Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Домрин, Аналогии вихрей Гинзбурга–Ландау, *ТМФ*, 2000, том 124, номер 1, 18–35

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf623>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:33:38

© 2000 г.

А. В. Домрин*

АНАЛОГИ ВИХРЕЙ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ

Рассматривается статическое одномерное уравнение Гинзбурга–Ландау (на отрезке или окружности) с большим параметром λ . Показано, что при $\lambda \rightarrow \infty$ существуют решения, асимптотическое поведение которых напоминает поведение двумерных вихревых решений.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе изучаются вопросы существования, кратности и асимптотического поведения при $\lambda \rightarrow \infty$ для экстремалей $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ функционала

$$\Pi_\lambda(u) = \int_\Omega \{|u'(x)|^2 + \lambda V(|u(x)|^2)\} dx, \quad (1)$$

где Ω – одномерное многообразие (т.е. отрезок или окружность), а $V(s)$ – гладкая неотрицательная функция некоторого специального вида на $[0, +\infty)$ (точные условия на $V(s)$ приведены ниже в формулировках теорем 1–3, в любом случае эти условия выполняются для функции $V(s) = (s - 1)^2$).

Уравнение Эйлера–Лагранжа для функционала (1) имеет вид

$$u'' = \lambda u V'(|u|^2). \quad (2)$$

При $V(s) = (s - 1)^2$ оно называется (одномерным) статическим уравнением Гинзбурга–Ландау. Его двумерная версия (где роль Ω играет ограниченная звездная область в $\mathbb{R}^2$) изучалась в книге [1], результаты которой можно интерпретировать как указание на существование вихрей в тонких сверхпроводящих пленках (о других физических и математических аспектах этой задачи см. [1–3]). Согласно [1] для всякого семейства минимизаторов u_λ ($\lambda \rightarrow \infty$) двумерного аналога функционала (1) с граничным условием Дирихле

$$u_\lambda|_{\partial\Omega} = g,$$

где $|g| \equiv 1$ и

$$\frac{1}{2\pi} \Delta \arg_{\partial\Omega} g = N \geq 1,$$

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: domrin@mi.ras.ru

можно выбрать такую подпоследовательность значений $\lambda \rightarrow \infty$, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} u_\lambda(z) = \left(\prod_{j=1}^N \frac{z - a_j}{|z - a_j|} \right) e^{i\phi(z)}$$

для некоторых точек $a_1, \dots, a_N \in \Omega$ и для некоторой вещественнозначной гармонической функции $\phi(z)$. В частности, предел $|u_\lambda(z)|$ равен единице в каждой точке $z \in \Omega$, за исключением некоторого конечного подмножества.

Основная цель настоящей работы – установить существование семейств решений уравнения (2) с похожим “сингулярным” поведением:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} |u_\lambda(x)| = 1$$

для всех $x \in \Omega$, кроме непустого конечного множества точек, где этот предел равен нулю (это решения классов $\mathcal{A}(\Phi, \lambda)$ и $\mathcal{C}_n(N, \lambda)$, $n \neq 0$, введенные ниже соответственно в теоремах 1 и 2). При этом

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Pi_\lambda(u_\lambda) = \infty,$$

так что функции u_λ не являются минимизаторами функционала (1) (см. раздел 5). Мы рассматриваем эти решения как *одномерные аналоги вихрей Гинзбурга–Ландау* и надеемся, что их изучение (в частности, изучение соответствующего волнового уравнения) прольет свет на открытые вопросы динамики вихрей, сформулированные в книге [2].

Опишем подробнее решения уравнения (2) на $\Omega = [-1, 1]$, удовлетворяющие условию $u(\Omega) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и граничным условиям Дирихле $u(-1) = \zeta_1$, $u(1) = \zeta_2$, где $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$ и $|\zeta_1| = |\zeta_2| = 1$. Поскольку $u(x) \neq 0$ на $[-1, 1]$, то $u(x) = |u(x)|e^{i\theta(x)}$ для некоторой непрерывной функции $\theta: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Целая часть числа $(\theta(1) - \theta(-1))/\pi$ играет роль топологического инварианта (числа обходов вокруг нуля), что должно быть явно учтено в условии задачи. Кроме того, $\theta(x) - \theta(0)$ есть нечетная монотонная функция на $[-1, 1]$, а $|u(x)|$ – четная функция, которая на $(0, 1]$ строго возрастает (см. ниже лемму 3). Поэтому удобно фиксировать произвольное число $\Phi > 0$ и рассмотреть следующую задачу Дирихле для уравнения (2):

$$u'' = \lambda u V'(|u|^2), \quad |u(\pm 1)| = 1, \quad \theta(-1) = -\Phi, \quad \theta(1) = \Phi. \quad (3)$$

Приблизительная формулировка основного результата такова: если $\Phi > \pi/2$, то предел графиков решений задачи (3) (т.е. множеств $u_\lambda([-1, 1])$) при $\lambda \rightarrow \infty$ либо равен дуге единичной окружности $\{e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid -\Phi \leq \theta \leq \Phi\}$ (регулярный случай), либо получается из этой дуги заменой $\{e^{i\theta} \mid -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2\}$ на прямолинейный отрезок с концами $\pm i$ (сингулярный случай), причем обе возможности реализуются. Если же $0 < \Phi < \pi/2$, то возможен лишь регулярный случай (случай $0 < \Phi \leq \pi/2$ см. в разделе 5). Точную формулировку первой части этого утверждения дает

ТЕОРЕМА 1. Пусть $V: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция, удовлетворяющая условиям $V(s) \geq 0$ на $[0, +\infty)$, $V'(s) < 0$ на $[0, 1)$, $V'(s) > 0$ на $(1, +\infty)$, $V(1) = V'(1) = 0$ и $V''(1) > 0$. Фиксируем произвольное $\epsilon_0 \in (0, 1/2)$. Обозначим через $\mathcal{A}(\Phi, \lambda)$ множество всех решений $u: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ задачи (3) класса $C^2([-1, 1])$, удовлетворяющих условию $|u(0)| < \epsilon_0$, а через $\mathcal{B}(\Phi, \lambda)$ — множество всех таких решений, для которых выполнено $|u(0)| > 1 - \epsilon_0$. Тогда для любого $\Phi > \pi/2$ найдется такое число λ_0 (зависящее от Φ и ϵ_0), что при всех $\lambda \geq \lambda_0$ справедливы следующие утверждения.

А. Всякое решение $u \in C^2([-1, 1])$ задачи (3) при $u([-1, 1]) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ принадлежит либо $\mathcal{A}(\Phi, \lambda)$, либо $\mathcal{B}(\Phi, \lambda)$.

Б. Каждое из множеств $\mathcal{A}(\Phi, \lambda)$, $\mathcal{B}(\Phi, \lambda)$ непусто.

В. Для всякой последовательности $u_n \in \mathcal{B}(\Phi, \lambda_n)$ при $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = e^{i\Phi x}$$

равномерно на $[-1, 1]$.

Г. Для всякой последовательности $u_n \in \mathcal{A}(\Phi, \lambda_n)$ при $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \begin{cases} e^{i(\Phi x + \frac{\pi}{2}(1-x))} & \text{при } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ e^{i(\Phi x - \frac{\pi}{2}(1+x))} & \text{при } x \in [-1, 0), \end{cases}$$

причем сходимость равномерна на компактах в $[-1, 1] \setminus \{0\}$.

Мы также можем считать переменную x временем и интерпретировать переход к пределу $\lambda \rightarrow \infty$ в задаче (3) как метод изучения геодезических на окружности $S^1 = \{|u| = 1\}$ с заданными началом и концом. Действительно, хорошо известно, что если рассматривать задачу Коши для уравнения (2) в предположении, что точка $u(0)$ принадлежит S^1 , а вектор $u'(0)$ касателен к S^1 , причем $u(0)$, $u'(0)$ не зависят от λ , то (единственное) решение $u_\lambda(x)$ этой задачи сходится при $\lambda \rightarrow \infty$ к равномерному движению вдоль S^1 с постоянной скоростью $|u'(0)|$. (Это частный случай общего явления, упомянутого в [4, § 14]. Подробное доказательство и обобщения см. в работе [5].) С этой точки зрения теорема 1 утверждает, что регулярное семейство $\mathcal{B}(\Phi, \lambda)$ действительно сходится к единственной геодезической с данными концами и данным числом оборотов вокруг начала координат (эта геодезическая соответствует движению вдоль S^1 с постоянной скоростью Φ). В то же время сингулярное семейство $\mathcal{A}(\Phi, \lambda)$ сходится к разрывной кривой, которая претерпевает скачок из точки $-i$ в точку i при переходе x через точку 0. В этом случае скорость предельного движения по S^1 при $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ тоже постоянна, но равна $\Phi - \pi/2$, а не Φ .

Аналогичную интерпретацию допускает случай замкнутых геодезических (т.е. решений уравнения (2) на S^1 , см. ниже теорему 2), в котором пределом графиков решений является либо пройденная несколько раз единичная окружность (регулярный случай), либо набор нескольких дуг и диаметров этой окружности (сингулярный случай).

Содержание статьи следующее. После предварительных замечаний, сделанных в разделе 1, в разделе 2 мы доказываем теорему 1. В разделе 3 изучаются решения уравнения (2) на окружности S^1 , удовлетворяющие $u(S^1) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, и доказывается теорема 2, представляющая собой частичный аналог теоремы 1 для случая $V(s) = (s-1)^2$. В разделе 4 описаны решения уравнения (2), удовлетворяющие $u(\Omega) \ni 0$, а раздел 5 содержит некоторые замечания и формулировки открытых вопросов.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Пусть $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ – открытый интервал. Для всякой функции $u: I \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ положим $p(x) = |u(x)|^2$ и $\theta(x) = \arg u(x)$, так что $u(x) = \sqrt{p(x)}e^{i\theta(x)}$. Следующая лемма выражает тот классический факт, что уравнения движения точки в центральном поле эквивалентны совокупности законов сохранения энергии и импульса (мы опускаем простое доказательство).

ЛЕММА 1. *А. Если функция $u \in C^2(I, \mathbb{C} \setminus \{0\})$ удовлетворяет уравнению (2) на интервале I , то существуют константы $c, h \in \mathbb{R}$ такие, что на I выполнены равенства*

$$p\theta' = c\sqrt{\lambda}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{4}p'^2 + \lambda c^2 = \lambda pV(p) + hp. \quad (5)$$

Б. *Обратно, пусть функция $u \in C^2(I, \mathbb{C} \setminus \{0\})$ удовлетворяет уравнениям (4) и (5) для некоторых $c, h \in \mathbb{R}$ и пусть $|u| \not\equiv \text{const}$ ни на каком подынтервале в I . Тогда $u(x)$ удовлетворяет уравнению (2) на интервале I .*

Введем функцию

$$G(b, p) := bp \frac{V(b) - V(p)}{p - b}.$$

Тогда справедлива следующая

ЛЕММА 2. *Пусть функция $u \in C^2(I, \mathbb{C} \setminus \{0\})$ удовлетворяет уравнению (2) на интервале I и пусть точка $x_0 \in I$ такова, что $p'(x_0) = 0$. Тогда $\overline{u(x_0)}u(x_0 + \xi) = u(x_0)\overline{u(x_0 - \xi)}$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$ таких, что $x_0 + \xi, x_0 - \xi \in I$. В частности, $p(x_0 + \xi) = p(x_0 - \xi)$. Кроме того, если обозначить $p(x_0) = b$, то функция $p(x)$ удовлетворяет на интервале I уравнению*

$$p'^2 = 4\lambda(p - b)\frac{1}{b}\{c^2 - G(b, p)\}. \quad (6)$$

Обратно, если функция $u(x) = \sqrt{p(x)}e^{i\theta(x)} \in C^2(I, \mathbb{C} \setminus \{0\})$ удовлетворяет уравнениям (4) и (6) для некоторых $c \in \mathbb{R}$, $b > 0$, и если $|u(x)| \not\equiv \text{const}$ ни на каком подынтервале в I , то $u(x)$ удовлетворяет уравнению (2) на интервале I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим для простоты, что $x_0 = 0$. Тогда функция

$$v(x) := \overline{u(-x)} \frac{u(0)}{u(0)}$$

удовлетворяет уравнению (2), причем $v(0) = u(0)$, $v'(0) = u'(0)$ (последнее эквивалентно предположению $p'(0) = 0$). По теореме единственности $v(x) \equiv u(x)$, откуда вытекает первое утверждение леммы. Уравнение (6) следует из (5), если выразить h через b , подставляя $x = x_0$ в (5). Обратное утверждение также очевидно.

ЛЕММА 3. Пусть функция $u \in C^2([-1, 1], \mathbb{C} \setminus \{0\})$ удовлетворяет уравнению (2) на интервале $(-1, 1)$, $u \not\equiv \text{const}$, $|u(-1)| = |u(1)| = 1$. Тогда $p(x) := |u(x)|^2$ есть четная функция на отрезке $[-1, 1]$, удовлетворяющая условиям $p'(0) = 0$ и $p'(x) > 0$ при $0 < x < 1$, а $\theta(x) - \theta(0)$ есть нечетная функция, производная которой на отрезке $[-1, 1]$ либо всюду положительна, либо всюду отрицательна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что максимальное значение функции $p(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ достигается в некоторой внутренней точке $x_0 \in (-1, 1)$. Тогда $p'(x_0) = 0$ и выполняется уравнение (6). Если $p(x_0) > 1$, то правая часть уравнения (6) отрицательна при всех x , удовлетворяющих неравенству $1 < p(x) < p(x_0)$. Следовательно, $p(x_0) \leq 1$. Поскольку $p(\pm 1) = 1$, получаем $p(x_0) = 1$, и уравнение (5) при $x = x_0$ влечет, что $h = \lambda c^2$. Но тогда $p(x) \equiv 1$ на отрезке $[-1, 1]$. Действительно, в противном случае минимальное значение $p(x)$ на $[-1, 1]$ достигается в некоторой точке $x_1 \in (-1, 1)$. Имеем $p(x_1) < 1$ и $p'(x_1) = 0$. Полагая $x = x_1$ в уравнении (5), получаем

$$h = \frac{\lambda c^2}{p(x_1)} - \lambda V(p(x_1)) < \frac{\lambda c^2}{p(x_1)} < \lambda c^2,$$

что противоречит полученному выше. Поскольку уравнение (2) не имеет решений с $p(x) \equiv 1$, кроме постоянных, мы заключаем, что максимальное значение функции $p(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ равно единице и достигается только при $x = \pm 1$.

Покажем, что $p(x)$ не имеет критических точек, отличных от $x = 0$. В самом деле, если, например, $p'(x_0) = 0$ при некотором $x_0 \in (0, 1)$, то $p(2x_0 - 1) = p(1) = 1$ по лемме 2, что противоречит доказанному в предыдущем абзаце. Значит, точкой минимума $p(x)$ на $[-1, 1]$ является точка $x = 0$. Тогда согласно лемме 2 $\overline{u(0)}u(-x) = u(0)\overline{u(x)}$ на $[-1, 1]$, т.е. функция $p(x)$ четна, а $\theta(x) - \theta(0)$ нечетна. Поскольку $p'(x) \neq 0$ при $x \neq 0$, то $p'(x) > 0$ при $0 < x < 1$.

Из уравнения (4) следует, что производная функции $\theta(x) - \theta(0)$ сохраняет знак на $[-1, 1]$, если только $c \neq 0$. Но при $c = 0$ правая часть уравнения (6) (при $b = p(0)$) отрицательна для $b < p(x) < 1$. Это противоречие завершает доказательство леммы.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Пусть функция $u(x)$ удовлетворяет задаче (3). Из (3) и (4) вытекает, что $c > 0$. Обозначим $b := p(0)$. Правая часть уравнения (6) (при $x_0 = 0$, $p(x_0) = b$) неотрицательна при всех $b \leq p \leq 1$ тогда и только тогда, когда

$$c^2 \geq \Gamma(b) := \max_{p \in [b, 1]} G(b, p). \quad (7)$$

Следующая лемма содержит нужные нам свойства функций $G(b, p)$ и $\Gamma(b)$.

ЛЕММА 4. А. Существует такое $\mu > 0$, что $\Gamma(b) \geq \mu b(1 - b)$ для всех $b \in (0, 1)$.

Б. Существует такое $\delta > 0$, что $\Gamma(b) = -b^2 V'(b)$ для всех $b \in (1 - \delta, 1)$.

В. Существует такое $\delta > 0$, что для каждого $b \in (0, \delta)$ максимум (7) достигается в единственной точке отрезка $[b, 1]$. Обозначим эту точку через $\varphi(b)$. Тогда $\varphi(b)$ есть гладкая строго возрастающая функция на $(0, \delta)$ и $\varphi(1 - 0) = 1$.

Г. $\lim_{b \rightarrow 0} \Gamma(b)/b = V(0)$.

Д. Для каждого $p_0 \in (0, 1)$ найдутся $\alpha, \delta > 0$ такие, что

$$\max_{p \in [b, p_0]} G(b, p) \leq \Gamma(b) - \alpha b$$

для всех $b \in (0, \delta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А. Согласно (7) имеем

$$\Gamma(b) \geq G(b, 1) = b \frac{V(b)}{1 - b}.$$

Поскольку $V'(1) = 0$ и $V''(1) > 0$, то найдется $\mu > 0$ такое, что $V(b)/(1 - b)^2 \geq \mu$ для всех $b \in [0, 1]$.

Б. Определение $\Gamma(b)$ можно переписать в виде

$$\Gamma(b) = \max_{y \in [1, \beta]} \frac{U(\beta) - U(y)}{\beta - y}, \quad U(y) := V(y^{-1}), \quad \beta := b^{-1}. \quad (7')$$

Поскольку $U''(1) = V''(1) > 0$, то функция $U(y)$ строго выпукла в некоторой окрестности точки $y = 1$. Если β находится в этой окрестности, то максимум (7') достигается при $y = \beta$. Следовательно, максимум (7) достигается при $x = b$ и равен $G(b, b) = -b^2 V'(b)$.

В. Поскольку $U''(y) = y^{-4}(V''(y^{-1}) + 2yV'(y^{-1}))$, то найдутся $A, B > 1$ такие, что $U''(y) > 0$ на $[1, A]$ и $U''(y) < 0$ на $[B, +\infty)$. Рассмотрим график функции $z = U(y)$ на плоскости с координатами (y, z) . Поскольку $U(y)$ возрастает на $[1, +\infty)$, то прямая, проходящая через точки $(1, 0)$ и $(B, U(B))$, пересекает этот график ровно в двух точках — $(A_1, U(A_1))$ и $(B_1, U(B_1))$, где $1 < A_1 < A$ и $B < B_1 < +\infty$. Возьмем произвольное $\beta > B_1$. По построению график $U(y)$ над $[A_1, \beta]$ лежит *выше хорды*, поэтому максимум (7') должен достигаться в некоторой точке отрезка $[1, A_1]$. Эта точка $\xi \in [1, A_1]$ характеризуется тем, что в ней график $U(y)$ над отрезком $[\xi, \beta]$ касается своей хорды. В силу выпуклости функции $U(y)$ на $[1, A_1]$ такая точка единственна, и она монотонно стремится к единице при $\beta \rightarrow \infty$. Полагая опять $b = 1/\beta$, получаем требуемое утверждение при $\delta = 1/B_1$.

Г. В обозначениях п. В имеем

$$\Gamma(b) = \frac{b\varphi(b)\{V(b) - V(\varphi(b))\}}{\varphi(b) - b}.$$

Поскольку $\varphi(b) \rightarrow 1$ при $b \rightarrow 0$, получаем требуемое.

Д. Возьмем произвольное $p_1 \in (p_0, 1)$ и выберем δ так, что $p_1 < \varphi(b) < 1$ для всех $b \in (0, \delta)$. Из доказательства п. В следует, что $\max_{p \in [b, p_0]} G(b, p)$ достигается при $p = p_0$, поэтому

$$\Gamma(b) - \max_{p \in [b, p_0]} G(b, p) = G(b, \varphi(b)) - G(b, p_0) \geq G(b, p_1) - G(b, p_0).$$

Поскольку

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{G(b, p_1) - G(b, p_0)}{b} = V(p_0) - V(p_1) > 0,$$

то можно уменьшить δ так, что при всех $b \in (0, \delta)$ будет выполняться неравенство

$$\Gamma(b) - \max_{p \in [b, p_0]} G(b, p) > \alpha b,$$

где $\alpha = (V(p_0) - V(p_1))/2 > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО П. А ТЕОРЕМЫ 1. Из уравнения (4) следует, что $b\theta'(x) \leq c\sqrt{\lambda} \leq \theta'(x)$ для всех $x \in [-1, 1]$. Интегрируя это неравенство по отрезку $[-1, 1]$, получаем

$$b\Phi \leq c\sqrt{\lambda} \leq \Phi, \quad (8)$$

откуда в свою очередь в силу (7) и леммы 4, п. А вытекает, что $\mu b(1-b) \leq \Phi^2/\lambda$. Следовательно, при всех достаточно больших λ имеем либо $b < \epsilon_0$, либо $1-b < \epsilon_0$, т.е. всякое решение задачи (3) принадлежит либо $\mathcal{A}(\Phi, \lambda)$, либо $\mathcal{B}(\Phi, \lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО П. Б ТЕОРЕМЫ 1. Применяя лемму 2 и интегрируя уравнения (6) (при $x_0 = 0$, $p(x_0) = b$) и (4), мы видим, что всякой паре (b, c) , $0 < b < 1$ и $c > \sqrt{\Gamma(b)}$, отвечает решение $u(x)$ задачи (3) с параметрами

$$\sqrt{\lambda} = K(b, c), \quad \Phi = L(b, c), \quad (9)$$

где K и L — следующие функции, определенные на множестве $\{(b, c) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < b < 1, c^2 > \Gamma(b)\}$:

$$K(b, c) := \int_b^1 \frac{\sqrt{b} dp}{2\sqrt{p-b}\sqrt{c^2 - G(b, p)}}, \quad L(b, c) := \int_b^1 \frac{c\sqrt{b} dp}{2p\sqrt{p-b}\sqrt{c^2 - G(b, p)}}. \quad (10)$$

ЛЕММА 5. При произвольном фиксированном $b \in (0, 1)$ функция $L(b, c)$ есть гладкая монотонно возрастающая функция переменной c на интервале $(\sqrt{\Gamma(b)}, +\infty)$ с предельными значениями $L(b, \sqrt{\Gamma(b)} + 0) = +\infty$ и $L(b, +\infty) = \arccos \sqrt{b}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подынтегральное выражение в определении L имеет строго отрицательную производную по c , поэтому и L обладает тем же свойством. Предел подынтегрального выражения при $c \rightarrow +\infty$ равен $\sqrt{b}/(2p\sqrt{p-b})$. По теореме об ограниченной сходимости

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} L(b, c) = \int_b^1 \frac{\sqrt{b} dp}{2p\sqrt{p-b}} = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-b}{b}} = \arccos \sqrt{b}.$$

Пусть теперь $c \rightarrow \sqrt{\Gamma(b)}$. По теореме о монотонной сходимости достаточно доказать, что интеграл от предельной функции равен $+\infty$. Но это следует из того, что функция $\Gamma(b) - G(b, p)$ имеет нуль по меньшей мере второго порядка в той точке $\xi \in [b, 1]$, где достигается максимальное значение $G(b, p)$ на $[b, p]$, так что предельная функция имеет неинтегрируемую особенность в точке ξ . (Требуется осторожность в случаях $\xi = b$ и $\xi = 1$. Но рассуждение, аналогичное доказательству п. Б леммы 4, показывает, что, во-первых, случай $\xi = 1$ невозможен и, во-вторых, производная функции $\Gamma(b) - G(b, p)$ при $\xi = b$ все же равна нулю в точке ξ .)

Из этой леммы следует, что при любом фиксированном $\Phi > 0$ линия уровня $\{L(b, c) = \Phi\}$ есть график некоторой функции $c = c_\Phi(b)$, определенной на интервале $(\cos^2 \Phi, 1)$ при $0 < \Phi \leq \pi/2$ и на всем интервале $(0, 1)$ при $\Phi > \pi/2$. Функции $c_\Phi(b)$ гладкие (по теореме о неявной функции). В частности, $K(b, c_\Phi(b))$ есть непрерывная (и даже гладкая) функция от b . Тем самым для доказательства п. Б теоремы 1 достаточно установить, что *при каждом фиксированном $\Phi > \pi/2$*

$$\lim_{b \rightarrow 0} K(b, c_\Phi(b)) = +\infty, \quad \lim_{b \rightarrow 1} K(b, c_\Phi(b)) = +\infty.$$

Случай $b \rightarrow 0$. Следующая лемма показывает, что при каждом $\Phi > \pi/2$ имеем

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{c_\Phi^2(b)}{\Gamma(b)} = 1. \quad (11)$$

ЛЕММА 6. Пусть $c = \gamma(b)$ – такая функция на $(0, \delta)$, что при некотором $q > 1$ имеем $\gamma^2(b) \geq q\Gamma(b)$ для всех $b \in \{b_1, b_2, \dots\}$, где $b_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(b_n, \gamma(b_n)) = \frac{\pi}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты обозначений допустим, что $\gamma^2(b) \geq q\Gamma(b)$ для всех $b \in (0, \delta)$. Подстановка $p = b + b(1-b)\eta$ дает, что

$$L(b, \gamma(b)) = \int_0^{1/b} \frac{\sqrt{1-b} d\eta}{2\sqrt{\eta}(1+\eta(1-b))} \left\{ 1 - \frac{G(b, b+b(1-b)\eta)}{\gamma^2(b)} \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Условие $\gamma^2(b) \geq q\Gamma(b)$ влечет (равномерную по b) ограниченность подынтегрального выражения интегрируемой на $[0, +\infty)$ функцией $\operatorname{const}/(\sqrt{\eta}(1+\eta/2))$. Это позволяет применить теорему об ограниченной сходимости. Пользуясь неравенством $\gamma^2(b) \geq$

$q\Gamma(b)$ и леммой 4, п. Г, видим, что выражение в фигурных скобках стремится к единице при каждом фиксированном $\eta \in \mathbb{R}$. Таким образом,

$$\lim_{b \rightarrow 0} L(b, \gamma(b)) = \int_0^\infty \frac{d\eta}{2\sqrt{\eta}(1+\eta)} = \frac{\pi}{2}.$$

При любых q, r , $b \leq q \leq r \leq 1$, введем “срезанные” интегралы

$$K_q^r(b, c) := \int_q^r \frac{\sqrt{b} dp}{2\sqrt{p-b}\sqrt{c^2 - G(b, p)}}, \quad L_q^r(b, c) := \int_q^r \frac{c\sqrt{b} dp}{2p\sqrt{p-b}\sqrt{c^2 - G(b, p)}}. \quad (12)$$

Заметим, что выражения (12) имеют смысл при выполнении неравенства

$$c^2 > \max_{p \in [q, r]} G(b, p),$$

которое иногда значительно слабее, чем неравенство $c^2 > \Gamma(b)$.

ЛЕММА 7. Пусть положительная функция $c = \gamma(b)$ на интервале $(0, \delta)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\gamma^2(b) \geq \Gamma(b)$ для всех $b \in (0, \delta)$;
- 2) $\lim_{b \rightarrow 0} \gamma^2(b)/\Gamma(b) = 1$.

Тогда при каждом $q \in (0, 1)$ имеем

$$\lim_{b \rightarrow 0} K_b^q(b, \gamma(b)) = \int_0^q \frac{dp}{2\sqrt{pV(p)}}, \quad \lim_{b \rightarrow 0} L_b^q(b, \gamma(b)) = \frac{\pi}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оба утверждения следуют из теоремы об ограниченной сходимости (в случае $L_b^q(b, \gamma(b))$ надо сначала сделать замену, использованную в доказательстве леммы 6). Условия этой теоремы выполнены согласно лемме 4, п. Д. Предел подынтегрального выражения в $K_b^q(b, \gamma(b))$ вычисляется с помощью условия 2 и леммы 5, п. Г.

В силу равенства (11) функция $\gamma(b) = c_\Phi(b)$ удовлетворяет условиям леммы 7. Поскольку $K(b, c_\Phi(b)) \geq K_b^q(b, c_\Phi(b))$ при каждом $q \in (0, 1)$, то из леммы 7 следует, что

$$\liminf_{b \rightarrow 0} K(b, c_\Phi(b)) \geq \int_0^q \frac{dp}{2\sqrt{pV(p)}}$$

при всех $q \in (0, 1)$. Но последний интеграл стремится к $+\infty$ при $q \rightarrow 1$. Следовательно,

$$\lim_{b \rightarrow 0} K(b, c_\Phi(b)) = +\infty. \quad (13)$$

Случай $b \rightarrow 1$. Из (10) следует, что $cK(b, c) \geq bL(b, c)$ при всех b и c , в частности $c_\Phi(b)K(b, c_\Phi(b)) \geq b\Phi$. Тогда достаточно доказать, что $c_\Phi(b) \rightarrow 0$ при $b \rightarrow 1$. Допустим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_\Phi(b_n) = \alpha > 0$$

для некоторой последовательности $b_n \rightarrow 1$. Согласно лемме 4, п. Б $\lim_{b \rightarrow 1} \Gamma(b) = 0$. Получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\Phi = L(b_n, c_\Phi(b_n)) \leq \text{const}(\alpha) \int_{b_n}^1 \frac{dp}{2\sqrt{p-b_n}} = \text{const}(\alpha) \sqrt{1-b_n} \rightarrow 0.$$

Это противоречие завершает доказательство п. Б теоремы 1.

Доказательство п. В теоремы 1. Если $u_n \in \mathcal{B}(\Phi, \lambda_n)$, то $b_n := |u_n(0)|^2 \rightarrow 1$ при $\lambda_n \rightarrow \infty$ по лемме 4, п. А. Тогда $p_n(x) := |u_n(x)|^2 \rightarrow 1$ равномерно на $[-1, 1]$ по лемме 3. Из (8) также следует, что $c_n \sqrt{\lambda_n} \rightarrow \Phi$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда уравнение (4) дает, что $\theta'_n(x) \rightarrow \Phi$ равномерно на $[-1, 1]$, откуда с учетом (3) получаем, что $\theta_n(x) \rightarrow \Phi x$ (и, следовательно, $u_n(x) \rightarrow e^{i\Phi x}$) равномерно на $[-1, 1]$.

Доказательство п. Г теоремы 1. Фиксируем $\Phi > \pi/2$. Поскольку $b \rightarrow 0 \iff \lambda \rightarrow \infty$ для элементов $\mathcal{A}(\Phi, \lambda)$ (см. (13) и лемму 4, п. А) и всякое решение $u(x)$ задачи (3) удовлетворяет $u(-x) = \overline{u(x)}$, то достаточно доказать, что

$$\lim_{b \rightarrow 0} u_b(x) = e^{i\left(x\Phi + \frac{(1-x)\pi}{2}\right)} \quad (14)$$

равномерно на компактах в $(0, 1]$, где $u_b(x)$ есть решение уравнений (6) и (4), отвечающее паре $(b, c) = (b, c_\Phi(b))$. Положим $p_b(x) := |u_b(x)|^2$, $\theta_b(x) := \arg u_b(x)$ и обозначим через $x = X_b(p)$ функцию, обратную к $p = p_b(x)$. Интегрирование уравнения (6) дает

$$X_b(p) = \frac{K_b^p(b, c_\Phi(b))}{K(b, c_\Phi(b))}.$$

Из леммы 7 и равенства (13) ясно, что $\lim_{b \rightarrow 0} X_b(p) = 0$ при каждом $p \in (0, 1)$. Поскольку $p_0 \leq p_b(x) < 1$ для всех $x \in [X_b(p_0), 1]$, то можно заключить, что

$$\lim_{b \rightarrow 0} p_b(x) = 1 \quad (15)$$

равномерно на компактах в $(0, 1]$.

Обозначим для краткости $c_\Phi(b)$ просто через c . Покажем, что

$$\lim_{b \rightarrow 0} cK(b, c) = \Phi - \frac{\pi}{2}. \quad (16)$$

Действительно, при каждом фиксированном $q \in (0, 1)$ и $b \rightarrow 0$ мы имеем

$$\begin{aligned} \Phi - cK(b, c) &= L(b, c) - cK(b, c) = \int_b^1 \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \frac{c\sqrt{b} dp}{2\sqrt{p-b}\sqrt{c^2 - G(b, p)}} \geq \\ &\geq \int_b^q \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \frac{c\sqrt{b} dp}{2\sqrt{p-b}\sqrt{c^2 - G(b, p)}} \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(последний предел вычисляется так же, как $\lim_{b \rightarrow 0} L_b^q(b, \gamma(b))$ в лемме 7). Поэтому

$$\limsup_{b \rightarrow 0} cK(b, c) \leq \Phi - \frac{\pi}{2}.$$

С другой стороны, при любом $q \in (0, 1)$ согласно лемме 7 имеем

$$cK(b, c) \geq cK_q^1(b, c) \geq qL_q^1(b, c) = q(\Phi - L_b^q(b, c)) \rightarrow q\left(\Phi - \frac{\pi}{2}\right),$$

поэтому

$$\liminf_{b \rightarrow 0} cK(b, c) \geq \Phi - \frac{\pi}{2}.$$

Равенство (16) доказано.

Согласно (4) справедливо соотношение $p_b(x)\theta'_b(x) = cK(b, c)$, поэтому из (15) и (16) следует, что

$$\lim_{b \rightarrow 0} \theta'_b(x) = \Phi - \frac{\pi}{2}$$

равномерно на компактах в $(0, 1]$. Интегрируя это равенство по отрезку $[x, 1]$, получаем

$$\lim_{b \rightarrow 0} \theta_b(x) = \Phi - (1 - x)\left(\Phi - \frac{\pi}{2}\right),$$

что вместе с (15) дает (14).

3. ЗАДАЧА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Фиксируем $T > 0$ и параметризуем $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ отрезком $[0, T]$ по формуле $z = e^{2\pi i x/T}$. Тогда периодические решения уравнения (2) (рассматриваемые как отображения $S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$) степени $N \in \mathbb{Z}$ представляются гладкими функциями $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такими, что

$$u'' = \lambda u V'(|u|^2), \quad u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T), \quad \theta(T) - \theta(0) = 2\pi N \quad (17)$$

(как обычно, $\theta(x)$ определяется формулой $u(x) = |u(x)|e^{i\theta(x)}$). Для всякого решения $u(x)$ задачи (17) такого, что $|u(x)| \not\equiv \text{const}$, определим положительное число n требованием, что минимальный период $|u(x)|$ равен T/n . Следующая лемма описывает структуру решений задачи (17) с заданными N и n (ее доказательство с помощью леммы 2 аналогично доказательству леммы 3 и потому опускается).

ЛЕММА 8. А. При $N = 0$ задача (17) не имеет решений, кроме постоянных.

Б. Пусть $u(x)$ – решение задачи (17) при $N \geq 1$ и $|u| \not\equiv \text{const}$. Положим $p(x) := |u(x)|^2$ и $b := \min_{x \in [0, T]} p(x)$, $t := \max_{x \in [0, T]} p(x)$. Тогда $0 < b < t < 1$.

В. Допустим, что $p(0) = b$ и определим $n \in \{1, 2, \dots\}$ требованием, что минимальный период $p(x)$ равен T/n . Тогда $p'(x) > 0$ при $0 < x < T/2n$, $p(T/2n) = t$ и $p'(x) < 0$ при $T/2n < x < T/n$. Кроме того, $p(x) = p(T/n - x)$ для всех $x \in [0, T/n]$ и $\theta(x + T/n) - \theta(x) = 2\pi N/n$ для всех $x \in [0, (n-1)N/n]$.

Мы формулируем и доказываем следующую теорему только для случая $V(s) = (s-1)^2$, кроме утверждения А, прямое доказательство которого требует лишь выпуклости $V(s)$ на $[0, 1]$. Однако значительная часть доказательства утверждений Б и В (вплоть до леммы 11, п. В) справедлива при тех же предположениях о функции $V(s)$, сделанных в теореме 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $V(s) = (s-1)^2$. При каждом целом $N \geq 1$ обозначим через $\mathcal{C}_0(N, \lambda)$ множество всех решений $u(x)$ задачи (17) таких, что $|u| \equiv \text{const}$, а через $\mathcal{C}_n(N, \lambda)$ ($n = 1, 2, \dots$) – множество всех решений (17) таких, что $|u| \not\equiv \text{const}$ и минимальный период $|u(x)|$ равен T/n . Тогда справедливы следующие утверждения.

А. При каждом $\lambda \geq 4\pi^2 N^2 / T^2 |V'(0)|$ множество $\mathcal{C}_0(N, \lambda)$ состоит из единственного элемента u_λ , причем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} u_\lambda(x) = e^{2\pi i N x / T}$$

равномерно на $[0, T]$.

Б. Существует λ_0 (зависящее от N) такое, что при всех $\lambda \geq \lambda_0$ каждое из множеств $\mathcal{C}_n(N, \lambda)$, $n = 0, 1, \dots, 2N-1$, непусто.

В. Пусть $n \in \{1, \dots, 2N-1\}$. Тогда для любой последовательности $u_k \in \mathcal{C}_n(N, \lambda_k)$ с нормировочными условиями $u_k(0) > 0$ и $|u_k(0)| = \min\{|u_k(x)| \mid 0 \leq x \leq T\}$ при $\lambda_k \rightarrow \infty$ имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x) = \begin{cases} e^{\pi i \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{T} (2N-n) \right)} & \text{при } x \in \left(0, \frac{T}{n} \right), \\ 0 & \text{при } x = 0, \frac{T}{n}, \end{cases}$$

причем сходимость равномерна на компактах в $(0, T/n)$.

В формулировке следующей леммы используется функция $U(y) := V(y^{-1})$, определенная в (7'), и обозначения

$$M(b, t) := K_b^t(b, \sqrt{G(b, t)}), \quad N(b, t) := L_b^t(b, \sqrt{G(b, t)}),$$

где $K_b^t(b, c)$ и $L_b^t(b, c)$ определены в (12). Эти обозначения имеют смысл для всех пар (b, t) , $0 < b < t < 1$, удовлетворяющих условию (18) (см. ниже).

ЛЕММА 9. А. Пусть $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ есть решение задачи (17) класса $C^2([0, T])$ такое, что $|u| \not\equiv \text{const}$. Положим $b := \min_{x \in [0, T]} |u(x)|^2$, $t := \max_{x \in [0, T]} |u(x)|^2$. Тогда для всех $y \in [t^{-1}, b^{-1}]$

$$U(y) \leq \frac{y - t^{-1}}{b^{-1} - t^{-1}} U(t^{-1}) + \frac{b^{-1} - y}{b^{-1} - t^{-1}} U(b^{-1}), \quad (18)$$

т.е. график $U(y)$ на $[t^{-1}, b^{-1}]$ лежит над хордой. В частности, если δ и $\varphi(b)$ определены как в лемме 5, п. В, то при $0 < b < \delta$

$$b < t \leq \varphi(b). \quad (19)$$

Б. Обратно, пусть пара (b, t) , $0 < b < t < 1$, удовлетворяет условию (18) и число $n := \pi N / N(b, t)$ целое. Тогда существует единственное решение $u(x)$ задачи (17) такое, что $\min_{x \in [0, T]} |u(x)|^2 = b$, $\max_{x \in [0, T]} |u(x)|^2 = t$ и минимальный период $|u(x)|$ равен T/n . Соответствующие параметры λ и N суть

$$\frac{T}{2n} \sqrt{\lambda} = M(b, t), \quad \frac{\pi N}{n} = N(b, t). \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А. В силу уравнения (6) имеем

$$p'^2 = 4\lambda(p - b)b^{-1}(c^2 - G(b, p)) = 4\lambda(p - t)t^{-1}(c^2 - G(p, t)).$$

Отсюда следует, что

$$\max_{p \in [b, t]} G(b, p) \leq c^2 \leq \min_{p \in [b, t]} G(p, t).$$

В частности, первое неравенство дает $c^2 \geq G(b, t)$, а второе $-c^2 \leq G(b, t)$, следовательно,

$$c^2 = G(b, t), \quad (21)$$

и условие неотрицательности правой части (6) сводится к неравенствам

$$\max_{p \in [b, t]} G(b, p) \leq G(b, t) \leq \min_{p \in [b, t]} G(p, t).$$

С учетом (7') можно заключить, что каждое из этих неравенств эквивалентно условию (18). Чтобы доказать (19), допустим, что $t > \varphi(b)$. Тогда первое неравенство нарушается при $p = \varphi(b)$.

Б. Это утверждение можно получить интегрированием уравнений (6) и (4) при $c^2 = G(b, t)$.

ЛЕММА 10. Для каждого $\delta > 0$ существует $\lambda_0 = \lambda_0(N, \delta)$ такое, что при $\lambda \geq \lambda_0$ всякое решение $u(x)$ задачи (17), $|u| \not\equiv \text{const}$, удовлетворяет неравенству

$$\min_{x \in [0, T]} |u(x)|^2 < \delta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть b, t – те же, что и в лемме 9, п. А. Из уравнения (4) следует, что $c\sqrt{\lambda} \leq t\theta'(x) \leq \theta'(x)$. Интегрируя это неравенство по отрезку $[0, T]$, получаем, что $c\sqrt{\lambda}T \leq 2\pi N$, т.е. (в силу (21)) $G(b, t) \leq 4\pi^2 N^2 / (T^2 \lambda)$. Поскольку $G(b, t)$ – непрерывная неотрицательная функция на $\{(b, t) \in [0, 1]^2 \mid b \leq t\}$ и $G(b, t) = 0$ только при $b = 0$ или $b = t = 1$, то заключаем, что при достаточно больших λ должно выполняться одно из неравенств: $0 < b < \delta$ либо $1 - \delta < b < t < 1$. Последнее невозможно в силу (18) и строгой выпуклости $U(y)$ в окрестности $y = 1$.

ЛЕММА 11. *Существует $\delta > 0$ такое, что при $b \in (0, \delta)$ справедливы следующие утверждения.*

А. Все пары (b, t) , $b < t < \varphi(b)$, удовлетворяют условию (18).

Б. $G(b, t)$ – гладкая монотонно возрастающая функция переменной t на интервале $(b, \varphi(b))$.

В. $N(b, t)$ – гладкая монотонно возрастающая функция переменной t на $[2/3, \varphi(b))$, причем $N(b, \varphi(b) - 0) = +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А. В обозначениях, введенных в доказательстве леммы 4, п. В, величина $(U(\beta) - U(A_1))/(\beta - A_1)$ монотонно убывает к нулю при $\beta \rightarrow +\infty$ (при $\beta > B_1$). Тогда можно выбрать $B_2 \geq B_1$ так, что для всех $\beta \geq B_2$

$$\frac{U(\beta) - U(A_1)}{\beta - A_1} < \min_{y \in [A_1, B_1]} U'(y).$$

Но из построения A_1, B_1 ясно, что $\max_{\tau \in [A_1, B_1]} (U(\beta) - U(\tau))/(\beta - \tau)$ достигается при $y = A_1$, откуда заключаем, что для всех $\beta \geq B_2$ и $\tau, y \in [A_1, B_1]$ выполняется неравенство

$$\frac{U(\beta) - U(\tau)}{\beta - \tau} < U'(y). \quad (22)$$

Фиксируем $b > B_2^{-1}$ и допустим, что условие (18) не выполняется при некотором t , $b < t < \varphi(b)$. Тогда для некоторого $\mu \in [t^{-1}, b^{-1}]$ точка $(\mu, U(\mu))$ лежит ниже хорды с концами $(t^{-1}, U(t^{-1}))$ и $(b^{-1}, U(b^{-1}))$. Из построения A_1, B_1 следует, что t^{-1} и μ должны лежать на отрезке $[A_1, B_1]$. Но тогда по теореме Лагранжа существует точка $y \in [t^{-1}, \mu] \subset [A_1, B_1]$, в которой не справедливо (22) при $\beta = b^{-1}$, $\tau = t^{-1}$.

Б. Неравенство (22) означает, что $G(b, t) < G(y, y)$ для всех $b \in (0, B_2^{-1}]$ и $t, y \in [B_1^{-1},$

$A_1^{-1}]$, в частности $G(b, t) < G(t, t)$ при таких b, t . По построению A_1, B_1 это неравенство верно и для всех $t \in (b, \varphi(b))$. Теперь требуемый результат вытекает из формулы

$$\frac{\partial G(b, t)}{\partial t} = \frac{b\{G(t, t) - G(b, t)\}}{t(t - b)},$$

проверяемой непосредственным дифференцированием.

В. Проведем доказательство для $V(s) = (s - 1)^2$. Прямое вычисление дает, что знаменатель дроби в (24) (см. ниже) имеет строго отрицательную производную по t при всех $t \geq 2/3$, $b \in (0, \delta)$ и $y \in [0, 1]$. Следовательно, $N(b, t)$ монотонно возрастает по t на интервале $[2/3, \varphi(b))$. Предел $N(b, t)$ при $t \rightarrow \varphi(b)$ вычисляется так же, как в доказательстве леммы 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО П. Б ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $n \in \{1, 2, \dots, 2N - 1\}$. Тогда, полагая $\Phi := \pi N/n$, имеем $\Phi > \pi/2$. Лемма 13 (см. ниже) вместе с леммой 11, п. В показывают, что линия уровня $\{N(b, t) = \Phi\}$ есть график некоторой гладкой функции $t = t_\Phi(b)$ на интервале $(0, \delta)$ и выполняется $2/3 < t_\Phi(b) < \varphi(b)$. Согласно (20) для доказательства достаточно установить, что

$$\lim_{b \rightarrow 0} M(b, t_\Phi(b)) = +\infty. \quad (23)$$

Мы сделаем это для $V(s) = (s - 1)^2$. В этом случае

$$G(b, p) = bp(2 - b - p), \quad \varphi(b) = 1 - \frac{b}{2}, \quad G(b, t) - G(b, p) = b(t - p)(2 - b - t - p),$$

так что подстановка $p = b + y(t - b)$ сводит $M(b, t)$ и $N(b, t)$ к виду

$$\begin{aligned} M(b, t) &= \int_0^1 \frac{dy}{2\sqrt{y(1-y)}\sqrt{2-2b-t-(t-b)y}}, \\ N(b, t) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{bt(2-b-t)} dy}{2(b+y(t-b))\sqrt{y(1-y)}\sqrt{2-2b-t-(t-b)y}}. \end{aligned} \quad (24)$$

При каждом $m \in [0, 1]$ определим $M_0^m(b, t)$ как интеграл по $[0, m]$ от той же функции, что и в $M(b, t)$. Аналогично определим $M_m^1(b, t)$, $N_0^m(b, t)$ и $N_m^1(b, t)$. Следующие леммы являются аналогами лемм 7 и 6, соответственно.

ЛЕММА 12. Пусть $t = \gamma(b)$ — такая функция на $(0, \delta)$, что $t(b) < \varphi(b)$ и $\lim_{b \rightarrow 0} \gamma(b) = 1$. При произвольном $m \in (0, 1)$ имеем

$$\lim_{b \rightarrow 0} M_0^m(b, \gamma(b)) = \int_0^m \frac{dy}{2\sqrt{y(1-y)}}, \quad \lim_{b \rightarrow 0} N_0^m(b, \gamma(b)) = \frac{\pi}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При всех $y \in [0, m]$ имеем

$$2 - 2b - t - (t - b)y \geq 2 - 2b - t - (t - b)m \geq 1 - m + b(m - 2) \geq \frac{1 - m}{2},$$

если b достаточно мало. Это позволяет найти $\lim_{b \rightarrow 0} M_0^m(b, \gamma(b))$ по теореме об ограниченной сходимости. Чтобы найти $\lim_{b \rightarrow 0} N_0^m(b, \gamma(b))$, нужно сначала сделать замену $y = b\eta$ (см. лемму 7), а затем применить теорему об ограниченной сходимости.

ЛЕММА 13. При каждом $\alpha > 1/2$ имеем

$$\lim_{b \rightarrow 0} N(b, 1 - \alpha b) = \frac{\pi}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $1 - \alpha b$ через $t(b)$. По лемме 12 достаточно доказать, что $\lim_{b \rightarrow 0} N_m^1(b, t(b)) = 0$. Но для всех $y \in [0, 1]$ имеем

$$2 - 2b - t(b) - (t(b) - b)y \geq 2 - 2b - t(b) - (t(b) - b) = b(2\alpha - 1),$$

поэтому подынтегральное выражение в определении $N_m^1(b, 1 - \alpha b)$ ограничено функцией $\text{const}(\alpha)/\sqrt{1-y}$, и результат следует по теореме об ограниченной сходимости.

Из лемм 13 и 11, п. В следует, что для любого $\alpha > 1/2$ найдется $\delta(\alpha) > 0$ такое, что $1 - \alpha b < t_\Phi(b) < 1 - b/2$ для всех $b \in (0, \delta(\alpha))$. В частности, $t_\Phi(b) \rightarrow 1$ при $b \rightarrow 0$, так что функция $\gamma(b) = t_\Phi(b)$ удовлетворяет условиям леммы 12. Поскольку при $m \rightarrow 1$

$$\int_0^m \frac{dy}{2\sqrt{y}(1-y)} \rightarrow +\infty,$$

получаем (23).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО П. В ТЕОРЕМЫ 2 подобно доказательству теоремы 1, п. Г. Пусть $u_b(x) = \sqrt{p_b(x)} e^{i\theta_b(x)}$ — решение задачи (17), отвечающее паре $(b, t) = (b, t_\Phi(b))$ (и данному n). Функция $p = p_b(x)$ биективно отображает $[0, T/2n]$ на $[b, t_\Phi(b)]$. Обратная функция $x = X_b(p)$ согласно (23) и лемме 12 удовлетворяет условию $\lim_{b \rightarrow 0} X_b(p) = 0$ при каждом фиксированном $p \in (0, 1)$. Следовательно, $\lim_{b \rightarrow 0} p_b(x) = 1$ равномерно на компактах в $(0, T/2n]$. Теперь, как при доказательстве равенства (16), получаем

$$\lim_{b \rightarrow 0} c\sqrt{\lambda} = \lim_{b \rightarrow 0} \sqrt{bt(2-b-t)} M(b, t) \frac{2n}{T} = \left(\Phi - \frac{\pi}{2} \right) \frac{2n}{T},$$

где $t = t_\Phi(b)$ и $c = \sqrt{G(b, t_\Phi(b))}$. Это определяет $\lim_{b \rightarrow 0} \theta_b(x)$, как в доказательстве теоремы 1, п. Г.

4. РЕШЕНИЯ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ $u(\Omega) \ni 0$

Из теоремы единственности легко следует, что всякое решение $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ уравнения (2), удовлетворяющее условию $u(x_0) = 0$ в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$, становится $\mathbb{R}$ -значным после умножения на $e^{i\phi}$ для некоторого $\phi \in \mathbb{R}$. Аналоги теорем 1 и 2 для вещественнозначных решений содержатся в следующей теореме (мы опускаем ее простое доказательство).

ТЕОРЕМА 3. А. Пусть функция $V(s)$ определена, как в теореме 1. Обозначим через $\mathcal{M}(\lambda)$ множество всех функций $u : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих на отрезке $[-1, 1]$ задаче

$$u'' = \lambda u V'(|u|^2), \quad u(\pm 1) = \pm 1.$$

При каждом $\lambda > 0$ множество $\mathcal{M}(\lambda)$ состоит из единственного элемента u_λ , причем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} u_\lambda(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x \in [-1, 0) \end{cases}$$

равномерно на компактах в $[-1, 1] \setminus \{0\}$.

Б. Пусть $V(s)$, кроме того, удовлетворяет условию $V''(s) > 0$ при $0 \leq s \leq 1$. Фиксируем $T > 0$ и $n \in \{1, 2, \dots\}$. Обозначим через $\mathcal{N}(\lambda, n)$ множество всех функций $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ с минимальным периодом T/n , удовлетворяющих на отрезке $[0, T]$ задаче

$$u'' = \lambda u V'(|u|^2), \quad u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T)$$

и нормировочному условию $u(0) = 0$. Тогда множество $\mathcal{N}(\lambda, n)$ пусто при $\lambda \in [0, \lambda_0]$, где $\lambda_0 := 4\pi^2 n^2 / (T^2 |V'(0)|)$, а при каждом $\lambda > \lambda_0$ множество $\mathcal{N}(\lambda, n)$ состоит из единственного элемента u_λ , причем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} u_\lambda(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left(0, \frac{T}{2n}\right), \\ 0, & x = 0, \frac{T}{2n}, \frac{T}{n}, \\ -1, & x \in \left(\frac{T}{2n}, \frac{T}{n}\right) \end{cases}$$

равномерно на компактах в $(0, T/n) \setminus \{T/2n\}$.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Решения сингулярного семейства не являются минимизаторами. Действительно, если функция u_λ минимизирует функционал Π_λ , то H^1 -норма u_λ не превосходит не зависящей от λ константы $2\Phi^2 = \Pi_\lambda(u_0)$, где $u_0(x) = e^{i\Phi x}$. Но из-за существования компактного вложения $H^1 \subset C^{1/2}$ всякое равномерно ограниченное по H^1 -норме семейство u_λ , $\lambda \rightarrow \infty$, содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность. Тогда из теоремы 1, п. Г следует, что для $u_\lambda \in \mathcal{A}(\Phi, \lambda)$ всегда имеет место равенство $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Pi_\lambda(u_\lambda) = \infty$.

2. Общие потенциалы и интегрируемость. Теоремы 1–3, вероятно, распространяются на случай более общих (не обязательно радиальных) потенциалов на $\mathbb{R}^2$. Можно также поставить вопрос о распространении теории из [1] на этот случай. Отметим, что уравнение (2) при $V(s) = (s-1)^2$ явно интегрируется с помощью эллиптических функций; более того, в случае $V(s) = (s-1)^2$ уравнение (6) для $\Omega = S^1$ формально совпадает с уравнением, которому удовлетворяет высота фиксированной точки на оси вращающегося волчка (см., например, [4, § 30]).

3. Случай $0 < \Phi \leq \pi/2$ в теореме 1. Из леммы 5 и последующих замечаний видно, что при $0 < \Phi < \pi/2$ сингулярного семейства $\mathcal{B}(\Phi, \lambda)$ не существует: функция $K(b, c_\Phi(b))$ определена на интервале $(\cos^2 \Phi, 1)$ и стремится к нулю при $b \rightarrow \cos^2 \Phi$. Однако при $\Phi = \pi/2$ вопрос о том, чему равен предел $K(b, c_{\pi/2}(b))$ при $b \rightarrow 0$, остается открытым. Если этот предел равен $+\infty$, то сингулярное семейство $\mathcal{B}(\Phi, \lambda)$ непусто при $\Phi = \pi/2$. Впрочем, более правдоподобно, что этот предел равен нулю, а роль сингулярного семейства играет множество $\mathcal{M}(\lambda)$ из теоремы 3, п. А.

4. Случай $0 < \pi N/n \leq \pi/2$ в теореме 2. При каждом $n \geq 2N$ остается открытым вопрос, будут ли множества $\mathcal{C}_n(N, \lambda)$ непустыми для достаточно больших λ . Этот вопрос аналогичен заданному в п. 3 и может быть переформулирован так: если $0 < \Phi \leq \pi/2$ (где $\Phi := \pi N/n$), то будет ли функция $M(b, t)$ ограниченной на множестве $\{N(b, t) = \Phi\}$?

5. Кратность решений. Теоремы 1, 2 не дают ответа на вопрос, из скольких элементов состоит множество $\mathcal{A}(\Phi, \lambda)$ (или $\mathcal{C}_n(N, \lambda)$) при фиксированном $\Phi > \pi/2$ (или $n \in \{1, \dots, 2N - 1\}$) и при достаточно больших λ . Ожидаемый ответ: из одного элемента. Он последовал бы, например, если бы было показано, что якобиан $\partial(K, L)/\partial(b, c)$ (или $\partial(M, N)/\partial(b, t)$) сохраняет знак вблизи кривой $\{c^2 = \Gamma(b)\}$ (тогда выражения, стоящие под знаками пределов в (13) и (23), были бы монотонны по b).

Благодарности. Работа выполнена во время пребывания автора в Рурском университете (Бохум, Германия) при поддержке Sonderforschungsbereich-237 (Германия), а также Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 98-01-00-640 и № 99-01-00-969). Автор благодарен профессору А. Г. Сергееву за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения, а также признателен И. В. Маресину за сделанные им замечания о решениях задачи (3).

Список литературы

- [1] *F. Bethuel, H. Brezis, F. Hélein.* Ginzburg–Landau Vortices. Boston: Birkhäuser, 1994.
- [2] *A. Jaffe, C. H. Taubes.* Vortices and Monopoles. Boston: Birkhäuser, 1980.
- [3] *F.-H. Lin.* Static and moving vortices in Ginzburg–Landau theories. In: Nonlinear Partial Differential Equations in Geometry and Physics. The 1995 Barrett Lectures, Knoxville, TN, USA, March 22–24, 1995. Progr. Nonlinear Diff. Equ. Appl. V. 29. Eds. G. Baker and A. Freire. Basel: Birkhäuser, 1997. P. 71–111.
- [4] *В. И. Арнольд.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
- [5] *H. Rubin, P. Ungar.* Commun. Pure Appl. Math. 1957. V. 10. P. 65–87.

Поступила в редакцию 8.X.1999 г.