Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. Л. Луо, Мера сцепленности на основе наблюдаемых корреляций, *ТМФ*, 2008, том 155, номер 3, 453–462

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6222>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 15:13:12

© 2008 г.

Шунь-Лун Ло*

МЕРА СЦЕПЛЕННОСТИ НА ОСНОВЕ НАБЛЮДАЕМЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ

На основании рассмотрения квантовых состояний как коммуникационных каналов и использования наблюдаемых корреляций, количественно выражаемых взаимной информацией, введена иерархия мер сцепленности, которая в качестве частного случая включает сцепленность формирования. Приводится сравнение максимальной и минимальной мер и указаны концептуальные преимущества, которые имеет минимальная мера по сравнению со сцепленностью формирования. Выявлено любопытное свойство сцепленности формирования, состоящее в том, что она может превышать квантовую взаимную информацию, которая обычно рассматривается как теоретическая мера полных корреляций. Тем самым определяется положение сцепленности формирования в более широком сценарии, подчеркивается ее особенность в отношении ансамблей чистых состояний и вводится конкурирующее определение, обладающее внутренним информационным значением.

Ключевые слова: сцепленность, взаимная информация, наблюдаемые корреляции, сцепленность формирования.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования явления сцепленности начались в 30-х годах XX века с работы Эйнштейна, Подольского и Розена [1], подвергших сомнению полноту квантовой механики, а также с вероятностных исследований квантовых состояний Шредингера [2]. Хотя неравенства Белла были открыты в 60-х годах, причем связанные с ними теоретические и экспериментальные аспекты привлекали некоторый интерес [3], серьезное математическое изучение и исследование возможных физических применений явления сцепленности начались лишь полстолетия спустя, в рамках новых возникших направлений в теории квантовой информации, в которой сцепленность играет определяющую роль [4].

В последние годы имели место разнообразные исследования, касающиеся характеристики и количественного выражения сцепленности. В настоящее время имеются разнообразные определения меры сцепленности, такие как сцепленность формирования [5]–[8], дистиллируемая сцепленность [5], [7], [9], сцепленность относительной

*Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing, People's Republic of China. E-mail: luosl@amt.ac.cn

энтропии [10], отрицательность [11], сжатая сцепленность [12] и т.д. Прототипом всех этих понятий является сцепленность формирования, которая определяется для смешанного состояния ρ двух подсистем как

$$E(\rho) = \min_k \sum \lambda_k S(\text{tr}_a \rho_k), \quad (1)$$

где минимизация выполняется по отношению к любому представлению в виде ансамбля чистых состояний $\{\lambda_k, \rho_k\}$ для ρ (т.е. $\rho = \sum_k \lambda_k \rho_k$, и каждое состояние ρ_k является чистым), $S(\sigma) = -\text{tr} \sigma \ln \sigma$ – энтропия фон Неймана смешанного состояния σ , а tr_a обозначает частичный след по подсистеме с индексом a .

Фундаментальным и интригующим является предположение об аддитивности сцепленности формирования [13]. Несмотря на существенные усилия это свойство остается недоказанным. Ввиду этих неудач можно попробовать определить понятие сцепленности формирования в более широком контексте с целью выяснить степень естественности такого определения. Более того, из-за деликатной природы сцепленности и наличия многих ее типов [7], [9] никакая величина не может отразить все свойства сцепленности, и поэтому можно приветствовать появление как можно большего числа различных способов ее количественного выражения.

В данной работе, вдохновленной информационным подходом к квантовой механике Эверетта [14]¹⁾ и его недавними разнообразными применениями в квантовой теории информации, мы рассматриваем квантовые состояния как коммуникационные каналы и вводим семейство мер сцепленности в терминах *наблюдаемых корреляций*, количественно выражающихся максимальной взаимной информацией, которая может быть получена из локальных измерений. В этом семействе сцепленность формирования является максимальным элементом и выглядит самой любопытной. Более того, любой другой элемент этого семейства выглядит более внутренне присущей мерой сцепленности, чем сцепленность формирования, по крайней мере с коммуникационной точки зрения. В частности, мы подчеркиваем уникальную значимость минимального элемента этого класса в качестве меры сцепленности.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 вводится семейство мер сцепленности. В разделе 3 мы показываем, что сцепленность формирования является максимальным элементом этого семейства, и раскрываем особое свойство сцепленности формирования, демонстрируя, что она может превысить полные корреляции, и, таким образом, не может рассматриваться как истинная мера квантовых корреляций, если принять точку зрения, что полные корреляции хорошо измеряются квантовой взаимной информацией. В разделе 4 проиллюстрированы некоторые базисные свойства введенных нами мер сцепленности. Наконец, в разделе 5 мы приводим список задач, заслуживающих дальнейшего исследования, и сравниваем предположение об аддитивности сцепленности формирования с другим интуитивным предположением, изучая соотношения между квантовыми корреляциями и полными корреляциями.

¹⁾Замечательно, что Эверетт начал разрабатывать информационный подход к квантовой механике уже в 1957 г., отведя в нем фундаментальную роль теории Шэннона и представлениям Шмидта.

2. ИЕРАРХИЯ МЕР СЦЕПЛЕННОСТИ

Рассмотрим квантовое состояние ρ , общее для наблюдателей Алисы и Боба, с соответствующими редуцированными состояниями $\rho^a = \text{tr}_b \rho$ и $\rho^b = \text{tr}_a \rho$. Для использования возможностей корреляций состояний ρ наблюдатель Алиса выполняет локальное квантовое измерение $A = \{A_i\}$ (где A_i – операторы, действующие на подсистему наблюдателя Алисы, $\sum_i A_i^\dagger A_i = \mathbf{1}$), а наблюдатель Боб выполняет свое локальное измерение $B = \{B_j\}$. Поскольку $A_i \otimes \mathbf{1}$ коммутирует с $\mathbf{1} \otimes B_j$, порядок измерений не имеет значения. Эти измерения индуцируют два вероятностных распределения

$$p_i^a = \text{tr}(A_i \otimes \mathbf{1})\rho(A_i^\dagger \otimes \mathbf{1}), \quad p_j^b = \text{tr}(\mathbf{1} \otimes B_j)\rho(\mathbf{1} \otimes B_j^\dagger),$$

а полный эффект измерений A и B производит общее вероятностное распределение

$$p_{ij} = \text{tr}(A_i \otimes B_j)\rho(A_i^\dagger \otimes B_j^\dagger).$$

Очевидно, что $p^a = \{p_i^a\}$ и $p^b = \{p_j^b\}$ – маргинальные распределения $p = \{p_{ij}\}$.

Описанную картину можно рассматривать как коммуникационный канал: измерение наблюдателя Алисы сводится к приготовлению ансамбля, который кодирует его послание, а наблюдатель Боб пытается получить информацию о послании путем исследования ансамбля. Согласно теории Шэннона [15], [16], а также подходу Эверетта [14], фундаментальной и универсальной величиной, описывающей корреляции между результатами измерений Алисы и Боба, является классическая взаимная информация

$$I(\rho \mid A; B) = H(p^a) + H(p^b) - H(p),$$

где $H(\cdot)$ обозначает энтропию Шэннона вероятностного распределения. Для сравнения напомним, что квантовая взаимная информация в состоянии ρ определяется как

$$I_Q(\rho) = S(\rho^a) + S(\rho^b) - S(\rho).$$

Для максимизации наблюдаемых корреляций наблюдатели Алиса и Боб имеют произвол в выборе своих измерений, поэтому естественная мера количественного выражения корреляций есть

$$I(\rho) = \max_{A, B} I(\rho \mid A; B).$$

Эта мера представляет максимальные полные корреляции, которые можно извлечь из локальных измерений, и содержит как классические корреляции, связанные со смешиванием, так и квантовые корреляции, связанные со сцепленностью. Она не является ни выпуклой, ни вогнутой функцией от ρ , поскольку смешивание может увеличивать классические корреляции, хотя часто уменьшает квантовые корреляции, и суммарный эффект зависит от конкуренции этих двух противоположных тенденций²⁾. Мы называем $I(\rho)$ полными *наблюдаемыми* корреляциями, чтобы от-

²⁾ Чтобы показать, что функция $I(\cdot)$ не является ни выпуклой, ни вогнутой, рассмотрим систему кубитов для двух подсистем. Пусть сначала $|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$, $|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle \pm |01\rangle)$; если обозначить соответствующие операторы плотности как ρ_i , то $I(\rho_i) = 1$. Пусть $\rho = \frac{1}{4} \sum_i \rho_i$; тогда $\rho = \mathbf{1}/4$ и $I(\rho) = 0$. Следовательно, $I(\rho) < \frac{1}{4} \sum_i I(\rho_i)$, что показывает, что функция $I(\cdot)$ не может быть вогнутой. Далее, пусть $\rho_1 = |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0|$ и $\rho_2 = |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1|$ – два состояния в виде произведения и $\rho = (\rho_1 + \rho_2)/2$; тогда $I(\rho_1) = I(\rho_2) = 0$ и $I(\rho) = 1$. Таким образом, имеем $I(\rho) > (I(\rho_1) + I(\rho_2))/2$, что исключает возможность того, что функция $I(\cdot)$ выпуклая.

личить $I(\rho)$ от квантовой взаимной информации $I_Q(\rho)$, который представляет полные (теоретические) корреляции.

Для того чтобы выделить истинно квантовые корреляции (сцепленность) в состоянии ρ , наблюдатели Алиса и Боб должны попытаться исключить классические корреляции смешивания в состоянии ρ в такой степени, в какой это позволяет формализм квантовой механики. Поскольку смешанное состояние обычно возникает из ансамбля $\{\lambda_k, \rho_k\}$ как синтезированный объект $\rho = \sum_k \lambda_k \rho_k$, нужно минимизировать средние корреляции по всем таким ансамблям.

Пусть N – размерность всей системы. Для любого $n = 1, 2, \dots, N$ на основании приведенных выше рассуждений мы определим следующую величину как меру сцепленности:

$$E_n(\rho) = \min \sum_k \lambda_k I(\rho_k), \quad (2)$$

где минимизация проводится по всем возможным ансамблям $\{\lambda_k, \rho_k\}$, реализующим состояние ρ таким образом, что *ранг* каждой составной компоненты ρ_k не превосходит n . Ранг оператора является размерностью его образа.

Приведенная конструкция весьма похожа на определение сцепленности формирования. Обе являются выпуклыми оболочками. Важное различие состоит в том, что в случае $E_n(\cdot)$ мы исходим из меры полных корреляций, которая уже определена на всяком смешанном состоянии с внутренней информационной значимостью, тогда как для $E(\cdot)$ главным элементом является редуцированная энтропия фон Неймана, которая имеет отношение к корреляциям только для чистых состояний. Следовательно, у нас имеется больший произвол в выборе ансамблей и нет необходимости ограничиваться чистыми. В этом контексте следует заметить, что если мы по аналогии с выражением (2) переопределим сцепленность формирования путем взятия минимума (1) по более общим разложениям ρ , то, поскольку энтропия фон Неймана является вогнутой, мы не можем превзойти разложения по чистым состояниям, а следовательно, новое определение не будет отличаться от исходного.

Из определения следует, что

$$E_1(\cdot) \geq E_2(\cdot) \geq \dots \geq E_N(\cdot).$$

Таким образом, мы построили иерархию мер сцепленности, которая является достаточно интуитивной и простой, если игнорировать неясность, вызванную ранговым ограничением. Специальный интерес представляют собой два крайних случая: максимальная мера $E_1(\cdot)$ допускает только разложения по чистым состояниям, а минимальная мера $E_N(\cdot)$ в действительности допускает любые разложения по смешанным состояниям. В этих рамках представляется, что мера $E_N(\cdot)$ является концептуально более естественной, чем любая другая, в особенности $E_1(\cdot)$, в плане количественного выражения квантовых корреляций, поскольку априори нет причин для ограничения разложений чистыми состояниями. Представляется уместным называть меру $E_N(\cdot)$ *наблюдаемой сцепленностью*, поскольку она основана на наблюдаемых корреляциях.

3. СТАТУС СЦЕПЛЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ

Каково соотношение между сцепленностью формирования и приведенными выше мерами сцепленности? Оказывается, что $E_1(\cdot)$ тождественна сцепленности формирования $E(\cdot)$. Это, кстати, дает новую интерпретацию сцепленности формирования и в то же время помещает ее на один уровень с ее аналогами $E_n(\cdot)$, в особенности $E_N(\cdot)$.

Чтобы установить, что $E_1(\cdot) = E(\cdot)$, достаточно показать, что для любого чистого состояния $|\Phi\rangle$ для двух подсистем выполнено соотношение

$$I(|\Phi\rangle\langle\Phi|) = S(\text{tr}_a |\Phi\rangle\langle\Phi|). \quad (3)$$

В силу разложения Шмидта [4] любое чистое состояние можно записать в каноническом виде

$$|\Phi\rangle = \sum_i c_i |\phi_i^a\rangle \otimes |\phi_i^b\rangle,$$

где $S(\text{tr}_a |\Phi\rangle\langle\Phi|) = -\sum_i |c_i|^2 \ln |c_i|^2$. Здесь $\{|\phi_i^a\rangle\}$ и $\{|\phi_i^b\rangle\}$ – ортонормальные базисы для подсистем наблюдателей Алисы и Боба соответственно, а $\{c_i\}$ – константы, удовлетворяющие равенству $\sum_i |c_i|^2 = 1$. В частности, если наблюдатели Алиса и Боб выбирают свои измерения в виде $A = \{|\phi_i^a\rangle\langle\phi_i^a|\}$ и $B = \{|\phi_i^b\rangle\langle\phi_i^b|\}$ соответственно, то вероятности на выходе равны $p_i^a = p_i^b = p_{ii} = |c_i|^2$ и $p_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Таким образом, $I(\rho | A; B) = -\sum_i |c_i|^2 \ln |c_i|^2$ и, следовательно, $I(|\Phi\rangle\langle\Phi|) \geq S(\text{tr}_a |\Phi\rangle\langle\Phi|)$.

Остается доказать противоположное неравенство, которое в действительности было впервые высказано в качестве гипотезы Эвереттом (см. [14], с. 50) и которое легко вывести из известной границы Холево на доступную информацию. Мы будем следовать элегантному рассуждению Шумахера [17]. Для простоты обозначим $|\Phi\rangle\langle\Phi|$ через ρ . Заметим, что измерение Алисы можно интерпретировать как приготовление, которое кодирует классическое послание $\{i\}$ в ансамбле

$$\left\{ p_i^a = \text{tr}(A_i \otimes 1) \rho (A_i^\dagger \otimes 1), \quad \rho_i = \frac{1}{p_i^a} (A_i \otimes 1) \rho (A_i^\dagger \otimes 1) \right\}.$$

Но это *глобальный* ансамбль, и с точки зрения наблюдателя Боба по подсистеме наблюдателя Алисы следует взять след. Таким образом, получающийся ансамбль, который наблюдатель Боб может использовать, эквивалентен $\mathcal{E} = \{p_i, \text{tr}_a \rho_i\}$. Далее наблюдатель Боб выполняет свое измерение B для извлечения информации о классическом послании $\{i\}$ настолько хорошо, насколько он может. Доступную информацию $I_{\text{ac}}(\mathcal{E}; B)$ (см. [18]) можно выразить как $I(\rho | A; B)$, и далее по теореме Холево [18]–[20] имеем

$$\begin{aligned} I(\rho | A; B) &\leq S\left(\sum_i p_i^a \text{tr}_a \rho_i\right) - \sum_i p_i^a S(\text{tr}_a \rho_i) \leq \\ &\leq S\left(\sum_i p_i^a \text{tr}_a \rho_i\right) = S(\text{tr}_a \rho). \end{aligned}$$

Приведенное неравенство истинно для любых локальных измерений A и B , и, таким образом, в силу определения $I(\rho)$ имеем $I(\rho) \leq S(\text{tr}_a \rho)$, что есть в точности $I(|\Phi\rangle\langle\Phi|) \leq S(\text{tr}_a |\Phi\rangle\langle\Phi|)$. Тем самым мы доказали, что $E_1(\cdot)$ и $E(\cdot)$ тождественны.

В силу соотношения (3) все $E_n(\cdot)$ и $E(\cdot)$ совпадают на чистых состояниях, отвечающих требованию работы [21]. Можно было бы подозревать, что все эти меры тождественны сцепленности формирования $E(\cdot)$. Но как показывает следующий пример, это не может быть верным.

Возьмем гильбертовы пространства наблюдателей Алисы и Боба совпадающими с C^d (т.е. $\mathcal{H}_a = \mathcal{H}_b = C^d$ и, таким образом, $N = d^2$). Пусть

$$w = \theta \frac{P_-}{d_-} + (1 - \theta) \frac{P_+}{d_+}, \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

– состояние Вернера [6], [7], [22], [23]. Мы опустили указание на зависимость w от параметра θ для удобства дальнейших обозначений. Здесь P_- (P_+) – проекция на антисимметричное (симметричное) подпространство в $C^d \otimes C^d$, а $d_{\pm} = (d^2 \pm d)/2$. Известно, что при $\theta \geq 1/2$ выполнено равенство [6], [7], [23]

$$E(w) = H\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\theta(1 - \theta)}\right),$$

где $H(\theta) = -\theta \ln \theta - (1 - \theta) \ln(1 - \theta)$ – бинарная функция энтропии.

С другой стороны, в силу неравенства обработки данных (монотонность относительной энтропии) [20] имеем

$$I(w \mid A, B) = D(\{p_{ij}\} \mid \{p_i^a p_j^b\}) \leq D(w \mid w^a \otimes w^b) = S(w^a) + S(w^b) - S(w) = I_Q(w),$$

где $D(\cdot \mid \cdot)$ обозначает и классическую, и квантовую относительную энтропию, а p_{ij} , p_i^a , p_j^b – классические вероятности, индуцированные соответственно измерениями $A \otimes B$, A , B на состоянии w . Взяв максимум по отношению к измерениям A и B , получаем

$$I(w) \leq I_Q(w),$$

что в действительности выполнено также и для любого другого состояния, т.е. мы также имеем $I(\rho) \leq I_Q(\rho)$ для любого состояния ρ для двух подсистем.

Из $(U \otimes U)$ -инвариантности состояний Вернера заключаем, что редуцированные состояния имеют вид $w^a = w^b = \frac{1}{d} \mathbf{1}$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} I_Q(w) &= S(w^a) + S(w^b) - S(w) = 2 \ln d + d_- \frac{\theta}{d_-} \ln \frac{\theta}{d_-} + d_+ \frac{1 - \theta}{d_+} \ln \frac{1 - \theta}{d_+} = \\ &= \ln \frac{2d^2}{(d^2 - d)^\theta (d^2 + d)^{1 - \theta}} - H(\theta). \end{aligned}$$

Очевидно, что если $d \rightarrow \infty$, то первый член стремится к единице независимо от θ . Поэтому, если можно найти θ такое, что

$$1 - H(\theta) < H\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\theta(1 - \theta)}\right), \quad (4)$$

то для такого θ и достаточно большого $N = d^2$ будем иметь

$$E_N(w) \leq I(w) \leq I_Q(w) < E(w).$$

Заметим, что первое неравенство следует из того, что тривиальный ансамбль $\{w\}$ допустим при определении $E_N(\rho)$ (однако он в общем случае не допустим при определении $E_1(\rho)$). Прямая проверка показывает, что неравенство (4) выполнено при

$\theta \neq 0, 1/2, 1$. Таким образом, мы доказали, что $E_N(\cdot)$ и $E(\cdot)$ являются различными мерами сцепленности.

Мы показали, что сцепленность формирования может превышать квантовую взаимную информацию, т.е.

$$E(\rho) > I_Q(\rho)$$

для определенного состояния ρ . Если мы согласимся, что квантовая взаимная информация является теоретической верхней границей любой разумной меры корреляций (многие авторы предлагали измерять полные корреляции квантовой взаимной информацией, обосновывая это с различных точек зрения [24]), то при рассмотрении сцепленности формирования как разумной меры сцепленности возникает проблема: величина сцепленности, измеряемая сцепленностью формирования, может оказаться больше, чем полные корреляции, которые включают и классические корреляции, и сцепленность. Разумеется, эта особенность ограничена данным специальным контекстом характеристики корреляций в силу теории энтропии фон Неймана–Шэннона, и это не означает, что сцепленность формирования лишается своей значимости.

4. СВОЙСТВА МЕРЫ E_N

При сравнении всех мер сцепленности E_n становится ясно, что мера $E_1 = E$ является наиболее ограничительной, а E_N выделяется тем, что в действительности не налагает ограничений на разложения по ансамблям. Таким образом, разумно рассматривать E_N как естественную меру сцепленности с определенными теоретическими преимуществами перед сцепленностью формирования, по крайней мере с точки зрения наблюдаемых корреляций. Мера E_N имеет и другие привлекательные свойства, такие как ограниченность сверху величиной квантовой взаимной информации $I_Q(\rho)$:

$$E_N(\rho) \leq I(\rho) \leq I_Q(\rho).$$

У нас нет такого ограничения для других мер $E_n(\rho)$, особенно для сцепленности формирования, когда состояние ρ является смешанным. Следует подчеркнуть, что если условиться, что хорошая мера сцепленности в рамках теории энтропии фон Неймана–Шэннона должна быть ограничена квантовой взаимной информацией, то все другие меры E_n , в частности сцепленность формирования, будут исключены. Останется только мера E_N .

Наблюдаемая сцепленность E_N имеет следующие фундаментальные свойства.

1. $E_N(|\Phi\rangle\langle\Phi|) = S(\text{tr}_a \Phi)\langle\Phi|$ для любого чистого состояния $|\Phi\rangle$ для двух подсистем.
2. Мера $E_N(\cdot)$ выпукла. Это следует из природы ее определения как выпуклой оболочки.
3. $E_N(\rho) \geq 0$, причем $E_N(\rho) = 0$ тогда и только тогда, когда ρ сепарабельно.
4. Мера $E_N(\cdot)$ не может возрастать при локальных операциях в том смысле, что

$$E_N(M(\rho)) \leq E_N(\rho),$$

где $M(\rho) = \sum_{\mu} (M_{\mu} \otimes \mathbf{1}) \rho (M_{\mu}^{\dagger} \otimes \mathbf{1})$ при $\sum_{\mu} M_{\mu}^{\dagger} M_{\mu} = \mathbf{1}$, каждое M_{μ} является оператором на подсистеме наблюдателя Алисы.

Докажем последнее свойство. Пусть $\{A_i\}$ и $\{B_j\}$ – любые локальные измерения соответственно наблюдателей Алисы и Боба, производимые на состоянии $M(\rho)$; тогда индуцированные вероятности имеют вид

$$\begin{aligned} p_{i|M}^a &\equiv \text{tr}(A_i \otimes \mathbf{1})M(\rho)(A_i^\dagger \otimes \mathbf{1}) = \sum_{\mu} \text{tr}(A_i M_{\mu} \otimes \mathbf{1})\rho(M_{\mu}^\dagger A_i^\dagger \otimes \mathbf{1}), \\ p_{j|M}^b &\equiv \text{tr}(\mathbf{1} \otimes B_j)M(\rho)(\mathbf{1} \otimes B_j^\dagger) = \sum_{\mu} \text{tr}(M_{\mu} \otimes B_j)\rho(M_{\mu}^\dagger \otimes B_j) = \\ &= \text{tr}(\mathbf{1} \otimes B_j)\rho(\mathbf{1} \otimes B_j), \\ p_{i,j|M} &\equiv \text{tr}(A_i \otimes B_j)M(\rho)(A_i^\dagger \otimes B_j^\dagger) = \sum_{\mu} \text{tr}(A_i M_{\mu} \otimes B_j)\rho(M_{\mu}^\dagger A_i^\dagger \otimes B_j). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь локальные измерения $\{A_i M_{\mu}\}$ и $\{B_j\}$, выполняемые на ρ ; индуцированные вероятности имеют вид

$$\begin{aligned} p_{i\mu}^a &\equiv \text{tr}(A_i M_{\mu} \otimes \mathbf{1})\rho(M_{\mu}^\dagger A_i^\dagger \otimes \mathbf{1}), \\ p_j^b &\equiv \text{tr}(\mathbf{1} \otimes B_j)\rho(\mathbf{1} \otimes B_j^\dagger), \\ p_{i\mu,j} &\equiv \text{tr}(A_i M_{\mu} \otimes B_j)\rho(M_{\mu}^\dagger A_i^\dagger \otimes B_j^\dagger). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_{\mu} p_{i\mu}^a = p_{i|M}^a, \quad p_{j|M}^b = p_j^b, \quad \sum_{\mu} p_{i\mu,j} = p_{i,j|M}.$$

Теперь в силу неравенства Йенсена (см. [16], с. 29) имеем

$$\begin{aligned} I(\rho \mid \{A_i M_{\mu}\}, \{B_j\}) &= \sum_{i,\mu,j} p_{i\mu,j} \ln \frac{p_{i\mu,j}}{p_{i\mu}^a p_j^b} \geq \sum_{i,j} \left(\sum_{\mu} p_{i\mu,j} \right) \ln \frac{\sum_{\mu} p_{i\mu,j}}{\sum_{\mu} p_{i\mu}^a p_j^b} = \\ &= \sum_{i,j} p_{i,j|M} \ln \frac{p_{i,j|M}}{p_{i|M}^a p_{j|M}^b} = I(M(\rho) \mid \{A_i\}, \{B_j\}). \end{aligned}$$

Взяв максимум по отношению к измерениям $\{A_i\}$ и $\{B_j\}$, получаем $I(\rho) \geq I(M(\rho))$, откуда следует, что $E_N(\rho) \geq E_N(M(\rho))$.

Нам неизвестно, справедливо ли более сильное свойство убывания, чем $E_N(\rho) \geq \sum_{\mu} p_{\mu} E_N(\rho_{\mu})$ (хотя мы склонны думать, что оно справедливо). Здесь $p_{\mu} = \text{tr}(M_{\mu} \otimes \mathbf{1})\rho(M_{\mu}^\dagger \otimes \mathbf{1})$ и $\rho_{\mu} = \frac{1}{p_{\mu}}(M_{\mu} \otimes \mathbf{1})\rho(M_{\mu}^\dagger \otimes \mathbf{1})$. Неравенства такого типа часто (хотя и не всегда) принимаются как требование монотонности сцепленности [5], [25] и являются важным моментом, заслуживающим дальнейшего изучения.

Учитывая, что величина $I(\rho)$ количественно выражает полные наблюдаемые корреляции, естественно определить классические наблюдаемые корреляции $C(\rho)$, которые обязаны смешанному характеру состояния ρ , $C(\rho) = I(\rho) - E_N(\rho)$. При любом другом определении, включающем $I(\rho)$ и $E_n(\rho)$, в частности определении классических корреляций как разности $I(\rho) - E(\rho)$ (которая может оказаться отрицательной), мы столкнемся с трудностью определения $C(\rho)$. Ясно, что $C(\rho) \geq 0$, при этом $C(\rho) = 0$, если состояние ρ является чистым.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Итак, с использованием рассуждений об извлечении квантовых корреляций из наблюдаемой взаимной информации мы ввели семейство мер сцепленности, совпадающих со сцепленностью формирования на чистых состояниях (и, таким образом, редуцирующихся к энтропии сцепленности для таких состояний), но различающихся на смешанных состояниях. Сцепленность формирования максимальна в этом семействе и демонстрирует противоречащее интуиции поведение в том смысле, что может превышать полные корреляции, измеряемые квантовой взаимной информацией. Минимальная мера E_N представляется наиболее подходящей мерой сцепленности в пределах этого семейства, поскольку она в полной мере использует представления через ансамбли, допускаемые формализмом смешанных состояний для исключения классических корреляций смешивания.

Естественно возникает большое количество задач, заслуживающих дальнейших исследований. Прежде всего, можно ожидать, что E_N будет интерполировать между дистиллируемой сцепленностью и сцепленностью формирования; этот вопрос можно изучать в рамках мощного подхода работы [26]. Вторая задача – найти аналитические выражения (если таковые имеются) для E_N , по крайней мере для некоторых высокосимметричных состояний.

Третья и, по-видимому, самая важная задача – это изучение предположения об аддитивности E_N и соотношения между регуляризованными версиями E_N и E . Заметим, что регуляризованная сцепленность формирования (равная цене сцепленности) является абсолютно фундаментальной величиной, которая имеет операциональный смысл скорости конвертации максимально сцепленных состояний в другие сцепленные состояния [5]–[7]. Поскольку мы показали, что сцепленность формирования может превышать полные корреляции, измеряемые квантовой взаимной информацией, и поскольку из предположения об аддитивности сцепленности формирования следует, что сцепленность формирования $E(\cdot)$ и цена сцепленности $E_c(\cdot)$ совпадают [27], интересно совместно исследовать следующие два противоречащих друг другу предположения [28].

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. *Сцепленность формирования аддитивна.*

Это предположение часто принимается на веру и проверено во многих специальных случаях [13]. В частности, из предположения 1 следует, что $E(\rho) = E_c(\rho)$, и тем самым может случиться, что $E_c(\rho) > I_Q(\rho)$ для некоторого ρ .

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. *Цена сцепленности не превосходит квантовой взаимной информации, т.е. $E_c(\rho) \leq I_Q(\rho)$ для любого состояния ρ .*

Предположение 2 привлекательно тем, что если цена сцепленности является хорошей мерой квантовых корреляций (что весьма часто принимается на веру), то она не должна превосходить полных корреляций.

Эти два предположения несовместны в том смысле, что когда одно из них будет доказано, второе будет немедленно опровергнуто.

Благодарности. Данная работа выполнена при поддержке со стороны NSFC (грант № 10571166) и Science Fund for Creative Research Groups (грант № 10721101).

Список литературы

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Phys. Rev.*, **47** (1935), 777–780.
- [2] E. Schrödinger, *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **31** (1935), 555–563; **32** (1936), 446–452; *Naturwissenschaften*, **23** (1935), 807–812; 823–828; 844–849.
- [3] J. S. Bell, *Physics*, **1** (1964), 195; J. F. Clauser, A. Shimony, *Rep. Progr. Phys.*, **41** (1978), 1881–1927; A. Aspect, P. Grangier, G. Roger, *Phys. Rev. Lett.*, **47** (1981), 460–463.
- [4] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [5] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, W. K. Wootters, *Phys. Rev. A*, **54** (1996), 3824–3851.
- [6] W. K. Wootters, *Quantum Inf. Comput.*, **1** (2001), 27–44.
- [7] M. Horodecki, *Quantum Inf. Comput.*, **1** (2001), 3–26.
- [8] C. M. Caves, C. A. Fuchs, P. Rungta, *Found. Phys. Lett.*, **14** (2001), 199–212.
- [9] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, *Phys. Rev. Lett.*, **80** (1998), 5239–5242.
- [10] V. Vedral, M. B. Plenio, M. A. Rippin, P. L. Knight, *Phys. Rev. Lett.*, **78** (1997), 2275–2279; V. Vedral, M. B. Plenio, *Phys. Rev. A*, **57** (1998), 1619–1633.
- [11] G. Vidal, R. F. Werner, *Phys. Rev. A*, **65** (2002), 032314.
- [12] M. Christandl, A. Winter, *J. Math. Phys.*, **45** (2004), 829–840.
- [13] P. W. Shor, *Comm. Math. Phys.*, **246** (2004), 453–472; K. M. R. Audenaert, S. L. Braunstein, *Comm. Math. Phys.*, **246** (2004), 443–452.
- [14] H. Everett III, “The theory of the universal wavefunction”, *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics*, eds. B. S. DeWitt, N. Graham, Princeton University Press, Princeton, 1973, 3.
- [15] C. E. Shannon, *Bell System. Tech. J.*, **27** (1948), 379–423; 623–656.
- [16] T. M. Cover, J. A. Thomas, *Elements of Information Theory*, Wiley, New York, 1991.
- [17] B. Schumacher, “Information from quantum measurements”, *Complexity, Entropy and the Physics of Information*, Proc. Workshop (St. John’s College, Santa Fe, New Mexico, May 29–June 2, 1989), Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity, **VIII**, ed. W. H. Zurek, Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1990, 29.
- [18] R. Jozsa, D. Robb, W. K. Wootters, *Phys. Rev. A*, **49** (1994), 668–677.
- [19] A. S. Kholevo, *Problems Inform. Transmission*, **15:4** (1979), 247–253.
- [20] V. Vedral, *Rev. Modern. Phys.*, **74** (2002), 197–234.
- [21] S. Popescu, D. Rorhlich, *Phys. Rev. A*, **56** (1997), R3319–R3321.
- [22] R. F. Werner, *Phys. Rev. A*, **40** (1989), 4277–4281.
- [23] K. G. H. Vollbrecht, R. F. Werner, *Phys. Rev. A*, **64** (2001), 062307.
- [24] C. Adami, N. J. Cerf, *Phys. Rev. A*, **56** (1997), 3470–3483; L. Henderson, V. Vedral, *J. Phys. A*, **34** (2001), 6899–6905; H. Ollivier, W. H. Zurek, *Phys. Rev. Lett.*, **88** (2002), 017901; B. Groisman, S. Popescu, A. Winter, *Phys. Rev. A*, **72** (2005), 032317; B. Schumacher, M. D. Westmoreland, *Phys. Rev. A*, **74** (2006), 042305.
- [25] G. Vidal, *J. Modern. Opt.*, **47** (2000), 355–376.
- [26] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, *Phys. Rev. Lett.*, **84** (2000), 2014–2017.
- [27] P. M. Hayden, M. Horodecki, B. M. Terhal, *J. Phys. A*, **34** (2001), 6891–6898.
- [28] N. Li, S. Luo, *Phys. Rev. A*, **76** (2001), 032327.

Поступила в редакцию 2.02.2007