$$K_{\omega}(u, \phi_1, v, \phi_2; \kappa_{\pm}, \lambda_{\pm}) = N(\kappa, \lambda) e^{-M\omega(u^2 + v^2)/2} \times \\ \times \exp \left\{ 2\sqrt{M\omega} [\kappa_+ e^{-i\phi_1} + \kappa_- e^{i\phi_1}) + \right. \\ \left. + v e^{-i\omega s} (\lambda_+ e^{-i\phi_2} + \lambda_- e^{i\phi_2})] - \frac{\kappa^2 + \lambda^2}{2} \right\}. \quad (34)$$

Чтобы вывести когерентные состояния частицы, рассмотрим интегралы по траекториям сопряженных переменных t и p_0 и ϕ и p_ϕ . Интегрирования по t и p_0 обобщаются в работе [12], по ϕ и p_ϕ – в работе [9], результаты имеют соответственно вид

$$\frac{1}{2\pi} \int dp_0 e^{i(-p_0)(t-t_a)}, \quad \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im(\phi-\phi_a)},$$

где m – азимутальное квантовое число частицы. Тогда ядро частицы может быть записано как

$$\begin{aligned} K_\omega[u, v, \phi, t; \kappa_\pm(s), \lambda_\pm(s), t_a, \phi_a] = \\ = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im(\phi-\phi_a)} \int \frac{dp_0}{2\pi} e^{i(-p_0)(t-t_a)} K_\omega[u, v; \kappa_\pm(s), \lambda_\pm(s)], \end{aligned}$$

где $K_\omega(u, v; \kappa_\pm, \lambda_\pm)$ будут выведены далее из $K_\omega(u, \phi_1, v, \phi_2; \kappa_\pm, \lambda_\pm)$ путем интегрирования по ϕ_1 и ϕ_2 .

Чтобы вывести когерентные состояния в параболических координатах, перепишем последнее равенство как

$$\begin{aligned} K_\omega(u, \phi_1, v, \phi_2; \kappa_\pm, \lambda_\pm) = N(\kappa, \lambda) e^{-M\omega(u^2+v^2)/2 - (\kappa^2+\lambda^2)/2} \times \\ \times \left\{ \exp \left[-4i \sqrt{\frac{M\omega u^2}{2}} (i\kappa)^2 \sin(\phi_1 + \delta_1) - 4i \sqrt{\frac{M\omega v^2}{2}} (i\lambda)^2 \sin(\phi_2 + \delta_2) \right] + \right. \\ \left. + \exp \left[4i \sqrt{\frac{M\omega u^2}{2}} (i\kappa)^2 \sin(\phi_1 + \delta_1) + 4i \sqrt{\frac{M\omega v^2}{2}} (i\lambda)^2 \sin(\phi_2 + \delta_2) \right] \right\}, \quad (35) \end{aligned}$$

где комплексные фазы δ_1 и δ_2 определяются равенствами

$$e^{-i\delta_1} = \frac{\kappa_2 - i\kappa_1}{\sqrt{\kappa_+ \kappa_- + \kappa_- \kappa_+}}, \quad e^{-i\delta_2} = \frac{\lambda_2 - i\lambda_1}{\sqrt{\lambda_+ \lambda_- + \lambda_- \lambda_+}}.$$

Тогда можно разложить ядро по функциям Бесселя:

$$\begin{aligned} K_\omega(u, \phi_2, v, \phi_2; \kappa_\pm, \lambda_\pm) = N(\kappa, \lambda) e^{-M\omega(u^2+v^2)/2 - (\kappa^2+\lambda^2)/2} \times \\ \times \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} [1 + (-1)^{|m_1|+|m_2|}] J_{m_1} \left(2\sqrt{\frac{M\omega(u)^2}{2}} (i\kappa)^2 \right) e^{-im_1(\phi_1+\delta_1)} \times \\ \times J_{m_2} \left(2\sqrt{\frac{M\omega(v)^2}{2}} (i\lambda)^2 \right) e^{-im_2(\phi_2+\delta_2)}. \quad (36) \end{aligned}$$

Здесь мы, во-первых, превращаем отрицательные значения m_1 и m_2 в положительные степени и, во-вторых, преобразуем интервал $(-\pi, +\pi)$ изменения переменных ϕ_1 и ϕ_2 к $(-\infty, +\infty)$. Тогда можно превратить суммирование в интегрирования по m_1 и m_2 . В третьих, выполним интегрирования по ϕ_1 и ϕ_2 , рассматривая множители

Лагранжа для p_{ϕ_1} и p_{ϕ_2} . В результате ядро принимает вид

$$K_{\omega}(u, v, ; \kappa_{\pm}, \lambda_{\pm}) = 2 \left(\frac{M\omega}{\pi} \right)^2 e^{-M\omega(u^2+v^2)/2} [1 + (-1)^{|m_1|+|m_2|}] \times \\ \times 2J_{|m_1|} \left(2\sqrt{\frac{M\omega u^2}{2}} (i\kappa)^2 \right) \tilde{N}(\kappa) e^{im_1\pi/2} \cos m_1 \left(\delta_1 + \frac{\pi}{2} \right) \times \\ \times 2J_{|m_2|} \left(2\sqrt{\frac{M\omega v^2}{2}} (i\lambda)^2 \right) \tilde{N}(\lambda) e^{im_2\pi/2} \cos m_2 \left(\delta_2 + \frac{\pi}{2} \right), \quad (37)$$

где

$$m_1^2 = m_2^2 = m^2 + 2MB.$$

Разложим функции Бесселя по присоединенным многочленам Лагерра [18]:

$$J_{\alpha}(2\sqrt{xz}) = e^{-z} (xz)^{\alpha/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n + \alpha + 1)} L_n^{\alpha}(x).$$

Функция Грина получается путем интегрирования ядра по параметрическому времени s :

$$G_{\omega}(u, v; \kappa_{\pm}, \lambda_{\pm}) = \int \frac{dp_0}{2\pi i} e^{i(-p_0)(t-t_a)} \times \\ \times \sum_{(n_r)_{1,2}=0}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{|m_1|+|m_2|}]}{\omega[(n_r)_1 + (n_r)_2 + |m_1|/2 + |m_2|/2 + 1] - f/2} \times \\ \times \Phi_{(n_r)_1, m_1}(u) \Omega(\kappa, \delta_1) \Phi_{(n_r)_2, m_2}(u) \Omega(\lambda, \delta_2), \quad (38)$$

где $\Phi_{(n_r)_i, m_i}(u)$ и $\Omega(\kappa, \delta_i)$ имеют вид

$$\Phi_{(n_r)_i, m_i}(u) = \frac{(\sqrt{2}M\omega/\pi)^{1/4} e^{-M\omega u^2/2} (\sqrt{M\omega u^2/2})^{|m_i|}}{\sqrt{\Gamma[(n_r)_i + |m_i| + 1]}} L_{(n_r)_i + |m_i|}^{|m_i|} \left(\frac{M\omega u^2}{2} \right), \\ \Omega(\kappa, \delta_i) = \frac{e^{im_i\pi/2} e^{-|\kappa|^2/2} (-\kappa^2)^{(n_r)_i + |m_i|/2}}{\sqrt{\Gamma[(n_r)_i + |m_i| + 1]}} \cos m_i \left(\delta_i + \frac{\pi}{2} \right).$$

Функция Грина G_{ω} является скалярным произведением когерентных состояний на энергетические собственные состояния в конфигурационном пространстве. отождествим ее с волновой функцией, зависящей от параболических координат и физического времени t , и обозначим ее как $\Psi_{\kappa, \lambda, m}(u, v, \phi; t)$:

$$\Psi_{\kappa, \lambda, m}(u, v, \phi; t) = \sum_{(n_r)_{1,2}=0}^{\infty} [1 + (-1)^{|m_1|+|m_2|}] e^{iMf^2/(2\tilde{n}^2)(t-t_a)} \times \\ \times \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{im\phi}}{2\pi} \psi_{(n_r)_1, m_1}(\xi) \Omega(\kappa, \delta_1) \psi_{(n_r)_2, m_2}(\eta) \Omega(\lambda, \delta_2), \quad (39)$$

где энергетические собственные состояния $\psi_{(n_r)_j, m_j}(\xi)$ суть

$$\psi_{(n_r)_j, m_j}(\xi) = \sqrt{\frac{2M}{\tilde{n}}} \frac{\sqrt{Mf/(2\tilde{n})} e^{-\sqrt{-2Mp_0}\xi} (\sqrt{-2Mp_0}\xi)^{|m_j|/2}}{\pi^{1/4} \sqrt{\Gamma[(n_r)_j + |m_j| + 1]}} L_{(n_r)_j + |m_j|}^{|m_j|} (\sqrt{-2Mp_0}\xi)$$

и

$$|m_1| = |m_2| = \sqrt{m^2 + 2MB}.$$

Атом водорода. Кулоновский потенциал имеет вид

$$V(r) = -\frac{f}{r}, \quad (40)$$

при этом $B = 0$; для атома водорода $f = Ze^2$, и система имеет динамическую $SO(4)$ -симметрию. Поэтому в этом случае когерентные состояния (39) можно записать как

$$\begin{aligned} \Psi_{\kappa, \lambda, m}(u, v, \phi; t) = 2 \sum_{(n_r)_{1,2}=0}^{\infty} e^{iMf^2(t-t_a)/(2n^2)} \times \\ \times \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{im\phi}}{2\pi} \psi_{(n_r)_1, m}(\xi) \Omega(\kappa, \delta_1) \psi_{(n_r)_2, m}(\eta) \Omega(\lambda, \delta_2), \end{aligned} \quad (41)$$

где главное квантовое число $\tilde{n} = (n_r)_1 + (n_r)_2 + |m| + 1$ становится целым, как и ожидалось.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели когерентные состояния с отрицательной энергией для частицы в несферическом потенциале Хартмана. Мы также вывели когерентные состояния для частицы в кулоновском потенциале и привели выражение для локализованных волновых функций в параболических координатах.

Средние значения динамических переменных (координат и импульсов) можно получить, используя когерентные состояния как функции параметрического времени (26). Центр локализованных состояний движется по конечным траекториям. Неопределенности конечны. Поскольку квантовые числа m_1 и m_2 и главное квантовое число $(n_r)_1 + |m_1|/2 + (n_r)_2 + |m_2|/2 + 1$ не являются целыми, эти траектории не замкнуты. Исключение составляет случай кулоновского потенциала: тогда имеем $m_1 = m_2 = m$, и траектории представляют собой кеплеровы эллипсы.

Мы не рассматриваем здесь когерентных состояний с положительной энергией. Их легко получить из когерентных состояний с отрицательной энергией (39) с помощью аналитического продолжения, которое рассматривается в работе [12]. При этом траектории неограничены, и неопределенности не являются конечными.

Когерентные состояния были получены для частицы в обобщенном потенциале Кулона и Ааронова–Бома, который является одним из возможных обобщений нецентрального потенциала Хартмана (см. работу [19]). В этой работе авторы рассматривают когерентные состояния для постоянных значений m , которые отличны от когерентных состояний, рассматриваемых в нашей работе, и соответствуют собственным значениям понижающих операторов $(n_r)_i + |m_i|/2$ при $i = 1, 2$. Эти операторы суть квадратичные комбинации понижающих и повышающих операторов из нашей работы.

Благодарности. Данная работа была поддержана Akdeniz University, Scientific Research Projects Unit (Research Contract no.2002.01.0105.002). Н. Юналь благодарен профессору Е. Авсару за многочисленные полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] E. Schrödinger, *Naturwissenschaften*, **14**:28 (1926), 664–666.
- [2] R. J. Glauber, *Phys. Rev. Lett.*, **10**:3 (1963), 84–86; *Phys. Rev.*, **130**:6 (1963), 2529–2539.
- [3] M. M. Nieto, L. M. Simmons Jr., *Phys. Rev. Lett.*, **41**:4 (1978), 207–210.
- [4] L. S. Brown, *Amer. J. Phys.*, **41**:4 (1973), 525–530.
- [5] D. Bhaumik, B. Dutta-Roy, G. Ghosh, *J. Phys. A*, **19**:8 (1986), 1355–1364.
- [6] A. ten Wolde, L. D. Noordam, A. Lagendijk, H. B. van Linden van den Heuvell, *Phys. Rev. Lett.*, **61**:18 (1988), 2099–2101.
- [7] Г. Голдстейн, *Классическая механика*, Наука, М., 1975.
- [8] P. Kustaanheimo, E. Stiefel, *J. Reine Angew. Math.*, **218** (1965), 204–219.
- [9] I. H. Duru, H. Kleinert, *Phys. Lett. B*, **84**:2 (1979), 185–188; *Fortschr. Phys.*, **30**:8 (1982), 401–435.
- [10] T. Toyoda, S. Wakayama, *Phys. Rev. A*, **59**:2 (1999), 1021–1024.
- [11] N. Ünal, *Found. Phys.*, **28**:5 (1998), 755–762.
- [12] N. Ünal, *Phys. Rev. A*, **63**:5 (2001), 2105; *Turk. J. Phys.*, **24**:3 (2000), 463–472.
- [13] N. Ünal, *Canad. J. Phys.*, **80** (2002), 875–881.
- [14] N. Ünal, “Path integration and coherent states for the 5D hydrogen atom”, *Fluctuating Paths and Fields*, Festschrift dedicated to Hagen Kleinert on the occasion of his 60th birthday, eds. W. Janke, A. Pelster, H.-J. Schmidt, World Scientific, River Edge, NJ, 2001, 73–81.
- [15] T. Toyoda, S. Wakayama, *Phys. Rev. A*, **64**:3 (2001), 2110.
- [16] H. Hartmann, *Theor. Chim. Acta*, **24**:2–3 (1972), 201–206.
- [17] B. P. Mandal, *Internat. J. Modern Phys. A*, **15**:8 (2000), 1225–1234.
- [18] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматлит, М., 1971.
- [19] Gh. E. Drăgănescu, C. Campigotto, M. Kibler, *Phys. Lett. A*, **170**:5 (1992), 339–343.

Поступила в редакцию 10.01.2007,
после доработки 14.06.2007