Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Об уточнении критерия сверхтекучести классической жидкости в нанотрубке, *ТМФ*, 2008, том 155, номер 3, 524–528

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6227>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 13:32:30

© 2008 г.

В. П. Маслов*

ОБ УТОЧНЕНИИ КРИТЕРИЯ СВЕРХТЕКУЧЕСТИ КЛАССИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ В НАНОТРУБКЕ

В задаче имеются большой параметр – число частиц N (вне конденсата) и малый параметр – постоянная Планка $\hbar$ (точнее, безразмерный параметр, содержащий $\hbar$ в числителе). Они оказываются связанными между собой для бозе-частиц. Точное решение уравнения в вариациях для бозе-системы в капилляре позволяет получить точные критерии, ограничивающие сверхтекучесть классической жидкости в капилляре.

Ключевые слова: постоянная Планка, конденсат, сверхтекучесть, нанотрубка.

Из предыдущей работы [1] следует, что число частиц в бозе-системе в квазиклассическом пределе имеет порядок

$$N_0 \sim \frac{\iint dp dq}{\hbar^3},$$

где интеграл по q берется по замкнутой трубке радиуса L_2 длины $2\pi L_1$, а по p – от нуля до величины, определяемой критической скоростью Ландау вдоль трубки. Если число частиц $N > N_0$, то в силу теорем 1 и 3 из работы [1] $N - N_0$ частиц выпадают в конденсат и могут быть исключены из рассмотрения. При этом подсчете мы пренебрегаем взаимодействием между частицами.

Рассмотрим достаточно узкую трубку, а значит,

$$N_0 \sim o\left(\frac{1}{\hbar^3}\right), \quad \text{т.е.} \quad \hbar \ll \frac{1}{\sqrt[3]{N_0}}. \quad (1)$$

Система уравнений, которая определяет асимптотическое при $N_0 \rightarrow \infty$ решение N_0 -частичного уравнения Шредингера для бозе-частиц с парным взаимодействием

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: v.p.maslov@mail.ru

$V(x_i - x_j)$, имеет вид [2]

$$\begin{aligned}\Omega\Phi(x, y) &= -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y)\Phi(x, y) + \\ &\quad + \iint dx' dy' (NV(N^{1/3}(x - y)) + NV(N^{1/3}(x' - y'))) \times \\ &\quad \times \Phi^+(x', y')\Phi(x, x')\Phi(y, y'), \\ \Omega\Phi^+(x, y) &= -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y)\Phi^+(x, y) + \\ &\quad + 2 \iint dx' dy' (NV(N^{1/3}(x - x')) + NV(N^{1/3}(y - y'))) \times \\ &\quad \times \Phi(x', y')\Phi^+(x, x')\Phi^+(y, y').\end{aligned}$$

Аналогично [2] через v_q обозначим коэффициенты разложения в ряд Фурье на торе (L_1, L_2, L_2) потенциала $NV(N^{1/3}x)$:

$$v_q = \frac{1}{L_1 L_2^2} \int_T e^{-iqx} NV(\sqrt[3]{N}(x)) dx, \quad v_{-q} = v_q. \quad (2)$$

Точным решением системы (2) являются функции

$$\begin{aligned}\Phi_{k_1, k_2}^+ &= \frac{1}{L_1 L_2^2} e^{-ik_1(x+y)} \cos(k_2(x - y)), \\ \Phi_{k_1, k_2} &= \frac{1}{L_1 L_2^2} \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{k_2, l} e^{ik_1(x+y)} e^{il(x-y)}\end{aligned} \quad (3)$$

с собственным значением $\Omega = \frac{\hbar^2}{m}(k_1^2 + k_2^2) + v_0 + v_{2k_2}$, где функция $\varphi_{k_2, l}$ имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi_{k_2, l} &= -\frac{b_l}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{b_l^2 - 1}, \\ b_l &= \frac{(h^2/m)(l^2 - k_2^2) - (v_0 + v_{2k_2})}{v_{l-k_2} + v_{l+k_2}},\end{aligned}$$

причем $b_l = b_{-l}$, $\varphi_{k_2, l} = \varphi_{k_2, -l}$. Вектор $\hbar k_1/m$ равен скорости течения бозе-системы вдоль капилляра, вектор k_2 – волновой вектор поперечной моды, $(k_1, k_2) = 0$, $k_1 = 2\pi(n_1/L_1, 0, 0)$, $k_2 = 2\pi(0, n_2/L_2, n_3/L_2)$, n_1, n_2, n_3 – целые числа.

Система уравнений в вариациях для (2) имеет вид

$$\begin{aligned}
 (\Omega - \lambda)F(x, y) &= -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y)F(x, y) + \\
 &+ 2N \iint dx' dy' \left(V(\sqrt[3]{N}(x - y)) + V(\sqrt[3]{N}(x' - y')) \right) \times \\
 &\times (G(x', y')\Phi(x, x')\Phi(y, y') + \Phi^+(x', y')F(x, x')\Phi(y, y') + \\
 &+ \Phi^+(x', y')\Phi(x, x')F(y, y')), \\
 (\Omega + \lambda)G(x, y) &= -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x + \Delta_y)G(x, y) + \\
 &+ 2N \iint dx' dy' \left(V(\sqrt[3]{N}(x - x')) + V(\sqrt[3]{N}(y - y')) \right) \times \\
 &\times (F(x', y')\Phi^+(x, x')\Phi^+(y, y') + \Phi(x', y')G(x, x')\Phi^+(y, y') + \\
 &+ \Phi(x', y')\Phi^+(x, x')G(y, y')).
 \end{aligned} \tag{4}$$

Решения системы уравнений в вариациях имеют вид

$$\begin{aligned}
 G_l(x, y) &= u_{1,l}(e^{i(-k_1+k_2)x+i(-k_1+l)y} + e^{i(-k_1+k_2)y+i(-k_1+l)x}) + \\
 &+ u_{2,l}(e^{i(-k_1-k_2)x+i(-k_1+2k_2+l)y} + e^{i(-k_1-k_2)y+i(-k_1+2k_2+l)x}), \\
 F_l(x, y) &= -v_{1,l}(e^{i(k_1+k_2)x+i(k_1+l)y} + e^{i(k_1+k_2)y+i(k_1+l)x}) - \\
 &- v_{2,l}(e^{i(k_1-k_2)x+i(k_1+2k_2+l)y} + e^{i(k_1-k_2)y+i(k_1+2k_2+l)x}) + \\
 &+ \sum_{l' \neq l, l+2k_2} w_{l,l'}(e^{i(k_1+k_2+l-l')x+i(k_1+l')y} + e^{i(k_1+k_2+l-l')y+i(k_1+l')x}),
 \end{aligned} \tag{5}$$

где $l \neq -k_2$, а числовые коэффициенты $u_{1,l}$, $u_{2,l}$, $v_{1,l}$, $v_{2,l}$, $w_{l,l'}$ определяются из бесконечной системы уравнений. Эта система уравнений содержит замкнутую подсистему из четырех уравнений для коэффициентов $u_{1,l}$, $u_{2,l}$, $v_{1,l}$, $v_{2,l}$, которая может быть записана в стандартном виде

$$\tilde{\lambda}X = MX, \tag{6}$$

где $\tilde{\lambda} = \lambda + \frac{\hbar^2}{m}(k_1, l)$, X – вектор-столбец вида

$$X = \begin{pmatrix} u_{1,l} \\ u_{2,l} \\ v_{1,l} \\ v_{2,l} \end{pmatrix}.$$

Уравнения (5), (6) приводят к матрице M , элементы которой имеют вид

$$M = \begin{pmatrix} B_l + \frac{v_{l-k_2}}{2} & \frac{v_{2k_2}+v_{l+k_2}}{2} & -\frac{v_{l+k_2}+v_{l-k_2}}{2} & 0 \\ \frac{v_{2k_2}+v_{l+k_2}}{2} & B_{l+2k_2} + \frac{v_{l+3k_2}}{2} & 0 & -\frac{v_{l+k_2}+v_{l+3k_2}}{2} \\ 2(v_0 + v_{l-k_2})\varphi_{k_2,l} & (v_{2k_2} + v_{l+k_2}) \times \\ & \times (\varphi_{k_2,l} + \varphi_{k_2,l+2k_2}) & -B_l - \frac{v_{l-k_2}}{2} & -\frac{v_{2k_2}+v_{l+k_2}}{2} \\ (v_{2k_2} + v_{l+k_2}) \times \\ \times (\varphi_{k_2,l} + \varphi_{k_2,l+2k_2}) & 2(v_0 + v_{l+3k_2})\varphi_{k_2,l+2k_2} & -\frac{v_{2k_2}+v_{l+k_2}}{2} & -B_{l+2k_2} - \frac{v_{l+3k_2}}{2} \end{pmatrix},$$

где

$$B_l = \frac{\hbar^2}{2m}(l^2 - k_2^2) + (v_{l-k_2} + v_{l+k_2})\varphi_{k_2,l} - \frac{v_{2k_2}}{2}.$$

В работе [3] получено точное решение соотношения (6). Именно, оно имеет вид

$$\lambda_{l,k_1k_2} = -\frac{\hbar^2}{m}(k_1, l) + \sqrt{\frac{\xi_{k_2,l} + \sqrt{\xi_{k_2,l}^2 - 4\eta_{k_2,l}}}{2}}, \quad (7)$$

где $\xi_{k,l}$, $\eta_{k,l}$ определяются ниже в (8)–(10).

Ниже для краткости k_2 обозначим через k . Разложение $\xi_{k,l}$ по $a = \hbar^2/2m$ имеет вид

$$\begin{aligned} \xi_{k,l} = & -\frac{1}{2}(v_{l+k} + v_{2k})(v_{l+3k} + v_{l-k} - 2v_{2k}) + \\ & + a(l^2(v_{l+3k} + v_{l-k} - 2v_{2k}) + k^2(3v_{l+3k} - 2v_{2k} - v_{l-k}) + 4(l, k)(v_{l+3k} - v_{2k})) + \\ & + 2a^2(l^4 + 5k^4 + 8((k, l))^2 + 2l^2k^2 + 4l^2(k, l) + 12k^2(k, l)), \end{aligned} \quad (8)$$

где (k, l) обозначает скалярное произведение векторов k и l , а вторая и четвертая степени k и l обозначают вторую и четвертую степени модулей этих векторов. Разложение $\eta_{k,l}$ по a имеет вид

$$\begin{aligned} \eta_{k,l} = & -\frac{a}{2}(l^2 + k^2 + 2(k, l))(v_{l+k} + v_{2k}) \times \\ & \times (2v_{l+3k}v_{l-k} - v_{l+3k}v_{2k} + v_{l+3k}v_{l+k} - v_{2k}v_{l-k} - 2v_{2k}v_{l+k} + v_{l+k}v_{l-k}) + \\ & + a^2\eta_{k,l}^{(2)} + a^3\eta_{k,l}^{(3)} + a^4\eta_{k,l}^{(4)}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \eta_{k,l}^{(2)} = & -8((l, k))^2v_{2k}v_{l-k} - 8((l, k))^2v_{l+k}v_{l-k} + 4k^2(l, k)(v_{2k})^2 - \\ & - 4k^2(l, k)(v_{l+k})^2 - \frac{3}{2}k^4v_{2k}v_{l-k} + 4l^2(l, k)(v_{2k})^2 - \frac{1}{2}l^4v_{l+k}v_{l+3k} - \\ & - \frac{1}{2}l^4v_{l+k}v_{l-k} - \frac{3}{2}l^4v_{2k}v_{l+3k} + \frac{5}{2}k^4v_{2k}v_{l+3k} - \frac{1}{2}k^4v_{l+k}v_{l+3k} - \\ & - l^4v_{2k}v_{l+k} - 2l^2k^2(v_{l+k})^2 - \frac{9}{2}k^4v_{l+k}v_{l-k} - 4l^2(l, k)(v_{l+k})^2 - \frac{3}{2}l^4v_{2k}v_{l-k} + \\ & + l^4v_{l-k}v_{l+3k} - 3k^4v_{l-k}v_{l+3k} + 3k^4v_{2k}v_{l+k} + 2l^2k^2(v_{2k})^2 + 2l^2k^2v_{l-k}v_{l+3k} - \\ & - 4l^2(l, k)v_{l+k}v_{l-k} - 4l^2(l, k)v_{2k}v_{l+k} - 4l^2(l, k)v_{2k}v_{l+3k} - 8l^2(l, k)v_{2k}v_{l-k} + \\ & + 4l^2(l, k)v_{l-k}v_{l+3k} - 12k^2(l, k)v_{l+k}v_{l-k} + 4k^2(l, k)v_{2k}v_{l+k} + \\ & + 4k^2(l, k)v_{2k}v_{l+3k} - 8k^2(l, k)v_{2k}v_{l-k} - 4k^2(l, k)v_{l-k}v_{l+3k} - \\ & - 5l^2k^2v_{2k}v_{l-k} + l^4(v_{2k})^2 - k^4(v_{l+k})^2 + k^4(v_{2k})^2 - 4((l, k))^2(v_{l+k})^2 + \\ & + 4((l, k))^2(v_{2k})^2 - l^2k^2v_{2k}v_{l+3k} - 2l^2k^2v_{2k}v_{l+k} - \\ & - 3l^2k^2v_{l+k}v_{l-k} + l^2k^2v_{l+k}v_{l+3k} - l^4(v_{l+k})^2, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
\eta_{k,l}^{(3)} = & 16k^2((l,k))^2v_{2k} - 16k^2((l,k))^2v_{l-k} + 20k^4(l,k)v_{2k} - 24k^4(l,k)v_{l-k} + \\
& + 4l^4(l,k)v_{l+3k} - -16l^2((l,k))^2v_{2k} + 16l^2((l,k))^2v_{l-k} - 5l^2k^4v_{l+3k} + \\
& + 2l^2k^4v_{2k} + 3l^2k^4v_{l-k} + l^4k^2v_{l+3k} - 12l^4(l,k)v_{2k} + 8l^4(l,k)v_{l-k} - 6l^4k^2v_{2k} + \\
& + 4k^4(l,k)v_{l+3k} + 5l^4k^2v_{l-k} - 8l^2k^2(l,k)v_{2k} - 8l^2k^2(l,k)v_{l+3k} + l^6v_{l+3k} - \\
& - 9k^6v_{l-k} + 6k^6v_{2k} + 3k^6v_{l+3k} + 16l^2k^2(l,k)v_{l-k} - 2l^6v_{2k} + l^6v_{l-k}, \\
\eta_{k,l}^{(4)} = & (l^4 + 2l^2k^2 + 4l^2(l,k) - 3k^4 - 4k^2(l,k))^2.
\end{aligned}$$

Покажем, что если $k = k_2$ такое, что $\hbar k_2 \ll 1$, то можно выбрать такое l , что решение λ_{l,k_1k_2} будет комплексным.

В самом деле, полагая $l = 2k_2$, из того факта, что v_l при $l \gg \sqrt[3]{N_0}$ стремится к нулю как $1/l^2$ (см. [2]), мы получим $v_{k_2} - 2v_{k_1} > 0$, а значит, $\xi_{k,l} < 0$. Кроме того, $2v_{5k_2} + v_{3k_2} < v_{2k}$, а значит, $\eta_{k,l} > 0$. Отсюда заключаем, что λ_{2k_2,k_1k_2} – комплексное число. Чтобы оно не было комплексным, необходимо, чтобы $\hbar k_2 \sim \text{const}$. Эту константу можно вычислить из условия действительности и положительности (7).

При $k_2 = 0$ мы получаем дисперсионное соотношение Боголюбова и необходимое условие на критическую скорость (условие Ландау). При $k_2 = 2\pi/L_2$ мы получаем необходимое условие на $L_2 \approx \hbar$ и критическую скорость в случае $k_2 \neq 0$.

Благодарности. Автор приносит благодарность Г. В. Ковалю за помощь в подсчете коэффициентов (8)–(10).

Список литературы

- [1] В. П. Маслов, *ТМФ*, **155**:2 (2008), 312–316.
- [2] В. П. Маслов, *ТМФ*, **153**:3 (2007), 388–408.
- [3] Д. С. Голиков, В. П. Маслов, *Матем. заметки*, **83**:2 (2008), 305–309.

Поступила в редакцию 17.03.2008