Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Долотин, А. Ю. Морозов, Ш. Р. Шакиров, A_∞ -структура на симплициальных комплексах, *ТМФ*, 2008, том 156, номер 1, 3–37

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6228>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 14:05:43

© 2008 г. В. В. Долотин*, А. Ю. Морозов*, Ш. Р. Шакиров*

A_∞ -СТРУКТУРА НА СИМПЛИЦИАЛЬНЫХ КОМПЛЕКСАХ

Рассмотрен дискретный (конечно-разностный) аналог дифференциальных форм, определенных на симплициальных комплексах, в частности, на триангуляциях гладких многообразий. На этих формах явно определяются различные операции, в том числе внешняя производная d и внешнее умножение $\wedge$. Дискретное внешнее умножение не обладает ассоциативностью, но удовлетворяет более общим соотношениям так называемой A_∞ -структуры. Эта структура включает в себя бесконечный набор операций, связанных соотношением нильпотентности $(d + \wedge + m + \dots)^n = 0$ второй степени: $n = 2$.

Ключевые слова: симплициальный комплекс, топология, дискретные внешние формы, бесконечность-структуры.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, в пространстве обыкновенных дифференциальных форм естественным образом определяются две основные операции – линейная внешняя производная (дифференциал де Рама) d и билинейное внешнее умножение форм $\wedge$. Они удовлетворяют следующей тройке квадратичных соотношений:

нильпотентность d : $d^2 = 0$, т.е. $d(df) = 0$ для любой формы f ;

правило Лейбница: $d\wedge + \wedge d = 0$, т.е. $d(f\wedge g) = df\wedge g + (-1)^{|f|} f\wedge dg$ для любых f, g ;

ассоциативность $\wedge$: $\wedge^2 = 0$, т.е. $(f\wedge g)\wedge h = f\wedge(g\wedge h)$ для любых f, g, h .

Эти соотношения можно записать в виде одного соотношения нильпотентности

$$(d + \wedge)^2 = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) часто используется как основное для построения топологических теорий поля [1]. Естественной деформацией условия (1) в BRST-BV-формализме [2] является A_∞ -структура [3], которая символически записывается как

$$(d + \wedge + m + \dots)^2 = (m^{(1)} + m^{(2)} + m^{(3)} + \dots)^2 = 0 \quad (2)$$

и содержит бесконечную последовательность k -линейных операций со всеми натуральными k . Внешняя производная $d = m^{(1)}$ и внешнее произведение $\wedge = m^{(2)}$

*Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: vd@itep.ru, morozov@itep.ru, shakirov@itep.ru

являются лишь первыми звеньями этой цепи. Более строго, (2) представляет собой бесконечный набор квадратичных соотношений

$$\sum_{\substack{k,l=1, \\ k+l=n+1}}^{\infty} m^{(k)}m^{(l)} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

то есть

$$d^2 = 0, \quad (4)$$

$$d \wedge + \wedge d = 0, \quad (5)$$

$$dm + md + \wedge^2 = 0 \quad (6)$$

и т.д. Неоднократно утверждалось (см., например, [4]), что A_∞ -структура является естественным свойством дискретного комплекса де Рама, т.е. она должна возникать при исследовании конечно-разностных форм на симплициальных комплексах [5], в частности, на триангуляциях многообразий. Несмотря на некоторый прогресс в изучении этой идеи (см. работы [6], [7]) она не привлекает того внимания, которого заслуживает, и явная реализация A_∞ -структуры все еще отсутствует. Если явная конструкция A_∞ -структуры на дискретных формах будет построена, то она может иметь дальнейшее обобщение на старшие степени нильпотентности в духе нелинейной алгебры [8]. Подобные обобщения, как ожидается, предоставят новые средства для исследований в самых различных приложениях, от топологии до теории струн.

Целью настоящей статьи является получение **явных** формул, описывающих дискретные формы на симплициальных комплексах, операции на пространстве дискретных форм и соотношения между ними. Данная реализация квадратичной A_∞ -структуры демонстрирует все преимущества явного описания и естественно обобщается на кубический случай $n = 3$ и старшие степени n .

2. ОСНОВНОЙ ПРИМЕР В РАЗМЕРНОСТИ 1

Мы начинаем изложение с простого примера дискретных форм и операций. Рассмотрим одномерное дискретное пространство, иначе говоря, граф. Такое пространство содержит набор точек (вершин), некоторые из которых соединены ребрами. Функция (0-форма) f определена на вершинах, а 1-форма ψ – на ребрах. В дальнейшем f_i – значение функции f на вершине i , а ψ_{ij} – значение формы ψ на ребре ij .

2.1. Дифференциал d . Внешняя производная (внешний дифференциал) от функции f – это 1-форма df , значение которой на ребре ij равно разности значений функции на концах ребра:

$$df_{ij} = f_j - f_i. \quad (7)$$

На одномерном пространстве дифференциал от 1-формы равен нулю. Поэтому тождество $d^2 = 0$ тривиально выполняется.

2.2. Внешнее произведение $\wedge$. Произведение двух функций имеет простой вид:

$$(f \wedge g)_i = f_i g_i \quad \text{для любого } i. \quad (8)$$

Естественное определение для произведения функции f и 1-формы ψ – это снова 1-форма, которая задается как

$$(f \wedge \psi)_{ij} = (\psi \wedge f)_{ij} = \frac{1}{2}(f_i + f_j)\psi_{ij} \quad \text{для любых } i, j. \quad (9)$$

На одномерном пространстве произведение двух 1-форм равно нулю.

2.3. Правило Лейбница $d\wedge + \wedge d = 0$. Операции d и $\wedge$ удовлетворяют обычному правилу Лейбница

$$d(f \wedge g) = df \wedge g + f \wedge dg. \quad (10)$$

В этом можно убедиться прямым вычислением (здесь f и g – это функции):

$$\begin{aligned} (d(f \wedge g))_{ij} &= (f \wedge g)_j - (f \wedge g)_i = f_j g_j - f_i g_i, \\ (df \wedge g)_{ij} &= \frac{1}{2}(df)_{ij}(g_i + g_j) = \frac{1}{2}(f_j - f_i)(g_i + g_j), \\ (f \wedge dg)_{ij} &= \frac{1}{2}(f_i + f_j)(dg)_{ij} = \frac{1}{2}(f_i + f_j)(g_j - g_i), \\ (f \wedge dg)_{ij} + (df \wedge g)_{ij} &= \frac{1}{2}(f_i + f_j)(g_j - g_i) + \frac{1}{2}(f_j - f_i)(g_i + g_j) = \\ &= f_j g_j - f_i g_i = (d(f \wedge g))_{ij}. \end{aligned}$$

Если определить дифференциал не только на функциях, но и на парах функций следующим формальным образом:

$$d(f, g) = -(df, g) - (f, dg), \quad (11)$$

то правило Лейбница (10) может быть представлено в одной из трех форм:

$$\begin{aligned} d(f \wedge g) - df \wedge g - f \wedge dg &= 0, \\ d(\wedge(f, g)) - \wedge(df, g + f, dg) &= 0, \\ (d \circ \wedge + \wedge \circ d)(f, g) &= 0 \end{aligned}$$

и, наконец, в наиболее простой форме

$$d \wedge + \wedge d = 0. \quad (12)$$

В этой статье мы будем часто использовать подобные обозначения. Назовем такую форму A_∞ -соотношений *краткой* в отличие от *развернутой* формы (10). Краткая форма записи, вытекающая из BRST-BV-формализма, очень удобна и с практической, и с теоретической точек зрения. Во-первых, поскольку старшие соотношения A_∞ -структуры становятся все более и более сложными, краткая форма значительно сокращает выкладки. Во-вторых, A_∞ -структура в этой форме допускает простую интерпретацию деформации дифференциала d с помощью операции $\wedge$ (см. п. 7.7).

2.4. Неассоциативность: $\wedge^2 \neq 0$. Дискретное произведение, вообще говоря, не является ассоциативным. Хотя $(f \wedge \psi) \wedge g = f \wedge (\psi \wedge g)$, для той же тройки в другом порядке $(f \wedge g) \wedge \psi \neq f \wedge (g \wedge \psi)$. В самом деле,

$$\begin{aligned} ((f \wedge \psi) \wedge g)_{ij} - (f \wedge (\psi \wedge g))_{ij} &= \frac{1}{2}(f \wedge \psi)_{ij}(g_i + g_j) - \frac{1}{2}(f_i + f_j)(\psi \wedge g)_{ij} = \\ &= \frac{1}{4}(f_i + f_j)\psi_{ij}(g_i + g_j) - \frac{1}{4}(f_i + f_j)\psi_{ij}(g_i + g_j) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

но

$$\begin{aligned} ((f \wedge g) \wedge \psi)_{ij} - (f \wedge (g \wedge \psi))_{ij} &= \frac{1}{2}((f \wedge g)_i + (f \wedge g)_j)\psi_{ij} - \frac{1}{2}(f_i + f_j)(g \wedge \psi)_{ij} = \\ &= \frac{1}{2}(f_i g_i + f_j g_j)\psi_{ij} - \frac{1}{4}(f_i + f_j)(g_i + g_j)\psi_{ij} = \\ &= \frac{1}{4}(f_i - f_j)(g_i - g_j)\psi_{ij} \neq 0, \end{aligned} \quad (14)$$

если только не выполняется $df = 0$ или $dg = 0$. Это чрезвычайно важный факт: как правило, дискретное умножение, удовлетворяющее правилу Лейбница, не является ассоциативным умножением.

Если мы формально определим умножение $\wedge$ не только на парах форм, но также на тройках (превращая тройки в пары),

$$\wedge(a, b, c) = (a, \wedge(b, c)) - (\wedge(a, b), c), \quad (15)$$

то

$$\begin{aligned} (a \wedge (b \wedge c) - (a \wedge b) \wedge c) &= \wedge(a, \wedge(b, c)) - \wedge(\wedge(a, b), c) = \\ &= \wedge(a, \wedge(b, c) - \wedge(a, b), c) = \wedge \circ \wedge(a, b, c) = \wedge^2(a, b, c). \end{aligned} \quad (16)$$

В таких обозначениях неассоциативность умножения просто означает, что $\wedge^2 \neq 0$. Это еще один пример краткой формы A_∞ -соотношений: упрощение происходит из-за того, что мы определяем операцию на более широком множестве аргументов.

2.5. Старшая операция m . Рассмотрим 3-линейную операцию m , которая тройке форм – функции f и двум 1-формам ψ и χ – ставит в соответствие 1-форму

$$m(f, \psi, \chi)_{ij} = m(f, \chi, \psi) = \frac{1}{8}(f_j - f_i)\psi_{ij}\chi_{ij}. \quad (17)$$

Выполняются следующие соотношения (не)ассоциативности:

$$\begin{aligned} (f \wedge \psi) \wedge g - f \wedge (\psi \wedge g) &= m(df, \psi, g) - m(f, \psi, dg) = 0, \\ (f \wedge g) \wedge \psi - f \wedge (g \wedge \psi) &= m(df, g, \psi) + m(f, dg, \psi) \neq 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Дополненные условиями $m(f, g, \psi)_i = m(f, \psi, g)_i = 0$, эти равенства предоставляют простейший возможный пример A_∞ -соотношения (6):

$$(d \circ m + m \circ d + \wedge \circ \wedge)(a, b, c) = 0, \quad (19)$$

где мы определили дифференциал на тройках форм:

$$d(a, b, c) = (da, b, c) + (-1)^{|a|}(a, db, c) + (-1)^{|a|+|b|}(a, b, dc).$$

Степень функции $|f| = 0$, а для 1-формы $|\psi| = 1$. Развернутая форма (19) такова: для любых трех форм a, b, c

$$dm(a, b, c) + m(da, b, c) + (-1)^{|a|}m(a, db, c) + (-1)^{|a|+|b|}m(a, b, dc) = ((a \wedge b) \wedge c - a \wedge (b \wedge c)). \quad (20)$$

Этот пример прост потому, что в размерности 1 присутствуют только 0-формы и 1-формы. Однако уже на этом примере можно наблюдать дискретную неассоциативность. Неассоциативность – не изолированное явление, она является элементом A_∞ -структуры в алгебре дискретных операций. Неассоциативность полностью описывается операцией $m^{(3)}$: вместо тождества $\wedge^2 = 0$ выполняется более сложное тождество $\wedge^2 = -dm - md$.

Последующие разделы статьи посвящены обобщению этого примера на произвольные формы на произвольных симплициальных комплексах.

3. ЛОГИКА И ПЛАН ИЗЛОЖЕНИЯ

В данной статье изложение происходит в четыре шага.

3.1. Симплициальные комплексы, формы и операции. *На первом шаге* в разделе 4 мы вводим три важнейших в дискретных вычислениях операции: нильпотентный дифференциал $m^{(1)} = d$, сопряженный ему кодифференциал $\partial = d^\dagger$ и дискретное внешнее умножение $m^{(2)} = \wedge$. Эти операции действуют на пространстве $\Omega_*(M)$ дискретных форм на упорядоченном симплициальном комплексе M . Комплекс M можно рассматривать как эквидистантную триангуляцию многообразия (возможно, сингулярную) или просто как гипертреугольную решетку в произвольной размерности. Некоторые определения в разделе 4 будут даны в форме, которая допускает естественное обобщение, в особенности обобщение на старшие нильпотенты d_n :

$$d_n^n = 0. \quad (21)$$

В основной части статьи мы рассматриваем только квадратичный случай $d = d_2$. Детали для старших степеней $n > 2$ представлены в работе [9].

3.2. Формулировка задачи. *На втором шаге* в разделе 5 мы переходим к A_∞ -структуре. В настоящей статье мы не обсуждаем ее происхождение и скрытые смыслы, в том числе кохомологический аспект и BRST-BV-аспект. Наша цель – явное построение операций $m^{(p)}$ на симплициальном комплексе, при этом соотношение (2) будет использовано как **определяющее свойство** этих операций, а не как теорема, доказываемая для каких-то “естественных” операций. Для того чтобы использовать формулу (3) в таком качестве, мы переписываем ее как последовательность рекурсивных соотношений

$$dm^{(p)} + m^{(p)}d = \mathcal{M}^{(p)} \equiv - \sum_{q=2}^{p-1} m^{(q)}m^{(p+1-q)}, \quad p = 1, 2, \dots, \quad (22)$$

где $\mathcal{M}^{(1)} = \mathcal{M}^{(2)} = 0$, $\mathcal{M}^{(3)} = -\wedge^2$, $\mathcal{M}^{(4)} = -\wedge m^{(3)} - m^{(3)}\wedge$ и т.д.

Как только задача сформулирована, в первую очередь необходимо проверить ее корректность (самосогласованность). Для того чтобы существовало решение $m^{(p)}$ уравнения (22), необходимо, чтобы правая часть удовлетворяла условию

$$d\mathcal{M}^{(p)} = \mathcal{M}^{(p)}d. \quad (23)$$

Это условие самосогласованности доказывается в п. 5.4.

Если условие (23) выполняется, решение (22) может существовать, однако оно не обязано быть единственным. Оказывается, что решений (A_∞ -структур на симплицальном комплексе) бесконечно много. В данной работе мы получаем два конкретных решения. Первое (наивное) решение рассматривается в разделе 6. Оно является наиболее простым решением, но обладает некоторыми неприятными свойствами. Второе решение, рассматриваемое в разделе 7, более сложно по построению, но имеет вполне удовлетворительные свойства. Это третий и четвертый шаги соответственно. Разберем эти шаги подробнее.

3.3. Наивное решение при помощи K -оператора. На третьем шаге в разделе 6 мы решаем уравнение (22) с использованием оператора K [10], основное свойство которого таково:

$$dK + Kd = I. \quad (24)$$

Такой оператор существует, если d когомологически тривиален. Даже для топологически тривиальных комплексов это условие, строго говоря, нарушается на уровне 0-форм (поскольку у диска есть нулевые когомологии), и мы используем специальный прием – постулируем, что

$$\partial(\text{точки}) = \emptyset \neq 0,$$

чтобы избавиться от необходимости рассматривать 0-формы отдельно. Тем самым устраняются нулевые группы когомологий диска. Основной способ построения K -операторов состоит в том, что K -оператор может быть построен из любого оператора α , если соответствующий “оператор Лапласа” $\Delta_\alpha \equiv d\alpha + \alpha d$ обратим:

$$K_\alpha = \frac{1}{\Delta_\alpha} \alpha. \quad (25)$$

В большинстве приложений выбирается оператор $\alpha = \partial$, так что $\Delta_\partial = d\partial + \partial d$, или Δ является обычным оператором Лапласа.

Через K_∂ можно выразить решение уравнения (22):

$$m^{(p)} = K_\partial \mathcal{M}^{(p)} = \frac{1}{\Delta} \partial \mathcal{M}^{(p)}. \quad (26)$$

Это и есть наше “наивное” решение. Это в самом деле решение, потому что

$$dm^{(p)} \stackrel{(26)}{=} dK \mathcal{M}^{(p)} \stackrel{(24)}{=} \mathcal{M}^{(p)} - K d\mathcal{M}^{(p)} \stackrel{(23)}{=} \mathcal{M}^{(p)} - K \mathcal{M}^{(p)} d \stackrel{(26)}{=} \mathcal{M}^{(p)} - m^{(p)}d, \quad (27)$$

как того требует (22).

Для каждого конкретного симплициального комплекса M уравнение (26) представляет собой явную формулу. Более того, для конечного комплекса M (с конечным числом $\#(M)$ вершин) любой оператор представляется конечномерной матрицей, следовательно, удовлетворяет некоторому алгебраическому уравнению конечной степени. Значит, обратный оператор Δ^{-1} , когда он существует, является полиномом конечной степени от Δ , что делает его вычисление несложной задачей.

Уравнение (26) предоставляет вполне приемлемые формулы для комплекса M , состоящего из единственного (замкнутого) симплекса. Дело в том, что на таком комплексе оператор Лапласа тривиален,

$$\Delta|_{\text{simplex}} = \text{const} = \dim(M) + 1. \quad (28)$$

Однако в общем случае Δ^{-1} задается нелокальным выражением, которое весьма замысловатым образом зависит от симплициального комплекса M : небольшое изменение комплекса, скажем, добавление лишнего симплекса где-то на границе, существенно меняет все формулы. Поэтому, несмотря на то что (26) формально решает задачу, это решение оказывается не вполне удовлетворительным; можно построить другое решение, которое является локальным, т.е., грубо говоря, не зависит от структуры комплекса M вне того симплекса, где вычисляется результат операции $m^{(p)}$. Такое локальное решение существует, но его построение более сложно и включает в себя несколько новых идей.

3.4. Локальное решение и локальный K -оператор. Построение локальных операций $m^{(p)}$ в разделе 7 – это **четвертый шаг**.

Первая идея нашего построения состоит в том, чтобы заменить (26) на

$$m^{(p)} = \mathcal{M}^{(p)} K_{\partial}. \quad (29)$$

Отличие заключается в том, что K -оператор в (26) действует на пространстве форм, т.е. на Ω_* , в то время как K -оператор в (29) действует на пространстве $\Omega_*^{\otimes p}$, т.е. на линейном пространстве наборов из p форм.

На этом этапе используется понятие *поднятия*, расширяющее действие операций $d, \partial, \wedge, \Delta$ и всех операций $m^{(p)}$ на большее число аргументов $\Omega_*^{\otimes p}$. Например,

$$\begin{aligned} d(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p) &\sim (d\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p) + (-1)^{|\omega_1|}(\omega_1, d\omega_2, \dots, \omega_p) + \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{|\omega_1| + \dots + |\omega_{p-1}|}(\omega_1, \omega_2, \dots, d\omega_p), \\ \partial(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p) &\sim (\partial\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p) + (-1)^{|\omega_1|}(\omega_1, \partial\omega_2, \dots, \omega_p) + \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{|\omega_1| + \dots + |\omega_{p-1}|}(\omega_1, \omega_2, \dots, \partial\omega_p), \end{aligned}$$

и даже

$$\Delta(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p) = (\Delta\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p) + (\omega_1, \Delta\omega_2, \dots, \omega_p) + (\omega_1, \omega_2, \dots, \Delta\omega_p). \quad (30)$$

Однако (29) немногим лучше, чем (26): это все еще нелокальное решение.

Настоящее преимущество решения (29) состоит в том, что оно допускает локальную модификацию: на пространстве $\Omega_*^{\otimes p}$ с $p \geq 2$ существует возможность локализовать операцию ∂ , полностью нелокальную на Ω_* . В п. 7.1 мы вводим локализованный оператор $[\partial]$, сопряженный оператор $[d]$ и связанные с ними модификации

оператора Лапласа

$$\Delta_{\text{loc}} = [d][\partial] + [\partial][d] \quad (31)$$

и K -оператора $[K] = [\partial]\Delta_{\text{loc}}^{-1}$. При этом операция

$$m^{(p)} = \mathcal{M}^{(p)}[K] = \mathcal{M}^{(p)} \frac{[\partial]}{\Delta_{\text{loc}}}, \quad (32)$$

действующая из $\Omega_*^{\otimes p}(M)$ в $\Omega_*(M)$, является локальным решением уравнений A_∞ -структуры. Обоснованию того, что это в самом деле решение, посвящен п. 7.5.

Решение (32) представляет интерес не только в силу свойства локальности. Локальный оператор Лапласа Δ_{loc} обладает целым рядом свойств, интересных с точки зрения линейной алгебры. Как проявление локальности имеем тот факт, что Δ_{loc} не зависит от топологии комплекса. Этот оператор фактически действует внутри конкретных симплексов, $\Delta_{\text{loc}} = \Delta_{\text{loc}}|_{\text{simplex}}$, но он не совпадает с $\Delta|_{\text{simplex}}$, не удовлетворяет (28) и даже (30). В то же время это замечательно простой оператор: его собственные значения образуют набор последовательных целых чисел, а собственные векторы – систему с ясной комбинаторной структурой. Следовательно, обращение этого оператора – простая вычислительная задача. Это делает (32) вполне явной формулой. Вычисления по этой формуле для каждого конкретного комплекса можно производить как непосредственно, так и с использованием программных комплексов Maple или Mathematica.

Естественно, примеры (17) и (18) воспроизводятся общей формулой (32) как частные случаи. Старшие операции описываются в п. 7.7. Более того, как объяснено в п. 7.7, вся A_∞ -структура целиком может рассматриваться как $\wedge$ -индуцированное сопряжение нильпотентного оператора d , и эта интерпретация имеет адекватное обобщение на старшие нильпотентные дифференциалы d_n .

Наконец, в приложении мы представляем набор явных результатов и вычислений с дискретными формами. Они включают в себя примеры дискретного дифференцирования, внешнего умножения, старших операций, операторов Лапласа и многое другое.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

4.1. Дискретное пространство. Симплициальным комплексом называется конечный набор множеств $M = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots\}$ таких, что если $\sigma \subset \sigma'$ и $\sigma' \in M$, то $\sigma \in M$. Элементарные множества σ называются симплексами данного комплекса. Комплекс можно представлять себе как “дискретное пространство” – набор вершин (точек, 0-симплексов), где некоторые пары вершин связаны ребрами (1-симплексами), некоторые тройки – треугольниками (2-симплексами), некоторые четверки – тетраэдрами (3-симплексами) и т.д. Естественно, простейший комплекс – это все подмножества набора из $N \geq 1$ точек. Такой комплекс называется замкнутым симплексом, или просто симплексом. Например, простой двумерный диск

$$D = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

является замкнутым симплексом, в то время как его геометрическая граница

$$\partial D = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

таковым не является, поскольку тройка точек 1, 2, 3 не соединена гранью.

Примерами симплициальных комплексов являются триангуляции непрерывных (гладких) многообразий. Следует заметить, однако, что это должны быть именно триангуляции, а не произвольные дискретизации. Например, решетки с гиперкубическими ячейками согласно нашему определению не являются симплициальными комплексами (поскольку диагональ квадрата не является его ребром). Такие решетки могут быть легко дополнены до триангуляции путем добавления диагоналей. Естественное, такое дополнение есть неоднозначная операция (диагональ в квадрате можно выбрать двумя способами). Независимость от конкретного выбора в таком контексте часто называют *флип-симметрией*.

Наконец, для наших целей необходимо ввести линейное упорядочение на множестве вершин комплекса. Линейное упорядочение – это функция $\text{ord}(\cdot)$, которая нумерует вершины x натуральными числами $\text{ord}(x)$. Для симплекса σ и вершины $x \in \sigma$ определим $\text{ord}(x \rightarrow \sigma)$ как число вершин $y \in \sigma$ таких, что $\text{ord}(y) \leq \text{ord}(x)$. Для любого симплекса σ и подсимплекса $\sigma' \subset \sigma$ в нем положим

$$\text{ord}(\sigma' \rightarrow \sigma) = -\frac{1}{2}|\sigma'|(|\sigma'| + 1) + \sum_{x \in \sigma'} \text{ord}(x \rightarrow \sigma). \quad (33)$$

Здесь, как обычно, $|\sigma|$ – размерность симплекса σ . Слагаемое $|\sigma'|(|\sigma'| + 1)/2$ добавлено, чтобы функция $\text{ord}(\sigma' \rightarrow \sigma)$ удовлетворяла нормировочному условию

$$\min_{|\sigma'|=\text{const}} \text{ord}(\sigma' \rightarrow \sigma) = 0. \quad (34)$$

Число $\beta_{\sigma' \rightarrow \sigma} = (-1)^{\text{ord}(\sigma' \rightarrow \sigma)} = \pm 1$ определяет четность вложения множества σ' в упорядоченное множество σ . В настоящей статье оно будет использовано для определения основных дискретных операций.

4.2. Дискретные формы. *Дискретная p -форма* на симплициальном комплексе M – это функция, определенная на его p -симплексах: 0-формы – это функции на вершинах, 1-формы – функции на ребрах, 2-формы – функции на треугольниках и т.д. Таким образом, мы имеем прямой дискретный (конечно-разностный) аналог гладких внешних форм, поскольку гладкая p -форма представляет собой функцию на всевозможных p -мерных подмногообразиях. Ее значение на конкретном подмногообразии равно интегралу по этому подмногообразию.

Симплексы можно формально складывать и умножать на число. В топологии такие линейные комбинации симплексов обычно называются цепями, а линейные функции на цепях – коцепями. Для описания дискретных форм естественно использовать коцепи. Однако дискретная форма ω может рассматриваться и как цепь $\omega = \sum_{\sigma \in M} \omega(\sigma) \sigma$. Это не должно приводить к недоразумениям: поскольку конечномерное линейное пространство всегда изоморфно пространству линейных функций на нем, обе точки зрения допустимы. Коцепное описание дискретных форм было использовано в разделе 2, в то время как большинство вычислений ниже будут производиться с цепями.

Широко распространенным подходом к дискретизации внешних форм является метод аппроксимации формами Уитни [6], [7]. В рамках этого подхода дискретные формы представляются некоторым множеством гладких форм (набором форм

Уитни), а дискретные операции (дискретный дифференциал, внешнее умножение и другие) переносятся из алгебры гладких форм. В данной статье мы изучаем предмет с принципиально другой точки зрения – мы рассматриваем дискретные формы сами по себе как линейные комбинации симплексов без привлечения каких бы то ни было аппроксимаций. Соответственно, мы работаем с дискретными формами и операциями в терминах (конечномерной) линейной алгебры.

4.3. Операции. Пусть $\Omega_*(M) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \Omega_m(M)$ – линейное пространство всех дискретных форм на симплицальном комплексе M . Это пространство естественным образом $\mathbb{Z}$ -градуировано на 0-формы Ω_0 , 1-формы Ω_1 и т.д. Пространство $\Omega_* \otimes \Omega_*$ мы будем называть пространством пар форм, $\Omega_* \otimes \Omega_* \otimes \Omega_*$ – пространством троек форм и т.д. Базис в $\Omega_*^{\otimes p}$ состоит из всевозможных наборов из p симплексов: к примеру, $\Omega_* \otimes \Omega_*$ натянуто на всевозможные пары симплексов.

Операцией с формами называется линейное отображение (тензор)

$$O: \Omega_*^{\otimes p} \rightarrow \Omega_*^{\otimes q}.$$

Следовательно, определены теоретико-множественная композиция операций

$$O_1 \circ O_2(\sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \cdots \otimes \sigma_p) = O_1(O_2(\sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \cdots \otimes \sigma_p))$$

и дуальность (двойственность)

$$\begin{array}{ccc} O: \Omega_*^{\otimes p} & \rightarrow & \Omega_*^{\otimes q} \\ \downarrow & & \downarrow \\ O^*: (\Omega_*^{\otimes p})^* & \leftarrow & (\Omega_*^{\otimes q})^*. \end{array}$$

Дополнительно мы определяем свойство, наследованное от структуры симплицального комплекса, а именно локальность.

4.4. Локальность. Для набора p симплексов $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$ из комплекса M зададим их *локальную оболочку* $\bigcup(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$ как минимальный симплекс в M , который содержит все симплексы набора. Если такой симплекс не существует, положим локальную оболочку равной $\emptyset$ (например, $\bigcup(\partial D) = \emptyset$). Для любого симплекса σ обозначим $\Omega_*^{\otimes p}(\sigma)$ подпространство, порожденное наборами из p симплексов с локальной оболочкой σ . Все пространство $\Omega_*^{\otimes p}$ разлагается в прямую сумму этих подпространств:

$$\Omega_*^{\otimes p} = \bigoplus_{\sigma \in M} \Omega_*^{\otimes p}(\sigma). \quad (35)$$

Операция O называется *локальной*, если она отображает $\Omega_*^{\otimes p}$ в $\Omega_*^{\otimes q}$, не уменьшая локальную оболочку:

$$O: \Omega_*^{\otimes p}(\sigma) \mapsto \bigoplus_{\sigma' \supset \sigma} \Omega_*^{\otimes q}(\sigma'). \quad (36)$$

Аналогично *колокальной* называется операция $O: \Omega_*^{\otimes p} \rightarrow \Omega_*^{\otimes q}$, которая не увеличивает оболочку:

$$O: \Omega_*^{\otimes p}(\sigma) \mapsto \bigoplus_{\sigma' \subset \sigma} \Omega_*^{\otimes q}(\sigma'). \quad (37)$$

Операция, которая является локальной и колокальной одновременно, называется *строго локальной*.

Таким образом, строго локальная операция $O: \Omega_*^{\otimes p} \rightarrow \Omega_*^{\otimes q}$ отображает $\Omega^{\otimes p}(\sigma)$ в $\Omega_*^{\otimes q}(\sigma)$ и сохраняет локальную оболочку своего аргумента. Очевидно, что композиция двух (ко)локальных операций является (ко)локальной. Дуальность переводит локальную операцию в колокальную и наоборот.

Значение локальности становится более ясным с двойственной точки зрения. Рассмотрим формы как линейные функции на симплексах. Операция полностью задана, если известны значения ее образа на всех симплексах в комплексе. Но это значение на некотором симплексе σ может зависеть от значений аргументов операции вне σ . Именно в этом случае операция нелокальна.

Локализация. Весьма важно, что нелокальная операция O по определению может содержать ненулевую локальную часть, потому что ее значение $O(e)$ на некотором наборе $e \in \Omega_*^{\otimes p}(\sigma)$ может иметь ненулевую проекцию на локальное подпространство $\bigoplus \Omega_*^{\otimes q}(\sigma')$, $\sigma' \supset \sigma$. Аналогично операция может иметь ненулевую колокальную и строго локальную части. Итак, произвольная операция $O: \Omega_*^{\otimes p} \rightarrow \Omega_*^{\otimes q}$ разлагается в сумму трех частей:

$$O = O_- + [O] + O_+,$$

где

$$\begin{aligned} [O] &= \Pi \left[\bigoplus \Omega_*^{\otimes q}(\sigma' = \sigma) \right] \circ O, \\ O_+ &= \Pi \left[\bigoplus \Omega_*^{\otimes q}(\sigma' \supset \sigma, \sigma' \neq \sigma) \right] \circ O, \\ O_- &= \Pi \left[\bigoplus \Omega_*^{\otimes q}(\sigma' \subset \sigma, \sigma' \neq \sigma) \right] \circ O, \end{aligned}$$

$\Pi[L]$ обозначает проекцию на линейное подпространство L . Здесь и далее $[O]$ обозначает строго локальную часть операции O , а $[O] + O_+$ и $[O] + O_-$ – локальную и колокальную части соответственно. Такое выделение строго локальной операции $[O]$ из исходно нелокальной операции O называется *локализацией*. Оно играет ключевую роль в конструкции локальной A_∞ -структуры.

4.5. Дискретные d и $\wedge$. Для дискретизации дифференциальных форм особое значение имеют аналоги гладкой внешней производной (дифференциала де Рама) d и внешнего произведения $\wedge$. Мы определяем их на произвольном симплициальном комплексе с упорядочением. Положим

$$\beta_{\sigma' \rightarrow \sigma} = (-1)^{\text{ord}(\sigma' \rightarrow \sigma)}. \quad (38)$$

Дискретный дифференциал де Рама $d: \Omega_* \rightarrow \Omega_*$ определяется следующим образом:

$$d(\sigma) = \sum_{x \notin \sigma} \beta_{x \rightarrow \sigma \cup x} \cdot \bigcup(\sigma, x). \quad (39)$$

Здесь σ – это симплекс в M , а x – вершина в M . Оператор d имеет двойственный (сопряженный) оператор ∂ (кодифференциал):

$$\partial(\sigma) = d^+(\sigma) = \sum_{x \in \sigma} \beta_{x \rightarrow \sigma} \cdot (\sigma \setminus x). \quad (40)$$

Дискретная теорема Стокса $d\omega(\sigma) = \omega(\partial\sigma)$ выражает эту двойственность. Другими словами, между формами и цепями задано естественное спаривание

$$\langle \sigma, \omega \rangle = \langle \omega, \sigma \rangle = \omega(\sigma).$$

Операторы d и ∂ сопряжены по отношению к этому спариванию:

$$\langle \partial(\sigma), \omega \rangle = \langle \sigma, d(\omega) \rangle.$$

Дифференциал отображает p -форму в $(p+1)$ -форму, а кодифференциал превращает p -форму в $(p-1)$ -форму. С двойственной точки зрения дифференциал добавляет одну точку к симплексу всеми возможными способами с соответствующими знаками, а кодифференциал вычеркивает одну точку из симплекса всеми возможными способами с соответствующими знаками.

Операции d и ∂ можно найти в любом учебнике по комбинаторной топологии (например, в [5]), они имеют хорошо известные свойства. Во-первых, эти операторы – квадратичные нильпотенты:

$$d^2 = \partial^2 = 0. \quad (41)$$

Это свойство наиболее широко используется в комбинаторной топологии: группы гомологий оператора d (“симплициальные гомологии”) применяются к изучению топологических свойств симплициальных комплексов, чаще всего триангулированных многообразий. Во-вторых, антикоммутатор

$$d\partial + \partial d = \Delta \quad (42)$$

является естественным дискретным оператором Лапласа. Его свойства связаны с топологией комплекса M следующим образом. Если M является замкнутым симплексом, то оператор Δ чрезвычайно прост: это скалярный (диагональный) оператор, умножающий любую форму на число вершин в комплексе вне зависимости от выбора формы. Если M не является в точности симплексом, но имеет топологию диска, то Δ не диагонален, но невырожден. Наконец, если комплекс M имеет нетривиальную топологию, то Δ становится вырожденным. Элементы его ядра называются гармоническими p -формами. Они однозначно соответствуют p -м гомологиям оператора d .

Дискретное внешнее умножение $\wedge: \Omega_* \otimes \Omega_* \rightarrow \Omega_*$ определяется следующим образом:

$$\wedge(\sigma, \sigma') = \frac{|\sigma|! |\sigma'|!}{(|\sigma| + |\sigma'| + 1)!} \beta_{\sigma \rightarrow \sigma \cup \sigma'} \beta_{\sigma \cap \sigma' \rightarrow \sigma'} \cdot \bigcup(\sigma, \sigma'). \quad (43)$$

Здесь σ и σ' – симплексы в M , имеющие в качестве пересечения точку, $\dim(\sigma \cap \sigma') = 0$, иначе результат считается равным нулю. Это произведение не так популярно в литературе, как рассмотренный выше дискретный дифференциал, однако это в самом деле корректная реализация дискретного внешнего умножения. Во-первых, произведение p -формы и q -формы является $(p+q)$ -формой в силу правила отбора по размерности пересечения. Во-вторых, вследствие выбора знаков в определении произведения оно обладает косой симметрией:

$$\wedge(\omega, \omega') = (-1)^{|\omega| \cdot |\omega'|} \wedge(\omega', \omega). \quad (44)$$

Наконец, произведение удовлетворяет градуированному правилу Лейбница с дифференциалом d , который определен выше:

$$d(\wedge(\omega, \omega')) = \wedge(d(\omega), \omega') + (-1)^{|\omega|} \cdot \wedge(\omega, d(\omega')). \quad (45)$$

Ассоциативность – это единственное свойство гладкого внешнего умножения, которым эта операция не обладает. Однако вместо этого дискретное внешнее умножение обладает более общим свойством: оно является частью нетривиальной A_∞ -структуры. Эта структура, по всей видимости, оказывается наиболее естественной для симплициального комплекса, а ассоциативность возникает только в непрерывном пределе (в пределе бесконечно мелкой триангуляции).

5. A_∞ -СТРУКТУРА

5.1. Развернутая/полилинейная форма. Следующее определение A_∞ -структуры (или алгебры) используется наиболее широко [3]: A_∞ -структурой на $\mathbb{Z}$ -градуированном линейном пространстве Ω_* называется счетное множество полилинейных отображений

$$m^{(p)}: \Omega_*^{\times p} \rightarrow \Omega_*, \quad p = 1, 2, \dots \quad (46)$$

со степенями $\deg(m^{(p)}) = 2 - p$, которые удовлетворяют следующему бесконечному набору соотношений для $n = 1, 2, \dots$:

$$\sum_{\substack{k, l=1, \\ k+l=n+1}}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{\xi(j, l)} m^{(k)}(\omega_1, \dots, \omega_j, m^{(l)}(\omega_{j+1}, \dots, \omega_{j+l}), \omega_{j+l+1}, \dots, \omega_n) = 0. \quad (47)$$

Знаковый множитель определяется формулой

$$\xi(j, l) = (j+1)(l+1) + l(|\omega_1| + \dots + |\omega_j|), \quad (48)$$

где $|\omega|$ – это степень формы $\omega \in \Omega_*$. Степень p -линейного отображения X задается как

$$\deg(X) = |X(\omega_1, \dots, \omega_p)| - (|\omega_1| + \dots + |\omega_p|). \quad (49)$$

Выпишем явно первые три соотношения:

$$\begin{aligned} m^{(1)}(m^{(1)}(a)) &= 0, \\ m^{(1)}(m^{(2)}(a, b)) - m^{(2)}(m^{(1)}(a), b) - (-1)^{|a|} m^{(2)}(a, m^{(1)}(b)) &= 0, \\ m^{(2)}(m^{(2)}(a, b), c) - m^{(2)}(a, m^{(2)}(b, c)) + m^{(1)}(m^{(3)}(a, b, c)) + m^{(3)}(m^{(1)}(a), b, c) + \\ + (-1)^{|a|} m^{(3)}(a, m^{(1)}(b), c) + (-1)^{|a|} (-1)^{|b|} m^{(3)}(a, b, m^{(1)}(c)) &= 0. \end{aligned}$$

Билинейное отображение $m^{(2)}: \Omega_* \times \Omega_* \rightarrow \Omega_*$ обычно понимается как структура умножения на пространстве Ω_* , а оператор $m^{(1)}: \Omega_* \rightarrow \Omega_*$ – как дифференциал. Первое A_∞ -соотношение означает, что $m^{(1)}$ является квадратичным нильпотентом. Второе означает, что $m^{(1)}$ – это дифференцирование для произведения $m^{(2)}$ (правило

Лейбница), а из третьего следует, что $m^{(2)}$ почти ассоциативно, причем отклонение от ассоциативности полностью определяется старшей операцией $m^{(3)}$.

Такая абстрактная A_∞ -структура имеет множество реализаций в приложениях, причем некоторые из наиболее интересных реализаций возникают в квантовой теории поля. Однако соответствующие физические системы, как правило, бесконечномерны. Конечномерная A_∞ -структура на симплицальном комплексе является более простой и прозрачной. В этом случае градуированное линейное пространство Ω_* – это пространство дискретных форм на комплексе, оператор $m^{(1)}$ имеет смысл дискретного дифференциала де Рама, а $m^{(2)}$ естественно отождествить с дискретным внешним умножением.

5.2. Краткая/нильпотентная форма. В разделе 2 мы ввели в рассмотрение краткую форму соотношений A_∞ -структуры – упрощение, которого можно добиться, если определить $m^{(p)}$ как линейную операцию, действующую не только на $\Omega_*^{\otimes p}$, но и на любом пространстве $\Omega_*^{\otimes q}$ с произвольным q :

$$\begin{aligned} m^{(p)}: \Omega_*^{\otimes q} &\rightarrow 0, & q < p; \\ m^{(p)}: \Omega_*^{\otimes q} &\rightarrow \Omega_*^{\otimes q-p+1}, & q \geq p. \end{aligned}$$

Такое действие операции на большем числе аргументов называется *правилом поднятия*. Оно определено для $q \geq p$ следующим образом:

$$\begin{aligned} m^{(p)}(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_q) &= (-1)^{q-1} \sum_{j=0}^{q-p} (-1)^{\xi(j,p)} \omega_1 \otimes \cdots \\ &\quad \cdots \otimes \omega_k \otimes m^{(p)}(\omega_{k+1}, \dots, \omega_{k+p}) \otimes \omega_{k+p+1} \otimes \cdots \otimes \omega_q, \end{aligned} \quad (50)$$

где функция ξ в знаковом множителе определяется тем же выражением (48).

Фактически, таким образом мы поднимаем наши операции на полное линейное “пространство Фока”

$$\Omega_*^* = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \Omega_*^{\otimes p} \quad (51)$$

(мы считаем $\Omega_*^{\otimes 0} = \{\lambda \cdot \emptyset, \lambda \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}$). Заметим, что Ω_*^* дважды градуировано: с одной стороны, в этом пространстве есть обыкновенная градуировка по степеням форм, наследованная от Ω_* , с другой стороны, есть тензорная градуировка на формы, пары форм, тройки форм и т.д.

С помощью такого поднятия операции $m^{(p)}$ (которые исходно были полилинейными отображениями) действуют как линейные операторы в пространстве Фока. Операторы проще в обращении, чем полилинейные отображения, и в этих терминах система условий (47) выглядит существенно проще:

$$\sum_{\substack{k,l=1, \\ k+l=n+1}}^{\infty} m^{(k)} \circ m^{(l)}(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_n) = 0$$

или

$$\sum_{\substack{k,l=1, \\ k+l=n+1}}^{\infty} m^{(k)}m^{(l)} = 0. \quad (52)$$

Соотношения (52) представляет собой краткую форму соотношений (47). Несколько первых равенств из (52) имеют вид

$$\begin{aligned} (m^{(1)})^2 &= 0, \\ m^{(1)}m^{(2)} + m^{(2)}m^{(1)} &= 0, \\ m^{(1)}m^{(3)} + m^{(3)}m^{(1)} + (m^{(2)})^2 &= 0 \end{aligned} \quad (53)$$

и т.д. Несложно видеть, что все они могут быть записаны как одно градуированное соотношение

$$(D)^{\circ 2} = (m^{(1)} + m^{(2)} + m^{(3)} + \dots)^2 = 0. \quad (54)$$

Другими словами, A_∞ -структура на симплициальном комплексе – это то же самое, что один оператор

$$D: \Omega_*^* \rightarrow \Omega_*^*, \quad D = m^{(1)} + m^{(2)} + m^{(3)} + \dots, \quad (55)$$

удовлетворяющий соотношению нильпотентности

$$D^2 = 0. \quad (56)$$

Поскольку линейное пространство Ω_*^* градуировано, то это условие нильпотентности, простое и естественное на уровне полного тензорного пространства Ω_*^* , приводит к многочисленным и сложным соотношениям (47) на уровне градуированных компонент $d, \wedge, m, \dots$. Краткая формулировка убирает градуировку для того, чтобы явно выделить стоящую за A_∞ -соотношениями нильпотентную структуру.

5.3. Решение A_∞ -уравнений на неизвестные $m^{(p)}$. В данной статье мы рассматриваем только специальный вид операций $m^{(1)} = d$ и $m^{(2)} = \wedge$, определенный в п. 4.5. Это ограничение связано с существованием непрерывного предела дискретных форм: для все более мелких триангуляций гладких многообразий, A_∞ -структура должна воспроизводить гладкую алгебру внешних форм (1) с возрастающей точностью. Иначе говоря, в настоящей статье мы рассматриваем только A_∞ -структуры с правильным непрерывным пределом.

Это естественное требование на самом деле является сильным ограничением: оно фиксирует $m^{(1)} = d$ и $m^{(2)} = \wedge$ однозначным образом. Эти и только эти две дискретные операции воспроизводят привычные гладкие операции d и $\wedge$ в непрерывном пределе, в то время как все старшие операции $m^{(p)}$ с $p \geq 3$ в этом пределе должны стремиться к нулю.

Такой выбор $m^{(1)}$ и $m^{(2)}$ автоматически удовлетворяет первым двум уравнениям A_∞ -структуры (53)

$$d^2 = 0, \quad d \wedge + \wedge d = 0.$$

При этом старшие A_∞ -уравнения (52) имеют вид

$$dm^{(p)} + m^{(p)}d = \mathcal{M}^{(p)}, \quad (57)$$

где правая часть задается как

$$\mathcal{M}^{(p)} = - \sum_{k=2}^{p-1} m^{(k)} m^{(p-k+1)}, \quad (58)$$

т.е. $\mathcal{M}^{(1)} = 0$, $\mathcal{M}^{(2)} = 0$, $\mathcal{M}^{(3)} = -\wedge^2$ и т.д. Естественнo решать такие уравнения одно за другим, последовательно (рекуррентно), поскольку $\mathcal{M}^{(p)}$ зависит только от предыдущих операций $m^{(1)}, \dots, m^{(p-1)}$, и поэтому в p -м уравнении присутствует только одна неизвестная операция $m^{(p)}$.

5.4. Метод K -оператора. На каждом шаге рекурсии нам нужно решить уравнение

$$dm^{(p)} + m^{(p)}d = \mathcal{M}^{(p)}, \quad (59)$$

где операция $m^{(p)}$ – единственная неизвестная величина, а $\mathcal{M}^{(p)}$ в правой части уравнения уже известна. Существует общий метод решения таких уравнений, который называется методом K -оператора [10]. Этот метод можно приблизительно описать как нахождение оператора, обратного к дифференциалу.

Рассмотрим общее уравнение $dx + xd = y$ и любой оператор K , удовлетворяющий условию

$$dK + Kd = 1. \quad (60)$$

Тогда и $x = yK$, и $x = Ky$ являются решениями, если только выполняется необходимое условие $dy = yd$, которое называется *условием самосогласованности*. Это и в самом деле решения, поскольку

$$\begin{aligned} d(yK) + (yK)d &= ydK + yKd = y(dK + Kd) = y, \\ d(Ky) + (Ky)d &= dKy + Kdy = (dK + Kd)y = y. \end{aligned}$$

Мы называем yK и Ky правым и левым решениями соответственно. В нашей задаче $x = m^{(p)}$ и $y = \mathcal{M}^{(p)}$.

Для начала необходимо проверить, что выполняется условие самосогласованности

$$d\mathcal{M}^{(p)} = \mathcal{M}^{(p)}d. \quad (61)$$

Для $p = 3$ это условие имеет вид $d\wedge^2 = \wedge^2d$ и непосредственно следует из соотношения $d\wedge + \wedge d = 0$. Для общего случая $p \geq 3$ самосогласованность можно проверить прямым вычислением:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(p)}d - d\mathcal{M}^{(p)} &= \sum_{k=2}^{p-1} (dm^{(k)}m^{(p-k+1)} - m^{(k)}m^{(p-k+1)}d) = \\ &= \sum_{k=2}^{p-1} (dm^{(k)}m^{(p-k+1)} + m^{(k)}dm^{(p-k+1)} - m^{(k)}\mathcal{M}^{(p-k+1)}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=2}^{p-1} ((dm^{(k)} + m^{(k)}d)m^{(p-k+1)} - m^{(k)}\mathcal{M}^{(p-k+1)}) = \\
 &= \sum_{k=2}^{p-1} (\mathcal{M}^{(k)}m^{(p-k+1)} - m^{(k)}\mathcal{M}^{(p-k+1)}) = \\
 &= \sum_{k=2}^{p-1} \sum_{q=2}^{k-1} m^{(q)}m^{(k-q+1)}m^{(p-k+1)} - \sum_{k=2}^{p-1} \sum_{q=2}^{p-k} m^{(k)}m^{(q)}m^{(p+2-q-k)} = \\
 &= \sum_{k=2}^{p-1} \sum_{\alpha=k-1}^2 m^{(k-\alpha+1)}m^{(\alpha)}m^{(p-k+1)} - \\
 &\quad - \sum_{\beta=p-1}^2 \sum_{q=2}^{\beta-1} m^{(p-k+1)}m^{(q)}m^{(\beta-q+1)} = \\
 &= \sum_{k=2}^{p-1} \sum_{q=2}^{k-1} (m^{(k-q+1)}m^{(q)}m^{(p-k+1)} - m^{(p-k+1)}m^{(q)}m^{(k-q+1)}) = 0.
 \end{aligned}$$

Правое и левое решения уравнения (57) имеют вид $m^{(p)} = \mathcal{M}^{(p)}K$ и $m^{(p)} = K\mathcal{M}^{(p)}$ соответственно. Заметим, что многообразие решений не определяется единственным выбором между левым и правым решением: на каждом шаге рекурсии можно делать этот выбор независимо. Если мы ограничимся (для определенности) использованием только правых решений на каждом шаге, то возникает следующая “чисто правая” A_∞ -структура:

$$\begin{aligned}
 m^{(1)} &= d, & m^{(2)} &= \wedge, & m^{(3)} &= \mathcal{M}^3 K = -\wedge^2 K, \\
 m^{(4)} &= \mathcal{M}^4 K = -(\wedge m^{(3)} + m^{(3)}\wedge)K = (\wedge \wedge^2 K + \wedge^2 K \wedge)K = \wedge^3 K^2 + \wedge^2 K \wedge K, \\
 m^{(5)} &= \mathcal{M}^5 K = -(\wedge m^{(4)} + m^{(4)}\wedge + m^{(3)}m^{(3)})K = \\
 &= -(\wedge (\wedge^3 K^2 + \wedge^2 K \wedge K) + (\wedge^3 K^2 + \wedge^2 K \wedge K) \wedge + \wedge^2 K \wedge^2 K)K
 \end{aligned}$$

и т.д. “Чисто левая” A_∞ -структура может быть построена точно так же. Однако, как мы объясняем в разделе 7, только правая конструкция может породить локальную A_∞ -структуру. Поэтому в дальнейшем мы будем использовать правые решения. Если не интересоваться вопросами локальности, то левая и правая схемы решения совершенно аналогичны.

Часто удобно рассматривать нильпотентные K -операторы, удовлетворяющие условиям

$$d^2 = 0, \quad dK + Kd = 1, \quad K^2 = 0.$$

Такие K -операторы порождают особенно простые A_∞ -структуры:

$$\begin{aligned}
 m^{(1)} &= d, & m^{(2)} &= \wedge, & m^{(3)} &= \mathcal{M}^3 K = -\wedge^2 K, \\
 m^{(4)} &= \mathcal{M}^4 K = -(\wedge m^{(3)} + m^{(3)}\wedge)K = (\wedge \wedge^2 K + \wedge^2 K \wedge)K = \wedge^2 K \wedge K, \\
 m^{(5)} &= \mathcal{M}^5 K = -(\wedge m^{(4)} + m^{(4)}\wedge + m^{(3)}m^{(3)})K = -\wedge^2 K \wedge K \wedge K, \\
 &\dots\dots\dots, \\
 m^{(p)} &= (-1)^p \wedge (\wedge K)^{p-2}.
 \end{aligned} \tag{62}$$

В этом случае ряд $D = m^{(1)} + m^{(2)} + m^{(3)} + \dots$ можно просуммировать и записать как одно простое выражение. В самом деле,

$$D = d + \wedge - \wedge^2 K + \wedge^2 K \wedge K + \dots = d + \wedge(1 - \wedge K + \wedge K \wedge K + \dots).$$

Используя операторное тождество $(1 + A)^{-1} = 1 - A + A^2 - A^3 + \dots$, это выражение можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} D &= d + \wedge \frac{1}{1 + \wedge K} = (d + d \wedge K + \wedge) \frac{1}{1 + \wedge K} = (d + d \wedge K + \wedge(dK + Kd)) \frac{1}{1 + \wedge K} = \\ &= (d + \wedge Kd) \frac{1}{1 + \wedge K} = (1 + \wedge K)d(1 + \wedge K)^{-1}. \end{aligned} \quad (63)$$

Оказывается, что нильпотентный оператор A_∞ -структуры D является сопряжением исходного нильпотентного оператора d : $D = UdU^{-1}$. Сопрягающее линейное преобразование U в данном конкретном случае “чисто правой” структуры имеет вид

$$U = 1 + \wedge K. \quad (64)$$

Естественно, сопряжение сохраняет свойство нильпотентности:

$$D^2 = UdU^{-1}UdU^{-1} = Ud^2U^{-1} = 0. \quad (65)$$

6. ПЕРВОЕ (НАИВНОЕ) РЕШЕНИЕ

Существует способ построить K -оператор из произвольного оператора $\alpha: \Omega_*^* \rightarrow \Omega_*^*$. Положим $d\alpha + \alpha d = \Delta_\alpha$. Из нильпотентности дифференциала $d^2 = 0$ следует, что $d\Delta_\alpha = \Delta_\alpha d$. Если Δ_α обратим, то оператор $K_\alpha = \alpha\Delta_\alpha^{-1}$ удовлетворяет необходимому условию

$$dK_\alpha + K_\alpha d = 1. \quad (66)$$

В самом деле,

$$dK_\alpha + K_\alpha d = d\alpha \Delta_\alpha^{-1} + \alpha \Delta_\alpha^{-1} d = d\alpha \Delta_\alpha^{-1} + \alpha d \Delta_\alpha^{-1} = (d\alpha + \alpha d) \Delta_\alpha^{-1} = \Delta_\alpha \Delta_\alpha^{-1} = 1.$$

Это же верно и для $\tilde{K}_\alpha = \Delta_\alpha^{-1}\alpha$. Разумеется, Δ_α редко является обратимым. Для оператора α общего вида он не сохраняет ни одну из градуировок и действует из подпространства заданной градуировки в другое подпространство. Даже в том случае, когда подпространство остается неизменным, могут существовать нулевые моды.

Простейший нетривиальный оператор α , который можно выбрать – это кодифференциал $\alpha = \partial$, так что $\Delta_\partial = d\partial + \partial d = \Delta$ является просто дискретным оператором Лапласа, который сохраняет обе градуировки. Если M – замкнутый симплекс, то Δ имеет наиболее простой вид: это скалярный оператор, умножающий любую форму на число вершин этого симплекса. Поэтому $\alpha = \partial$ особенно удобен для вычислений на симплексе. Однако он может быть использован и на других симплицальных комплексах.

Если мы выберем $\alpha = \partial$, то в силу $\partial^2 = 0$ мы имеем $K = K_\partial = \partial \Delta^{-1} = \Delta^{-1} \partial$, и оказывается, что

$$K^2 = \partial \Delta^{-1} \partial \Delta^{-1} = \partial \partial \Delta^{-1} \Delta^{-1} = 0.$$

Поэтому в соответствии с (62) мы получаем следующую левую (правая получается совершенно аналогичным образом) A_∞ -структуру:

$$m^{(1)} = d, \quad m^{(p)} = (-1)^p (\partial(d\partial + \partial d)^{-1} \wedge)^{p-2} \wedge, \quad p = 2, 3, \dots \quad (67)$$

Заметим, что это решение имеет явный вид. Дифференциалы d , ∂ и внешнее умножение $\wedge$ определены в п. 4.5 в чисто комбинаторных терминах, таким образом, операции $m^{(p)}$ можно легко вычислить по этой формуле на произвольных симплициальных комплексах.

7. ВТОРОЕ (ЛОКАЛЬНОЕ) РЕШЕНИЕ

Решение (67) является всего лишь иллюстрацией того, как работает метод: мы выбираем K -оператор и немедленно получаем решение. Однако метод K -оператора способен решать более сложные задачи: его можно использовать для того, чтобы строить A_∞ -структуры, обладающие дополнительными свойствами, например, свойством локальности. A_∞ -структура называется *локальной*, если все ее операции $m^{(p)}: \Omega_*^{\otimes p} \rightarrow \Omega_*$ локальны. Это сильное дополнительное требование.

В этом разделе мы собираемся построить локальную A_∞ -структуру. Локальные A_∞ -структуры могут быть получены при помощи локального K -оператора. Заметим, что ни ∂ , ни $K\partial$ не были локальными, и решение (67) было нелокальным решением. Для того чтобы построить локальный K -оператор, рассмотрим некоторые важные свойства операторов d и ∂ .

7.1. Локализация d и ∂ . Согласно п. 4.4 любая операция может быть разложена на три составляющие с определенными свойствами локальности. Это разложение применимо и к операторам дифференцирования:

$$d = d_- + d_+ + [d], \quad \partial = \partial_- + \partial_+ + [\partial].$$

Рассмотрим более детально устройство строго локальных операторов $[d]$ и $[\partial]$. На пространстве форм Ω_* локальная оболочка действует тривиально: $\bigcup(\sigma) = \sigma$ для любого симплекса σ . По определению дифференциал $d(\sigma)$ увеличивает σ (а с ним и локальную оболочку), добавляя вершины, лежащие вне σ . Следовательно, у оператора d на пространстве форм нет строго локальной части. Это же верно и для оператора ∂ , поскольку он уменьшает локальную оболочку, вычеркивая вершины из симплекса, т.е., $[d]|_{\Omega_*} = 0$, $[\partial]|_{\Omega_*} = 0$. Замечательным образом операторы $[d]$ и $[\partial]$ становятся ненулевыми на расширенных пространствах $\Omega_*^{\otimes p}$ с $p \geq 2$. Исходно операторы d и ∂ определены на этих пространствах при помощи правила поднятия (50). Например, на пространстве пар $\Omega_* \otimes \Omega_*$ дифференциал действует сначала на первый симплекс, а затем на второй:

$$\begin{aligned} d(a \otimes b) &= -d(a) \otimes b - (-1)^{|a|} a \otimes d(b), \\ \partial(a \otimes b) &= -\partial(a) \otimes b - (-1)^{|a|} a \otimes \partial(b). \end{aligned}$$

Такое действие может содержать ненулевую строго локальную компоненту. Действительно, в паре симплексов a , b могут быть точки, которые принадлежат как a ,

так и b . Вычеркивание таких точек не меняет оболочки пары. Это и есть то обстоятельство, которое позволяет кодифференциалу ∂ содержать строго локальную часть. Оператор $[\partial]$, таким образом, вычеркивает только те точки, которые содержатся в обоих симплексах пары. Аналогично, в паре симплексов a, b есть точки, принадлежащие a , но не принадлежащие b . Добавление такой точки к симплексу b не изменит оболочки пары, поэтому и у дифференциала есть строго локальная компонента.

Рассмотрим пример. На комплексе $M = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ имеет место равенство

$$\partial(\{1\} \otimes \{1, 2\}) = -\emptyset \otimes \{1, 2\} - \{1\} \otimes \{2\} + \{1\} \otimes \{1\}.$$

По определению локализации получаем, что

$$[\partial](\{1\} \otimes \{1, 2\}) = -\emptyset \otimes \{1, 2\} - \{1\} \otimes \{2\}.$$

Слагаемое $\{1\} \otimes \{1\}$ в данном случае было нелокальным (потому что его локальная оболочка $\{1\}$ не содержит локальную оболочку аргумента $\{1, 2\}$) и было отброшено. Фактически, локализация – это не что иное, как отбрасывание нелокальных слагаемых.

Следует обратить особое внимание на d_- (нелокальную часть дифференциала). Она существует только потому, что значение $d(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$ может иметь пустую локальную оболочку, даже если исходно набор $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$ имел оболочку $\sigma \neq \emptyset$. При этом оболочка резко уменьшается, что по определению является нелокальностью. Например, рассмотрим пару симплексов $\{1, 2\} \otimes \{2\}$ на комплексе $M = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$. Эта пара имеет непустую оболочку $\{1, 2\}$. В то же время

$$d(\{1, 2\} \otimes \{2\}) = \{1, 2\} \otimes \{2, 3\} - \{1, 2\} \otimes \{1, 2\}.$$

Можно видеть, что правая часть содержит нелокальность: $\bigcup(\{1, 2\} \otimes \{2, 3\}) = \emptyset$.

Образ d_- всегда имеет пустую оболочку, $d_-: \Omega_*^p \rightarrow \Omega_*^p(\emptyset)$. Из этого следует важное утверждение, что локализация дифференциала сохраняет нильпотентность: $[d^2] = [d]^2 = 0$. Действительно, оператор d^2 содержит строго локальную часть

$$[dd] = [([d] + d_- + d_+) \cdot ([d] + d_- + d_+)] = [[d][d] + d_-d_+ + d_+d_-] = [d]^2 + [d_-d_+ + d_+d_-],$$

но, поскольку образ d_- имеет пустую оболочку, слагаемое $[d_-d_+ + d_+d_-]$ равно нулю.

Среди прочих тождеств важным является тождество

$$d_+[\partial] + [\partial]d_+ = 0, \tag{68}$$

которое будет использовано в дальнейшем. Доказательство его тривиально, если комплекс M – это симплекс. В этом случае согласно (28) на любые формы оператор Лапласа действует как умножение на постоянное число. Согласно правилу поднятия (30) на любые наборы форм он действует так же. Следовательно, Δ строго локален. Компонента Δ_+ тогда должна равняться нулю,

$$\Delta_+ = (d\partial + \partial d)_+ = d_+[\partial] + [\partial]d_+ = 0.$$

Для доказательства тождества (68) в общем случае, когда M не является симплексом, выберем произвольный набор e с локальной оболочкой σ . Оператор $d_+[\partial] + [\partial]d_+$, если он не равен нулю, при действии на e должен увеличивать оболочку на одну вершину. Рассмотрим все симплексы в M , которые содержат σ и еще ровно одну вершину. Ограничение оператора $d_+[\partial] + [\partial]d_+$ на каждый такой симплекс равно нулю, как показано выше. Следовательно, $(d_+[\partial] + [\partial]d_+)(e) = 0$.

7.2. Оператор $\Delta_{\text{loc}} = [d][\partial] + [\partial][d]$. В дальнейшем изложении центральную роль будет играть локальный оператор

$$\Delta_{\text{loc}} = [d][\partial] + [\partial][d]. \quad (69)$$

На любом симплициальном комплексе независимо от топологии этот оператор имеет интересные спектральные свойства. Рассмотрим пространство Фока $\Omega_*^* = \bigoplus \Omega_*^{\otimes p}$. Базис в пространстве Фока составляют наборы различного числа симплексов $e = (\sigma_1, \dots, \sigma_p)$. Для каждого базисного вектора e определим $n(e)$ как число точек в симплексе $\bigcup(e)$, а $k(e)$ – как число свободных точек в $\bigcup(e)$ (точка в наборе называется *свободной*, если она принадлежит одному и только одному симплексу набора). Например, если $e = (\{1\}, \{12\}, \{13\})$, то $n(e) = 3$, $k(e) = 2$ и $\tau = \{2, 3\}$ – свободные точки.

Обозначим $\Omega_*^{\otimes p}(\sigma, \tau)$ подпространство, порожденное всеми наборами p симплексов с данной локальной оболочкой σ и с данным набором свободных точек $\tau \subset \sigma$. Удобно изучать свойства оператора Δ_{loc} на этих подпространствах по отдельности, поскольку оператор не перемешивает их. Свойства Δ_{loc} зависят от чисел $n = |\sigma|$ и $k = |\tau|$. Следующие пункты посвящены подробному описанию этих свойств.

7.3. Собственные значения. На p^k -мерном линейном пространстве $\Omega_*^{\otimes p}(\sigma, \tau)$, где $k = |\tau|$, оператор $[d][\partial] + [\partial][d]$ является самосопряженным, так что в базисе собственных векторов он диагонален (не имеет нетривиальных жордановых клеток). Собственные векторы могут быть представлены в виде $|n_1, n_2, \dots, n_k\rangle$, где $0 \leq n_i \leq (p-1)$, а собственные значения определяются равенством

$$\Delta_{\text{loc}}|n_1, n_2, \dots, n_k\rangle = p(n - k + \theta(n_1) + \theta(n_2) + \dots + \theta(n_k))|n_1, n_2, \dots, n_k\rangle.$$

Здесь $\theta(x) = 1$ при $x > 0$, $\theta(x) = 0$ при $x \leq 0$. Из этого следует, что существуют $k+1$ различных собственных значений

$$\lambda_i = (n - i)p, \quad i = 0, \dots, k, \quad (70)$$

с соответствующими кратностями

$$N_i = C_k^i (p-1)^i, \quad i = 0, \dots, k. \quad (71)$$

Очевидно, сумма всех кратностей $\sum_{i=0}^k N_i = p^k$ равна полной размерности пространства, потому что кратность N_i обозначает размерность i -го подпространства, соответствующего собственному значению λ_i . Эти кратности можно записать в виде

таблиц “обобщенных биномиальных коэффициентов”

$$\begin{array}{ll}
 k = 0 : & 1 = 1, \\
 k = 1 : & 2 = 1 + 1, \\
 p = 2 : & k = 2 : \quad 4 = 1 + 2 + 1, \\
 & k = 3 : \quad 8 = 1 + 3 + 3 + 1, \\
 & k = 4 : \quad 16 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1; \\
 \\
 k = 0 : & 1 = 1, \\
 k = 1 : & 3 = 1 + 2, \\
 p = 3 : & k = 2 : \quad 9 = 1 + 4 + 4, \\
 & k = 3 : \quad 27 = 1 + 6 + 12 + 8, \\
 & k = 4 : \quad 81 = 1 + 8 + 24 + 32 + 16; \\
 \\
 k = 0 : & 1 = 1, \\
 k = 1 : & 4 = 1 + 3, \\
 p = 4 : & k = 2 : \quad 16 = 1 + 6 + 9, \\
 & k = 3 : \quad 64 = 1 + 9 + 27 + 27, \\
 & k = 4 : \quad 256 = 1 + 12 + 54 + 108 + 81
 \end{array}$$

и т.д. Заметим, что кратности не зависят от числа несвободных точек. Другими словами, способ разбиения пространства $\Omega_*^{\otimes p}(\sigma, \tau)$ на части зависит только от количества свободных точек $k = |\tau|$.

7.4. Собственные векторы. Собственные векторы можно получить в результате следующего явного построения. Предположим для начала, что все точки свободны, т.е. $n = k$. В простейшем случае $p = p$, $k = 1$, $n = 1$ пространство состоит из наборов p симплексов с единственной точкой, которая, естественно, является свободной. Выберем базис

$$\begin{aligned}
 (1, 0, 0, \dots, 0) &= \{\text{pt}\} \otimes \emptyset \otimes \dots \otimes \emptyset, \\
 (0, 1, 0, \dots, 0) &= \emptyset \otimes \{\text{pt}\} \otimes \dots \otimes \emptyset, \\
 &\dots\dots\dots, \\
 (0, 0, 0, \dots, 1) &= \emptyset \otimes \emptyset \otimes \dots \otimes \{\text{pt}\}.
 \end{aligned}$$

Несложно показать, что в этом базисе локальный оператор Лапласа представляется $(p \times p)$ -матрицей:

$$\Delta_{\text{loc}} = [d][\partial] + [\partial][d] = \begin{pmatrix} p-1 & +1 & -1 & +1 & \dots \\ +1 & p-1 & +1 & -1 & \dots \\ -1 & +1 & p-1 & +1 & \dots \\ +1 & -1 & +1 & p-1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} =$$

$$= pI - \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & +1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & \dots \\ +1 & +1 & +1 & \dots \\ +1 & +1 & +1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & +1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}^{-1}, \quad (72)$$

где I – единичная матрица. Матрица (72) имеет два собственных значения 0 и p с кратностями 1 и $p-1$ соответственно. Пусть

$$E = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & +1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (73)$$

Собственный вектор $|0\rangle = E(1, 1, 1, \dots)$ соответствует $\lambda = 0$, в то время как один из возможных способов выбора векторов $|1\rangle, \dots, |p-1\rangle$, соответствующих собственному значению $\lambda = p$, имеет вид

$$|1\rangle = E(1, -1, 0, 0, \dots), \quad |2\rangle = E(0, 1, -1, 0, \dots), \quad \dots \quad (74)$$

По системе “одноточечных” собственных векторов можно построить собственные векторы общего вида при $k \geq 1$ и при наличии несвободных точек $e = \sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_p$, $k(e) = 0$, воспользовавшись формулой

$$|n_1, n_2, \dots, n_k\rangle = e \star |n_1\rangle \star |n_2\rangle \star |n_3\rangle \star \dots \star |n_k\rangle, \quad (75)$$

где операция $\star$ присоединяет два набора симплексов друг к другу следующим образом:

$$\begin{aligned} e_1 \star e_2 &= (\sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \dots \otimes \sigma_p) \star (\sigma'_1 \otimes \sigma'_2 \otimes \dots \otimes \sigma'_p) = \\ &= (-1)^\chi \bigcup (\sigma_1, \sigma'_1) \otimes \bigcup (\sigma_2, \sigma'_2) \otimes \dots \otimes \bigcup (\sigma_p, \sigma'_p), \end{aligned}$$

так что для любых двух наборов e_1, e_2

$$\Delta_{\text{loc}}(e_1 \star e_2) = (\Delta_{\text{loc}} e_1) \star e_2 + e_1 \star (\Delta_{\text{loc}} e_2).$$

Эта конструкция завершает объяснение спектральных свойств оператора Δ_{loc} . Однако некоторые технические детали общего доказательства пока отсутствуют, в основном это касается знакового множителя $(-1)^\chi$, в котором χ зависит от различных факторов, включая число и расположение несвободных точек; в общем случае χ пока неизвестно. Тем не менее в каждом конкретном случае можно удостовериться в том, что локальный оператор Лапласа проявляет именно те свойства, которые описаны выше.

7.5. Локальный K -оператор. Если (по аналогии с разделом 6) использовать $[\partial]$ в роли исходного оператора α и построить K -оператор

$$K_{[\partial]} = \frac{[\partial]}{d[\partial] + [\partial]d},$$

то такой оператор окажется нелокальным, поскольку d содержит нелокальную компоненту (см. п. 7.1). Вместо этого мы предлагаем использовать K -оператор

$$[K] = \frac{[\partial]}{[d][\partial] + [\partial][d]}, \quad (76)$$

который, очевидно, строго локален. По построению он удовлетворяет тождеству $[d][K] + [K][d] = 1$, следовательно,

$$\begin{aligned} d[K] + [K]d &= ([d] + d_+ + d_-)[K] + [K]([d] + d_+ + d_-) = \\ &= 1 + (d_+[K] + [K]d_+) + (d_-[K] + [K]d_-). \end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части последнего равенства равно нулю согласно формуле (68) и определению $[K]$. Мы видим, что $[K]$ не удовлетворяет основному свойству K -оператора (60). Вместо этого $d[K] + [K]d = 1 + \epsilon$, где $\epsilon = d_-[K] + [K]d_-$.

Тем не менее это не мешает нам использовать $[K]$ для разрешения уравнений A_∞ -структуры. Дело в том, что оператор ϵ содержит d_- , так что согласно выводам п. 7.1 $\bigcup(\epsilon(e)) = \emptyset$ для любого набора e . Это значит, что композиция ϵ и любой строго локальной операции равна нулю. В частности, все операции $\mathcal{M}^{(p)}$ строго локальны на $\Omega_*^{\otimes p}$, поэтому

$$\mathcal{M}^{(p)} \circ \epsilon(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p) = 0$$

и

$$\mathcal{M}^{(p)} \circ (d[K] + [K]d) = \mathcal{M}^{(p)} + \mathcal{M}^{(p)} \circ \epsilon = \mathcal{M}^{(p)},$$

откуда следует, что $\mathcal{M}^{(p)}[K]$ является решением:

$$d\mathcal{M}^{(p)}[K] + \mathcal{M}^{(p)}[K]d = \mathcal{M}^{(p)}.$$

Именно по этой причине мы используем правые решения, чтобы получить локальную A_∞ -структуру. Вторая причина состоит в том, что на пространстве форм оператор $[\partial]$, а с ним и оператор $[K]$ равны нулю. Поэтому использовать оператор $[K]$ в левой конструкции бесполезно: $[K] \circ \mathcal{M}^{(p)}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p) = 0$.

7.6. Обращение оператора Δ_{loc} . Оператор $[K]$ включает в себя оператор, обратный к локальному оператору Лапласа. Мы знаем все о собственных значениях и собственных векторах оператора Δ_{loc} , поэтому его легко обратить: на каждом подпространстве $\Omega_*^{\otimes p}(\sigma, \tau)$, выполняется тождество

$$(\Delta_{\text{loc}} - \lambda_0 I)(\Delta_{\text{loc}} - \lambda_1 I) \dots (\Delta_{\text{loc}} - \lambda_k I) = 0, \quad (77)$$

представляющее собой спектральное уравнение для матрицы конечного размера (классическое утверждение из линейной алгебры). Следовательно, Δ_{loc}^{-1} является полиномом конечной степени по Δ_{loc} :

$$\Delta_{\text{loc}}^{-1} = \alpha_0 + \alpha_1 \Delta_{\text{loc}} + \dots + \alpha_k \Delta_{\text{loc}}^k. \quad (78)$$

Коэффициенты α выражаются через собственные значения λ при помощи формулы Виета:

$$\alpha_{k-i} = (-1)^i \frac{S_i(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k)}{S_{k+1}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k)},$$

где S_i – i -й элементарный симметрический полином.

Эта формула делает вычисление обратного оператора несложной вычислительной задачей. Однако для ее решения необходимо вычислить k последовательных степеней оператора Δ_{loc} , что затруднительно при больших k . Для того чтобы упростить вычисления, можно использовать собственные векторы с учетом их кратности и вывести явное правило действия оператора Δ_{loc}^{-1} на любой набор симплексов. Мы приводим эту комбинаторную формулу в приложении.

7.7. Локальная A_∞ -структура. K -оператор $[K]$ нильпотентен, $[K]^2 = 0$. Поэтому в соответствии с (62) мы получаем A_∞ -структуру

$$m^{(1)} = d, \quad m^{(p)} = (-1)^p \wedge (\wedge [\partial] ([d][\partial] + [\partial][d])^{-1})^{p-2}, \quad p = 2, 3, \dots \quad (79)$$

Эта A_∞ -структура по построению является локальной (состоит из локальных операций) и имеет правильный непрерывный предел (в силу правильного выбора первых двух дискретных операций d и $\wedge$). Решение (79), как и (67), имеет явный вид. В приложении мы вычисляем по формуле (79) несколько первых операций $m^{(p)}$. В простейших случаях это вычисление может быть сделано даже на бумаге. Однако начиная с $p = 4$ это становится затруднительно, но в этом случае могут быть использованы современные компьютерные программы.

Следует отметить, что все это имеет значение только для приложений, когда мы интересуемся явными выражениями для операций. С чисто теоретической точки зрения наиболее важно то, что мы представили A_∞ -структуру нильпотентным оператором

$$D = (1 + \wedge [K])d(1 + \wedge [K])^{-1}. \quad (80)$$

Как уже упоминалось в п. 5.2, этот оператор не является однородным элементом по отношению к тензорной градуировке. Он может быть разложен на однородные компоненты,

$$D = d + \wedge + m^{(3)} + \dots, \quad (81)$$

которые представляют собой отдельные A_∞ -операции.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученная нами локальная A_∞ -структура (79) является частным случаем широкого класса локальных A_∞ -структур. Другими словами, уравнение (22) имеет (бесконечно) много решений и, более того, (бесконечно) много локальных решений. Естественнo утверждать, что между A_∞ -структурами и нильпотентными операторами на пространстве Фока Ω^*_* имеется однозначное соответствие.

Должны существовать высшие нильпотентные аналоги A_∞ -структуры, которые являются $\wedge_n$ -индуцированными деформациями высших дифференциалов d_n . Соответствующие операторы D_n на пространстве Фока удовлетворяют алгебраическому уравнению $D_n^n = 0$. Описание старших $A_\infty^{(n)}$ -структур можно найти в работе [9].

ПРИЛОЖЕНИЕ

В приложении мы приводим некоторые явные вычисления с дискретными формами. Их следует рассматривать как примеры и иллюстрации.

П.1. Симплициальные комплексы. Приведем некоторые одно- и двумерные комплексы.

Одномерные комплексы:

$$M = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \quad \text{– замкнутое ребро (1-симплекс),}$$

$$M = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\},$$

$$M = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\},$$

Двумерные комплексы:

$$M = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

– замкнутый треугольник (2-симплекс);

$$M = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \\ \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$$

– 2-сфера (граница 3-симплекса).

П.2. Дискретные формы и операции: цепное описание. На пространстве дискретных форм определены различные операции. Наиболее важными являются дискретный дифференциал d и дискретное внешнее произведение $\wedge$, определенные в п. 4.5. Рассмотрим несколько явных вычислений с этими операциями в представлении цепей (формы рассматриваются как линейные комбинации симплексов).

Дифференциал. Рассмотрим комплекс $M_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ – простой 2-диск. Произвольная дискретная форма $f \in \Omega_*(M)$ на этом комплексе является линейной комбинацией его симплексов:

$$f = f_\emptyset \emptyset + f_1 \{1\} + f_2 \{2\} + \cdots + f_{123} \{1, 2, 3\}.$$

Дифференциал d действует на $\Omega_*(M)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} d(\emptyset) &= \{1\} + \{2\} + \{3\}, \\ d(\{1\}) &= -\{1, 2\} - \{1, 3\}, & d(\{2\}) &= \{1, 2\} - \{2, 3\}, & d(\{3\}) &= \{1, 3\} + \{2, 3\}, \\ d(\{1, 2\}) &= \{1, 2, 3\}, & d(\{1, 3\}) &= -\{1, 2, 3\}, & d(\{2, 3\}) &= \{1, 2, 3\}, \end{aligned}$$

$$d(\{1, 2, 3\}) = 0.$$

Из этих формул легко получить, что $d^2 = 0$.

Двойственный оператор ∂ действует на $\Omega_*(M)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \partial(\emptyset) &= 0, \\ \partial(\{1\}) &= \partial(\{2\}) = \partial(\{3\}) = \emptyset, \\ \partial(\{1, 2\}) &= \{2\} - \{1\}, \quad \partial(\{1, 3\}) = \{3\} - \{1\}, \quad \partial(\{2, 3\}) = \{3\} - \{2\}, \\ \partial(\{1, 2, 3\}) &= \{1, 2\} - \{1, 3\} + \{2, 3\}. \end{aligned}$$

Линейные операторы удобно представлять в виде матриц. Очевидно, что матрица оператора ∂ равна транспонированной матрице оператора d . Имеем

$$\begin{aligned} \text{на 0-формах} \quad d &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \partial = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \\ \text{на 1-формах} \quad d &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \partial = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \\ \text{на 2-формах} \quad d &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad \partial = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Несложно проверить, что оператор Лапласа $\Delta = d\partial + \partial d = 3 \cdot \text{Id}$.

Рассмотрим второй пример: $M_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$. В этом случае

$$\begin{aligned} d(\emptyset) &= \{1\} + \{2\} + \{3\} + \{4\}, \\ d(\{1\}) &= -\{1, 2\}, \quad d(\{2\}) = \{1, 2\} - \{2, 3\} - \{2, 4\}, \\ d(\{3\}) &= \{2, 3\}, \quad d(\{4\}) = \{2, 4\}, \\ d(\{1, 2\}) &= d(\{2, 3\}) = d(\{2, 4\}) = 0. \end{aligned}$$

Обратим внимание на изменения в таблице дифференцирования по сравнению с комплексом M_1 . Они связаны с топологией комплекса M_2 : точка $\{2\}$ имеет три входящих ребра, в то время как остальные точки имеют только одно.

Далее,

$$\begin{aligned} \partial(\emptyset) &= 0, \\ \partial(\{1\}) &= \partial(\{2\}) = \partial(\{3\}) = \partial(\{4\}) = \emptyset, \\ \partial(\{1, 2\}) &= \{2\} - \{1\}, \quad \partial(\{2, 3\}) = \{3\} - \{2\}, \quad \partial(\{2, 4\}) = \{4\} - \{2\}. \end{aligned}$$

Поскольку комплекс уже не является симплексом, оператор Лапласа становится недиагональным:

$$\text{на 0-формах} \quad \Delta = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{на 1-формах} \quad \Delta = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Внешнее произведение. Рассмотрим снова $M = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \emptyset \wedge x &= 0 \quad \text{для любого } x, \\ \{1\} \wedge \{1\} &= \{1\}, \quad \{2\} \wedge \{2\} = \{2\}, \quad \{3\} \wedge \{3\} = \{3\}, \\ \{1\} \wedge \{2\} &= \{2\} \wedge \{1\} = \{3\} \wedge \{1\} = \{1\} \wedge \{3\} = \{3\} \wedge \{2\} = \{2\} \wedge \{3\} = 0, \\ \{1\} \wedge \{1, 2\} &= \{1, 2\} \wedge \{1\} = \{2\} \wedge \{1, 2\} = \{1, 2\} \wedge \{2\} = \frac{1}{2}\{1, 2\}, \\ \{1\} \wedge \{1, 3\} &= \{1, 3\} \wedge \{1\} = \{3\} \wedge \{1, 3\} = \{1, 3\} \wedge \{3\} = \frac{1}{2}\{1, 3\}, \\ \{2\} \wedge \{2, 3\} &= \{2, 3\} \wedge \{2\} = \{3\} \wedge \{2, 3\} = \{2, 3\} \wedge \{3\} = \frac{1}{2}\{2, 3\}, \\ \{1\} \wedge \{2, 3\} &= \{2, 3\} \wedge \{1\} = \{2\} \wedge \{1, 3\} = \{1, 3\} \wedge \{2\} = \\ &= \{3\} \wedge \{1, 2\} = \{1, 2\} \wedge \{3\} = 0. \end{aligned}$$

Первые нетривиальные результаты имеют вид

$$\begin{aligned} \{1, 2\} \wedge \{1, 3\} &= -\{1, 3\} \wedge \{1, 2\} = \frac{1}{6}\{1, 2, 3\}, \\ \{1, 2\} \wedge \{2, 3\} &= -\{2, 3\} \wedge \{1, 2\} = \frac{1}{6}\{1, 2, 3\}, \\ \{1, 3\} \wedge \{2, 3\} &= -\{2, 3\} \wedge \{1, 3\} = \frac{1}{6}\{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Локальная оболочка и локализация. Пусть $M = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. Пространство “пар” $\Omega_* \otimes \Omega_*$ порождается всевозможными парами симплексов из M .

Рассмотрим несколько примеров локальной оболочки, определенной в части 4.4:

$$\begin{aligned} \bigcup(\emptyset, x) &= x \quad \text{для любого } x, \\ \bigcup(\{1\}, \{1\}) &= \{1\}, \quad \bigcup(\{1\}, \{2\}) = \{1, 2\}, \quad \bigcup(\{1\}, \{1, 2\}) = \{1, 2\}, \\ \bigcup(\{1\}, \{2, 3\}) &= \{1, 2, 3\}, \quad \bigcup(\{1, 2\}, \{1, 3\}) = \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

и т.д. Операции d и ∂ действуют на парах при помощи правила поднятия (см. п. 5.2):

$$\begin{aligned} d(a \otimes b) &= -d(a) \otimes b - (-1)^{|a|} a \otimes d(b), \\ \partial(a \otimes b) &= -\partial(a) \otimes b - (-1)^{|a|} a \otimes \partial(b). \end{aligned}$$

К примеру,

$$\begin{aligned} d(\{1\} \otimes \{1\}) &= +\{1, 2\} \otimes \{1\} + \{1, 3\} \otimes \{1\} + \{1\} \otimes \{1, 2\} + \{1\} \otimes \{1, 3\}, \\ d(\{1, 2\} \otimes \{1\}) &= -\{1, 2, 3\} \otimes \{1\} - \{1, 2\} \otimes \{1, 2\} - \{1, 2\} \otimes \{1, 3\}, \\ d(\{1\} \otimes \{2, 3\}) &= \{1, 2\} \otimes \{2, 3\} + \{1, 3\} \otimes \{2, 3\} - \{1\} \otimes \{1, 2, 3\}, \\ \partial(\{1\} \otimes \{1\}) &= -\emptyset \otimes \{1\} - \{1\} \otimes \emptyset, \\ \partial(\{1, 2\} \otimes \{1\}) &= \{1\} \otimes \{1\} - \{2\} \otimes \{1\} + \{1, 2\} \otimes \emptyset, \end{aligned}$$

$$\partial(\{1\} \otimes \{2, 3\}) = -\emptyset \otimes \{2, 3\} + \{1\} \otimes \{2\} - \{1\} \otimes \{3\}.$$

Локализовать операцию означает отбросить слагаемые правой части с локальной оболочкой, отличной от локальной оболочки аргумента. Получаем

$$\begin{aligned} [d](\{1\} \otimes \{1\}) &= 0, \\ [d](\{1, 2\} \otimes \{1\}) &= -\{1, 2\} \otimes \{1, 2\}, \\ [d](\{1\} \otimes \{2, 3\}) &= \{1, 2\} \otimes \{2, 3\} + \{1, 3\} \otimes \{2, 3\} - \{1\} \otimes \{1, 2, 3\}, \\ [\partial](\{1\} \otimes \{1\}) &= -\emptyset \otimes \{1\} - \{1\} \otimes \emptyset, \\ [\partial](\{1, 2\} \otimes \{1\}) &= -\{2\} \otimes \{1\} + \{1, 2\} \otimes \emptyset, \\ [\partial](\{1\} \otimes \{2, 3\}) &= 0. \end{aligned}$$

Результат локализации зависит от числа свободных точек в паре $e = \sigma_1 \otimes \sigma_2$. Простые соображения приводят к следующим результатам: если свободных точек в паре нет, то $[\partial]e = \partial e$; если все точки в e свободны, то $[\partial]e = 0$; локальный дифференциал $[d]e = 0$, если в e нет свободных точек.

Естественно, в пространстве пар нет ничего специфического: в старших пространствах $\Omega_*^{\otimes p}$ с $p > 2$ (пространствах “троек”, “четвоек” и т.д.) можно рассуждать аналогично.

Локальный оператор Лапласа. По определению он равен $[d][\partial] + [\partial][d]$. Приведем пример явного вычисления этого оператора:

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{loc}}(\{1, 2\} \otimes \{1\}) &= [d](\partial(\{1, 2\} \otimes \{1\})) + [\partial]([d](\{1, 2\} \otimes \{1\})) = \\ &= -[d](\{2\} \otimes \{1\} - \{1, 2\} \otimes \emptyset) - [\partial](\{1, 2\} \otimes \{1, 2\}) = \\ &= (\{1, 2\} \otimes \{1\} - \{2\} \otimes \{1, 2\} + \{1, 2\} \otimes \{1\} + \{1, 2\} \otimes \{2\}) - \\ &\quad - (\{1\} \otimes \{1, 2\} - \{2\} \otimes \{1, 2\} - \{1, 2\} \otimes \{1\} + \{1, 2\} \otimes \{2\}) = \\ &= 3 \cdot \{1, 2\} \otimes \{1\} - \{1\} \otimes \{1, 2\}. \end{aligned}$$

Такие вычисления и приводят к результатам, описанным в п. 7.3, 7.4.

СЛУЧАЙ 1. На пространстве $\Omega_*^{\otimes 2}(\{1, 2\}, \{2\})$ с базисом

$$(1, 0) = \{1\} \otimes \{1, 2\}, \quad (0, 1) = \{1, 2\} \otimes \{1\}$$

матрица локального оператора Лапласа имеет вид

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},$$

при этом собственному значению 2 отвечает собственное подпространство $(1, 1)$, собственному значению 4 – собственное подпространство $(-1, 1)$.

СЛУЧАЙ 2. На пространстве $\Omega_*^{\otimes 2}(\{1, 2, 3\}, \{2\})$ с базисом

$$(1, 0) = \{1, 3\} \otimes \{1, 2, 3\}, \quad (0, 1) = \{1, 2, 3\} \otimes \{1, 3\}$$

матрица локального оператора Лапласа имеет вид

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix},$$

собственному значению 4 отвечает собственное подпространство $(-1, 1)$, собственному значению 6 – собственное подпространство $(1, 1)$.

СЛУЧАЙ 3. На пространстве $\Omega_*^{\otimes 2}(\{1, 2\}, \{1, 2\})$ с базисом

$$\begin{aligned} (1, 0, 0, 0) &= \emptyset \otimes \{1, 2\}, & (0, 1, 0, 0) &= \{1\} \otimes \{2\}, \\ (0, 0, 1, 0) &= \{2\} \otimes \{1\}, & (0, 0, 0, 1) &= \{1, 2\} \otimes \emptyset \end{aligned}$$

матрица локального оператора Лапласа имеет вид

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

собственному значению 0 отвечает собственное подпространство $(1, -1, 1, 1)$, собственному значению 2 – собственное подпространство $(0, 1, 1, 0) \oplus (-1, 0, 0, 1)$, собственному значению 4 – собственное подпространство $(1, 1, -1, 1)$.

Формула (75) объясняет все эти результаты. Можно сравнить случаи 1 и 2, чтобы пронаблюдать появление знакового множителя $(-1)^x$.

П.3. Дискретная квантовая теория поля. У всех элементов конструкции, изложенной выше, есть прямая физическая интерпретация. Например, локальный оператор Лапласа Δ_{loc} можно понимать как оператор Гамильтона для дискретной квантовой теории поля, заданной на фоковском фазовом пространстве

$$\Omega_*^* = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \Omega_*^{\otimes p},$$

которое строится из одночастичного пространства состояний Ω_* . Одночастичные состояния описываются формами на симплицальном комплексе (волновыми функциями). Заметим, что $\Delta_{\text{loc}} = 0$ для одной частицы и имеет интересный спектр для двух, трех и т.д. частиц, что позволяет интерпретировать его как оператор взаимодействия. Исследование теоретико-полевых свойств теорий такого вида представляет определенный интерес.

П.4. Обращение локального оператора Лапласа. Обращение локального оператора Лапласа необходимо для того, чтобы построить решение (79). Мы предлагаем комбинаторное правило действия оператора Δ_{loc}^{-1} на любой набор из p симплексов e , $\Delta_{\text{loc}}^{-1}e = ([d][\partial] + [\partial][d])^{-1}(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$, которое состоит в следующем: результат действия оператора можно вычислить как сумму по всем размещениям свободных

точек в p групп (симплексов набора). При этом несвободные точки остаются на своих местах. Размещения входят в сумму с весами

$$\begin{aligned} F(k, n, j = k) &= \frac{1}{F_0}(Q_0^0), \\ F(k, n, j = k - 1) &= \frac{1}{F_0}(Q_1^0 + Q_1^1(n - k)), \\ F(k, n, j = k - 2) &= \frac{1}{F_0}(Q_2^0 + Q_2^1(n - k) + Q_2^2(n - k)(n - k + 1)), \\ F(k, n, j = k - 3) &= \frac{1}{F_0}(Q_3^0 + Q_3^1(n - k) + Q_3^2(n - k)(n - k + 1) + \\ &\quad + Q_3^3(n - k)(n - k + 1)(n - k + 2)) \end{aligned}$$

и т.д., где $F_0 = p^k n(n - 1)(n - 2) \dots (n - k)$, $Q_b^a = C_b^a p^a (k - a)!$ и j – это число свободных точек в размещении, которые были перемещены в симплекс, отличный от того, в котором они находились исходно. Кроме того, каждое размещение должно быть взято со знаком $(-1)^{s^1}(-1)^{s^2}$. Множитель $(-1)^{s^1}$ равен четности перестановки свободных точек, связанной с размещением. Множитель $(-1)^{s^2}$ равен четности числа прыжков свободных точек над несвободными в процессе размещения. Это правило дает те же результаты, что и основная спектральная формула (78), но оно более удобно с вычислительной точки зрения по причинам, изложенным в п. 7.6.

П.5. Дискретные формы и операции: коцепное описание. В представлении коцепей дискретная p -форма – это функция на p -симплексах, которая, очевидно, может быть представлена как функция $f(i, j, \dots)$ от $p + 1$ вершин $i, j, \dots$ симплекса. Интересно заметить, что нижеследующие формулы никак не зависят от выбора симплициального комплекса. Они отражают свойства локальных операций в коцепной формулировке.

Дифференциал. Дифференциал действует следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{на 0-формах } f(i) : \quad & (df)(i, j) = f(j) - f(i), \\ \text{на 1-формах } \psi(i, j) : \quad & (d\psi)(i, j, k) = \psi(i, j) - \psi(i, k) + \psi(j, k), \\ \text{на 2-формах } \rho(i, j, k) : \quad & (d\rho)(i, j, k, l) = -\rho(i, j, k) + \rho(i, j, l) - \rho(i, k, l) + \rho(j, k, l) \end{aligned}$$

и т.д.

Внешнее произведение. Внешнее произведение действует следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{0-форма } f \text{ и 0-форма } g : \quad & \wedge (f, g)(i) = f(i) g(i), \\ \text{0-форма } f \text{ и 1-форма } \psi : \quad & \wedge (f, \psi)(i, j) = \frac{1}{2} [f(i) + f(j)] \psi(i, j), \\ \text{0-форма } f \text{ и 2-форма } \rho : \quad & \wedge (f, \rho)(i, j, k) = \frac{1}{3} [f(i) + f(j) + f(k)] \rho(i, j, k), \\ \text{1-форма } a \text{ и 1-форма } b : \quad & \wedge (a, b)(i, j, k) = \frac{1}{6} [a(i, k)b(j, k) + a(i, j)b(j, k) - \\ & - a(j, k)b(i, k) + a(i, j)b(i, k) - a(j, k)b(i, j) - a(i, k)b(i, j)], \end{aligned}$$

1-форма a и 2-форма b :
$$\wedge(a, b)(i, j, k, l) = \frac{1}{12} \left[a(i, l)b(j, k, l) + \right. \\ + a(i, k)b(j, k, l) + a(i, j)b(j, k, l) - a(j, l)b(i, k, l) - \\ - a(j, k)b(i, k, l) + a(i, j)b(i, k, l) + a(k, l)b(i, j, l) - \\ - a(j, k)b(i, j, l) - a(i, k)b(i, j, l) + a(k, l)b(i, j, k) + \\ \left. + a(j, l)b(i, j, k) + a(i, l)b(i, j, k) \right],$$

2-форма a и 2-форма b :
$$\wedge(a, b)(i, j, k, l, p) = \frac{1}{30} \left[-a(i, j, l)b(j, k, p) + \right. \\ + a(i, j, p)b(i, k, l) + a(k, l, p)b(i, j, p) + a(j, k, l)b(i, j, p) + \\ + a(i, k, l)b(i, j, p) + a(k, l, p)b(i, j, l) + a(k, l, p)b(i, j, k) + \\ + a(j, l, p)b(i, j, k) + a(j, k, l)b(i, l, p) + a(i, j, k)b(i, l, p) + \\ + a(j, k, l)b(i, k, p) + a(i, j, k)b(k, l, p) + a(i, j, k)b(j, l, p) + \\ + a(i, l, p)b(j, k, p) + a(i, l, p)b(j, k, l) + a(i, k, p)b(j, k, l) + \\ + a(j, k, p)b(i, l, p) + a(i, j, p)b(k, l, p) + a(i, j, l)b(k, l, p) - \\ - a(i, k, p)b(j, l, p) - a(j, k, p)b(i, k, l) - a(j, l, p)b(i, k, l) - \\ - a(i, j, l)b(i, k, p) - a(j, l, p)b(i, k, p) - a(i, k, l)b(j, k, p) + \\ + a(i, l, p)b(i, j, k) + a(i, j, p)b(j, k, l) - a(i, k, l)b(j, l, p) - \\ \left. - a(i, k, p)b(i, j, l) - a(j, k, p)b(i, j, l) \right]$$

и т.д.

Ассоциатор. Ассоциатором умножения $\wedge$ называется трилинейная операция

$$\wedge^2(a, b, c) = \wedge(a, \wedge(b, c)) - \wedge(\wedge(a, b), c).$$

Эта операция, как и $\wedge$, является локальной. В коцепной формулировке она может быть представлена следующими формулами (три числа в (n_1, n_2, n_3) обозначают степени форм a, b, c соответственно):

$$(1, 0, 0) :$$

$$\wedge^2(a, b, c)(i, j) = \frac{1}{4} [a(i, j)b(j)c(j) + a(i, j)b(i)c(i) - c(j)a(i, j)b(i) - c(i)a(i, j)b(j)],$$

$$(0, 1, 1) :$$

$$\wedge^2(a, b, c)(i, j, k) = \frac{1}{36} \left[-a(k)b(i, k)c(j, k) + 2a(k)b(i, j)c(j, k) + a(k)b(j, k)c(i, k) + \right. \\ + 2a(k)b(i, j)c(i, k) + a(k)b(j, k)c(i, j) + 2a(j)b(i, k)c(j, k) - \\ - a(j)b(i, j)c(j, k) + a(j)b(j, k)c(i, k) - a(j)b(i, j)c(i, k) + \\ + a(j)b(j, k)c(i, j) - 2a(j)b(i, k)c(i, j) - a(i)b(i, k)c(j, k) - \\ - a(i)b(i, j)c(j, k) - 2a(i)b(j, k)c(i, k) - a(i)b(i, j)c(i, k) - \\ \left. - 2a(i)b(j, k)c(i, j) + a(i)b(i, k)c(i, j) + a(k)b(i, k)c(i, j) \right],$$

$(1, 1, 1) :$

$$\begin{aligned} \wedge^2(a, b, c)(i, j, k, l) = & \frac{1}{72} \left[c(i, j)a(i, k)b(k, l) + c(k, l)a(i, k)b(i, j) - c(j, l)a(k, l)b(i, k) - \right. \\ & - c(j, l)a(i, l)b(i, k) + c(j, l)a(j, k)b(i, k) - c(j, l)a(i, j)b(i, k) - \\ & - c(j, k)a(k, l)b(i, l) + c(j, k)a(i, k)b(i, l) - c(j, k)a(j, l)b(i, l) + \\ & + c(j, k)a(i, j)b(i, l) + c(i, l)a(k, l)b(j, k) + c(i, l)a(j, l)b(j, k) - \\ & - c(i, l)a(i, k)b(j, k) - c(i, l)a(i, j)b(j, k) + c(i, k)a(k, l)b(j, l) - \\ & - c(i, k)a(j, k)b(j, l) + c(i, k)a(i, l)b(j, l) + c(i, k)a(i, j)b(j, l) - \\ & - c(i, j)a(j, l)b(k, l) - c(i, j)a(j, k)b(k, l) - c(i, j)a(i, l)b(k, l) + \\ & + a(i, l)b(j, k)c(k, l) + a(i, l)b(j, k)c(j, l) + a(i, k)b(j, l)c(k, l) - \\ & - a(i, k)b(j, l)c(j, k) - a(i, j)b(k, l)c(j, l) - a(i, j)b(k, l)c(j, k) - \\ & - a(j, l)b(i, k)c(k, l) - a(j, l)b(i, k)c(i, l) - a(j, k)b(i, l)c(k, l) + \\ & + a(j, k)b(i, l)c(i, k) - a(i, j)b(k, l)c(i, l) - a(i, j)b(k, l)c(i, k) + \\ & + a(k, l)b(i, j)c(j, l) + a(k, l)b(i, j)c(i, l) - a(j, k)b(i, l)c(j, l) + \\ & + a(j, k)b(i, l)c(i, j) + a(i, k)b(j, l)c(i, l) + a(i, k)b(j, l)c(i, j) + \\ & + a(k, l)b(i, j)c(j, k) + a(k, l)b(i, j)c(i, k) + a(j, l)b(i, k)c(j, k) - \\ & - a(j, l)b(i, k)c(i, j) - a(i, l)b(j, k)c(i, k) - a(i, l)b(j, k)c(i, j) + \\ & \left. + c(k, l)a(j, l)b(i, j) + c(k, l)a(i, l)b(i, j) + c(k, l)a(j, k)b(i, j) \right] \end{aligned}$$

и т.д. Ассоциатор имеет определенные свойства симметрии, которые следуют из косой симметрии $\wedge$ -произведения.

П.6. Старшая операция $m = m^{(3)}$. Старшая операция $m = m^{(3)}$ определяется как решение уравнения

$$dm(a, b, c) + m(da, b, c) + (-1)^{|a|}m(a, db, c) + (-1)^{|a|+|b|}m(a, b, dc) = ((a \wedge b) \wedge c - a \wedge (b \wedge c)).$$

Данная статья посвящена решению таких уравнений. Прежде всего, приведем пример “наивного” решения, полученного с использованием формулы (67). Это решение нелокально и, следовательно, зависит от того, на каком комплексе мы работаем. Для примера рассмотрим 2-диск

$$M = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Тогда решение дается формулой $m(a, b, c)_\sigma = -(1/3)\partial \wedge^2(a, b, c)_\sigma$. В случае, когда ϕ — это 0-форма, а ψ_1, ψ_2 — 1-формы, имеем

$$\begin{aligned} m(\phi, \psi_1, \psi_2)(1, 2) &= \frac{1}{3} \wedge^2(f, \psi_1, \psi_2)(1, 2, 3), \\ m(\phi, \psi_1, \psi_2)(1, 3) &= -\frac{1}{3} \wedge^2(f, \psi_1, \psi_2)(1, 2, 3), \\ m(\phi, \psi_1, \psi_2)(2, 3) &= \frac{1}{3} \wedge^2(f, \psi_1, \psi_2)(1, 2, 3). \end{aligned}$$

Для того чтобы вычислить значение $m(\phi, \psi_1, \psi_2)$ на симплексе $\{1, 2\}$, нам нужно знать значения форм ϕ, ψ_1, ψ_2 на симплексах вне $\{1, 2\}$, т.е. фактически нам нужно знать их значения на всем симплицциальном комплексе, и это характерно для нелокальных решений типа (67).

Перейдем теперь к основному результату этой статьи: локальному решению (79). Рассмотрим старшую операцию $m^{(3)}$, вычисленную по формуле (79). Множители типа $1/54$ характерны для процедуры обращения локального оператора Лапласа.

$$(0, 1, 1) :$$

$$m(a, b, c)(i, j) = \frac{1}{8} [a(j)b(i, j)c(i, j) - a(i)b(i, j)c(i, j)],$$

$$(1, 1, 1) :$$

$$\begin{aligned} m(a, b, c)(i, j, k) = \frac{1}{54} [& -a(j, k)b(j, k)c(i, k) + a(j, k)b(j, k)c(i, j) + 2a(j, k)b(i, k)c(j, k) + \\ & + a(j, k)b(i, k)c(i, k) - 2a(j, k)b(i, j)c(j, k) + a(j, k)b(i, j)c(i, j) - \\ & - a(i, k)b(j, k)c(j, k) - 2a(i, k)b(j, k)c(i, k) + a(i, k)b(i, k)c(j, k) + \\ & + a(i, k)b(i, k)c(i, j) - 2a(i, k)b(i, j)c(i, k) - a(i, k)b(i, j)c(i, j) + \\ & + a(i, j)b(j, k)c(j, k) - 2a(i, j)b(j, k)c(i, j) + a(i, j)b(i, k)c(i, k) + \\ & + 2a(i, j)b(i, k)c(i, j) + a(i, j)b(i, j)c(j, k) - a(i, j)b(i, j)c(i, k)]. \end{aligned}$$

С ростом степеней форм-аргументов выражение быстро становится длинным. В этом нет ничего удивительного: число слагаемых растет как число способов разместить симплексы-аргументы внутри симплекса-результата. Явные выражения для старших операций $m^{(p)}$ также становятся все более и более громоздкими с ростом p . Однако несмотря на это, любое явное выражение можно получить (и выписать), поскольку найдена явная формула (79).

Благодарности. Наша работа частично поддержана Федеральным агентством по атомной энергии (объединенный грант № 06-01-92059-СЕ), проектом NWO (грант № 047.011.2004.026), INTAS (грант № 05-1000008-7865), проектом ANR-05-BLAN-0029-01 (А. Ю. Морозов), РФФИ (гранты № 07-02-00642 (А. Ю. Морозов и Ш. Р. Шакиров) и № 07-02-01161 (В. В. Долотин)), Программой поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-8004.2006.2).

Список литературы

- [1] E. Witten, *Comm. Math. Phys.*, **118**:3 (1988), 411–449; *Mirror manifolds and topological field theory*, [arXiv: hep-th/9112056](#); A. Losev, I. Polyubin, *Internat. J. Modern Phys. A*, **10**:29 (1995), 4161–4178; [arXiv: hep-th/9305079](#); M. Alexandrov, M. Kontsevich, A. Schwarz, O. Zaboronsky, *Internat. J. Modern Phys. A*, **12**:7 (1997), 1405–1429; [arXiv: hep-th/9502010](#); A. Losev, N. Nekrasov, S. Shatashvili, *Nucl. Phys. B*, **534**:3 (1998), 549–611; [arXiv: hep-th/9711108](#).
- [2] C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, *Phys. Lett. B*, **52**:3 (1974), 344–346; *Comm. Math. Phys.*, **42**:2 (1975), 127–162; И. В. Тюгин, *Калибровочная инвариантность в теории поля и статистической физике в операторной формулировке*, Препринт № 39, ФИАН СССР, М., 1975; R. Stora, “Algebraic structure and topological origin of anomalies”, *Progress in*

- Gauge Field Theory*, Proc. NATO Adv. Study Inst. (Cargèse, France, September 1–15, 1983), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B: Phys., **115**, eds. G. 't Hooft, A. Jaffe, H. Lehmann et al., Plenum Press, New York, 1984, 543–562; I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky, *Nucl. Phys. B*, **234**:1 (1984), 106–124; A. Schwarz, *Comm. Math. Phys.*, **155**:2 (1993), 249–260; [arXiv: hep-th/9205088](#).
- [3] J. D. Stasheff, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **108**:2 (1963), 275–292; 293–312; “Differential graded Lie algebras, quasi-Hopf algebras and higher homotopy algebras”, *Quantum Groups* (Leningrad, 1990), Lecture Notes in Math., **1510**, ed. P. P. Kulish, Springer, Berlin, 1992, 120–137; E. Getzler, J. D. S. Jones, *Illinois J. Math.*, **34**:2 (1990), 256–283; B. Keller, *Homology Homotopy Appl.*, **3**:1 (2001), 1–35; Addendum: **4**:1 (2002), 25–28; [arXiv: math.RA/9910179](#); T. Tradler, M. Zeinalian (Appendix: D. Sullivan), *Algebr. Geom. Topol.*, **7** (2007), 233–260; [arXiv: math/0309455](#).
- [4] A. Losev, *Lectures at Dombai and Dubna Schools*, 2004, unpublished.
- [5] Л. С. Понтрягин, *Основы комбинаторной топологии*, Гостехиздат, М.–Л., 1947; В. В. Прасолов, *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*, МЦНМО, М., 2004; В. В. Прасолов, *Элементы теории гомологий*, МЦНМО, М., 2006.
- [6] J. Dodziuk, *Amer. J. Math.*, **98**:1 (1976), 79–104; D. H. Adams, *Phys. Rev. Lett.*, **78**:22 (1997), 4155–4158; *R-torsion and linking numbers from simplicial abelian gauge theory*, [arXiv: hep-th/9612009](#); Samik Sen, Siddhartha Sen, J. C. Sexton, D. H. Adams, *Phys. Rev. E*, **61**:3 (2000), 3174–3185; [arXiv: hep-th/0001030](#); R. Hiptmair, *Discrete Hodge operators: An algebraic perspective*, PIER, EMW Publishing, Cambridge, MA, 2001, 247–269; V. de Beauce, S. Sen, *Discretising geometry and preserving topology I: A discrete exterior calculus*, [arXiv: hep-th/0403206](#); *Discretising differential geometry via a new product on the space of chains*, [arXiv: hep-th/0610065](#).
- [7] A. Kozak, *Discretization of Chern–Simons like theories*, 2004–2006, unpublished; P. Mnev, *Notes on symplectic BF theory*, [arXiv: hep-th/0610326](#).
- [8] V. Dolotin, A. Morozov, *Introduction to Non-Linear Algebra*, World Scientific, Hackensack, NJ, 2007; [arXiv: hep-th/0609022](#).
- [9] V. Dolotin, A. Morozov, Sh. Shakirov, *Higher nilpotent analogues of A_∞ -structure*, [arXiv: 0704.2884](#).
- [10] B. Zumino, “Chiral anomalies and differential geometry”, *Relativity, Groups and Topology*, II, eds. B. S. DeWitt, R. Stora, North-Holland, Amsterdam, 1984, 1291–1322; A. Ю. Морозов, *УФН*, **130**:3 (1986), 337–416; D. Krotov, A. Losev, A. Gorodentsev, *Quantum field theory as effective BV theory from Chern–Simons*, [arXiv: hep-th/0603201](#).

Поступила в редакцию 20.04.2007