Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Андреев, Система уравнений для вынужденного комбинационного рассеяния и связанные с ней двойные периодические $A_n^{(1)}$ -цепочки Тоды, *ТМФ*, 2008, том 156, номер 1, 67–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6230>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 13:24:46

© 2008 г.

В. А. Андреев*

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ВЫНУЖДЕННОГО КОМБИНАЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ ДВОЙНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ $A_n^{(1)}$ -ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

Рассмотрена система уравнений, описывающая вынужденное комбинационное рассеяние света. Показано, что решения этой системы выражаются через два решения уравнения синус-Гордон, связанные друг с другом преобразованием Беклунда. Также показано, что эта система является интегрируемой и обладает парой Захарова–Шабата. Показано, что и в общем случае система уравнений, задающих преобразования Беклунда периодических $A_n^{(1)}$ -цепочек Тоды, также является интегрируемой и обладает парой Захарова–Шабата.

Ключевые слова: комбинационное рассеяние, цепочка Тоды, преобразование Беклунда, пара Захарова–Шабата.

Памяти Леонида Александровича Шелепина посвящается

1. ВВЕДЕНИЕ

Исторически так сложилось, что исследования нелинейных интегрируемых уравнений математической физики, обладающих солитонными решениями, были инициированы анализом свойств некоторых хорошо известных уравнений, возникавших в конкретных физических задачах. К их числу относятся уравнение Кортевега–де Фриза, нелинейное уравнение Шредингера, уравнения синус-Гордон, Лиувилля, Ландау–Лифшица и др. [1]

Структуры, обнаруженные в этих уравнениях, затем получали инвариантную интерпретацию, и на ее основе строились бесконечные серии новых интегрируемых уравнений, большая часть которых уже не имела непосредственной физической интерпретации [2].

В качестве таких обобщений уравнений синус-Гордон и Лиувилля были построены цепочки Тоды, периодические и непериодические. Эти цепочки обладают наиболее

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: andrvtad@yandex.ru

простой и наглядной алгебраической структурой, и их удобно использовать для различных модельных построений. В частности, для них наиболее простым способом строятся преобразования Беклунда [3], [4].

Уравнения, которые мы рассматриваем, обладают так называемой $(F-G)$ -парой Захарова–Шабата [5], т.е. являются условием совместности двух линейных систем

$$\begin{aligned}\Psi_x &= F\Psi, \\ \Psi_t &= G\Psi\end{aligned}\tag{1}$$

и могут быть записаны в виде условия нулевой кривизны

$$F_t - G_x + [F, G] = 0.\tag{2}$$

Здесь Ψ – N -компонентный столбец, элементами которого являются функции $\Psi^k(x, t)$, $k = 1, \dots, N$, а F и G – некоторые $(N \times N)$ -матрицы, элементы которых зависят от M неизвестных функций $u^m(x, t)$, $m = 1, \dots, M$, входящих в исходные уравнения. Эти неизвестные функции удовлетворяют уравнению (2).

На системы (1) можно посмотреть и с другой стороны: как на самостоятельные уравнения на неизвестные функции Ψ^k , точнее говоря, как на линейную систему уравнений с переменными коэффициентами, которые удовлетворяют уравнению (2). Решения этой системы нам, как правило, известны. Действительно, при использовании метода обратной задачи рассеяния фактически одновременно строятся и потенциалы, и соответствующие им функции Йоста [6]. В этом смысле система уравнений (1) является интегрируемой.

Однако такая постановка задачи не является содержательной. Мы хотим, чтобы систему уравнений (1), в свою очередь, можно было представить как условие совместности двух новых линейных систем, и записать ее в виде условия нулевой кривизны. Кроме того, хотелось бы, чтобы эти новые уравнения имели самостоятельный физический смысл, отличный от того, какой имеет исходное уравнение (2). Указанных целей удастся достичь, если использовать вместо линейных систем (1) преобразование Беклунда уравнения (2).

В данной работе мы будем рассматривать периодические $A_n^{(1)}$ -цепочки Тоды. Известно, что при $n = 1$ эта цепочка принимает вид уравнения синус-Гордон, которое описывает явление самоиндуцированной прозрачности в двухуровневых средах. Это интегрируемое нелинейное уравнение, обладающее преобразованиями Беклунда, которые связывают уравнение с самим собой. Эти преобразования имеют вид нелинейной системы уравнений, содержащей две неизвестные функции. Оказывается, что система уравнений, задающая преобразования Беклунда уравнения синус-Гордон, сама обладает $(F-G)$ -парой и может быть представлена в виде (2). Кроме того, эта система связана с системой уравнений, описывающей вынужденное комбинационное рассеяние (ВКР) света. Таким образом, решение ВКР-системы выражается через два решения уравнения синус-Гордон, связанные друг с другом преобразованием Беклунда.

Таким образом, оба сформулированных выше требования оказываются выполненными, что, на наш взгляд, оправдывает интерес к уравнениям данного типа.

Алгебраическую структуру, которой обладают эти уравнения при $n = 1$, удается обобщить на произвольные значения n . В результате возникает система уравнений, решения которой выражаются через два решения периодической $A_n^{(1)}$ -цепочки Тоды, связанные друг с другом преобразованием Беклунда. Мы будем называть такие системы двукратными цепочками Тоды.

2. ВЫНУЖДЕННОЕ КОМБИНАЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ

Комбинационное рассеяние света является одним из тех физических процессов, для которых уравнения, их описывающие, вызывают интерес с точки зрения метода обратной задачи рассеяния. Существуют различные варианты таких уравнений, отвечающие той или иной конкретной физической ситуации. В большинстве известных нам работ исследовались в первую очередь аналитические проблемы, возникающие при изучении соответствующей спектральной задачи [7]. В настоящей работе нас интересует алгебраический аспект проблемы.

В работе [8] Шелепин с соавторами предложили уравнения, описывающие процессы рассеяния при возбуждении двухуровневой среды различными методами. В частности, эти уравнения были применены для расчета различных схем активной спектроскопии. Был рассмотрен процесс возбуждения первоначально равновесной среды, связанный со значительным изменением заселенностей непосредственно в ходе распространения интенсивных коротких импульсов. Оказалось, что в этом случае могут существовать импульсы возбуждающего и стоксова излучения, распространяющиеся в среде без искажения формы. Ряд точных солитонных решений предложенных уравнений был найден в работе [9]. Существование таких ВКР-солитонов приводит к эффекту самоиндуцированной прозрачности для этих процессов.

Эволюция возбуждающего и первого стоксова ВКР-импульсов излучений описывается укороченными уравнениями Максвелла для огибающих амплитуд полей и уравнениями движения для средних значений поляризации. В случае резонанса $\omega_i - \omega_s = \omega_v$ (здесь ω_i , ω_s – частоты возбуждающего и первого стоксова импульсов излучения соответственно, ω_v – частота перехода в двухуровневой среде) эта система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_s}{\partial z} + \frac{1}{c_s} \frac{\partial A_s}{\partial t} &= -\frac{1}{2k_s} M \mu_0 \omega_s^2 V A_i, \\ \frac{\partial A_i}{\partial z} + \frac{1}{c_i} \frac{\partial A_i}{\partial t} &= \frac{1}{2k_i} M \mu_0 \omega_i^2 V A_s, \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\lambda}{\hbar} A_i A_s W, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\lambda}{\hbar} A_i A_s V. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь A_i , A_s и c_i , c_s – соответственно амплитуды и скорости возбуждающего и первого стоксова импульсов излучения; V – амплитуда поперечной поляризации; W – полуразность заселенностей верхнего и нижнего уровней; $\mu_0 = 4\pi/c^2$; M – параметр, определяющий интенсивность взаимодействия.

В дальнейшем мы будем предполагать, что $c_i = c_s = c_g$. В реальных условиях эксперимента [10] c_i и c_s отличаются на единицы процентов.

Делая замену переменных

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \left(\frac{k_i}{\omega_i^2} A_1^2 - \frac{k_s}{\omega_s^2} A_s^2 \right), & Q &= \frac{\sqrt{k_i k_s}}{\omega_i \omega_s} A_i A_s, \\ x &= \frac{M \mu_0 \omega_i \omega_s}{\sqrt{k_i k_s}} z, & \tau &= \frac{M}{\hbar} \frac{\omega_i \omega_s}{\sqrt{k_i k_s}} \left(t - \frac{1}{c_g} z \right), \end{aligned} \quad (4)$$

систему (3) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= QV, & \frac{\partial V}{\partial \tau} &= QW, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= -PV, & \frac{\partial W}{\partial \tau} &= -QV. \end{aligned} \quad (5)$$

В работе [11] было показано, что уравнения (5) обладают $(F-G)$ -парой. Они являются условием совместности системы (1), где матрицы F и G имеют вид

$$\begin{aligned} F &= \frac{i\sqrt{1+\lambda^2}}{2\lambda} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} V - \frac{i}{2\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} W, \\ G &= \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Q + \frac{i\lambda}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P. \end{aligned} \quad (6)$$

Можно искать решения уравнений (5), применяя метод обратной задачи рассеяния для спектральной задачи, задаваемой матрицами (6). Но можно идти другим путем. Мы покажем, что система (5) представляет собой преобразования Беклунда для уравнения синус-Гордон. Для этого сначала отметим факт существования законов сохранения

$$\begin{aligned} (P^2 + Q^2)_x &= 0, & (V^2 + W^2)_\tau &= 0, \\ P^2 + Q^2 &= f^2(\tau), & V^2 + W^2 &= g^2(x). \end{aligned} \quad (7)$$

Вводя новые функции $\varphi(x, t)$, $\Theta(x, t)$, функции P , Q , V , W можно представить в виде

$$\begin{aligned} P &= f(\tau) \sin \varphi(x, t), & W &= g(x) \sin \Theta(x, t), \\ Q &= f(\tau) \cos \varphi(x, t), & V &= g(x) \cos \Theta(x, t). \end{aligned} \quad (8)$$

Непосредственно из уравнений (5) следует, что функции φ и Θ удовлетворяют системе уравнений

$$\varphi_x = g(x) \sin \Theta, \quad \Theta_\tau = f(\tau) \sin \varphi. \quad (9)$$

Вводя независимые переменные

$$X = \int^x g(\xi) d\xi, \quad T = \int^\tau f(\xi) d\xi \quad (10)$$

и неизвестные функции

$$U_+ = \varphi + \Theta, \quad U_- = \varphi - \Theta, \quad (11)$$

получим, что U_+ , U_- удовлетворяют уравнению синус-Гордон

$$U_{+XT} = \sin U_+, \quad U_{-XT} = \sin U_- \quad (12)$$

и связаны друг с другом преобразованием Беклунда

$$\begin{aligned} \left(\frac{U_+ + U_-}{2} \right)_X &= \sin \left(\frac{U_+ - U_-}{2} \right), \\ \left(\frac{U_+ - U_-}{2} \right)_T &= \sin \left(\frac{U_+ + U_-}{2} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, мы видим, что система уравнений (3) в результате замен (4), (8), (10), (11) преобразовалась к системе уравнений (13), которая является преобразованием Беклунда для уравнения синус-Гордон. Поэтому решения системы (3) выражаются через два решения уравнения синус-Гордон, связанные соотношением (13). Так, например, если U_+ есть N -солитонное решение уравнения синус-Гордон, то U_- будет $(N+1)$ -солитонным решением, построенным из U_+ . Преобразования Беклунда для уравнения синус-Гордон зависят от некоторого параметра ζ , который обычно называют спектральным параметром. Этот параметр входит в новое решение, получающееся с помощью преобразования Беклунда. В уравнениях (13) этот параметр $\zeta = 1$.

Теперь, используя формулы (4), (8), (10), (11), можно найти решение системы (3):

$$\begin{aligned} A_i^2 &= \frac{\omega_i^2}{k_i} f(\tau) \left[1 + \sin \left(\frac{U_N + U_{N+1}}{2} \right) \right] = \frac{\omega_i^2}{2k_i} [2f(\tau) + (U_N - U_{N+1})_\tau], \\ A_s^2 &= \frac{\omega_s^2}{k_s} f(\tau) \left[1 - \sin \left(\frac{U_N + U_{N+1}}{2} \right) \right] = \frac{\omega_s^2}{2k_s} [2f(\tau) - (U_N - U_{N+1})_\tau], \\ V &= g(x) \sin \left[\frac{1}{2} (U_N - U_{N+1}) \right] = \frac{1}{2} (U_N + U_{N+1})_x, \\ W &= g(x) \cos \left[\frac{1}{2} (U_N - U_{N+1}) \right] = \frac{g(x)}{(U_N - U_{N+1})_x} \left[\frac{(U_N + U_{N+1})_x}{g(x)} \right]_x. \end{aligned} \quad (14)$$

В эти решения явным образом входят интегралы движения $f(\tau)$, $g(x)$. Эти же функции согласно формулам (8) определяют и вид независимых переменных X , T , через которые выражаются солитонные решения уравнения синус-Гордон. Для нахождения этих решений надо задать начальное условие $U(X, 0) = F(x)$ на всей области определения переменной X .

Таким образом, мы установили, что уравнения (3), описывающие вынужденное комбинационное рассеяние, сводятся к преобразованиям Беклунда уравнения синус-Гордон, а сами эти преобразования, в свою очередь, являются интегрируемой системой, обладающей $(F-G)$ -парой Захарова-Шабата. Изучим теперь более подробно алгебраическую структуру, которая существует в этих уравнениях, и, в частности, посмотрим, как она выглядит в многокомпонентном случае.

3. ДВУКРАТНЫЕ $A_n^{(1)}$ -ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

Многокомпонентным обобщением уравнения синус-Гордон является периодическая $A_n^{(1)}$ -цепочка Тоды. Она имеет вид

$$\begin{aligned}
 \phi_{xt}^1 &= -e^{\phi^{n+1}} + 2e^{\phi^1} - e^{\phi^2}, \\
 \phi_{xt}^2 &= -e^{\phi^1} + 2e^{\phi^2} - e^{\phi^3}, \\
 &\dots\dots\dots, \\
 \phi_{xt}^i &= -e^{\phi^{i-1}} + 2e^{\phi^i} - e^{\phi^{i+1}}, \\
 &\dots\dots\dots, \\
 \phi_{xt}^n &= -e^{\phi^{n-1}} + 2e^{\phi^n} - e^{\phi^0}, \\
 \phi_{xt}^{n+1} &= -e^{\phi^n} + 2e^{\phi^{n+1}} - e^{\phi^1}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Система (15) является условием совместности линейных систем

$$\Psi_x = \left(\sum_{i=1}^{n+1} f_x^i H_i + \lambda \sum_{i=1}^{n+1} E_{-i} \right) \Psi, \tag{16}$$

$$\Psi_t = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n+1} e^{\phi^i} E_i \Psi. \tag{17}$$

Функции f^i, ϕ^i связаны соотношением

$$\phi^i + \sum_{j=1}^{n+1} C_{ij} f^j = 0. \tag{18}$$

Здесь C_{ij} – элементы матрицы Картана алгебры Каца–Мууди $A_n^{(1)}$, а операторы E_i, E_{-i}, H_i образуют базис Вейля этой алгебры. Мы будем использовать представление этих операторов в виде матриц размера $(n+1) \times (n+1)$, задающихся как

$$\begin{aligned}
 E_{n+1} &= e_{1,n+1}, \quad E_{-(n+1)} = e_{n+1,1}, \quad E_i = e_{i+1,i}, \quad E_{-i} = e_{i,i+1}, \\
 H_{n+1} &= [E_{n+1}, E_{-(n+1)}] = e_{1,1} - e_{n+1,n+1}, \quad H_i = e_{i+1,i+1} - e_{i,i}, \quad i = 1, \dots, n,
 \end{aligned} \tag{19}$$

где $e_{i,j}$ – это матрица, у которой элемент, стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца равен единице, а остальные элементы равны нулю. Матрица Картана алгебры $A_n^{(1)}$ – это циклическая матрица размера $(n+1) \times (n+1)$, имеющая вид

$$C_{A_n^{(1)}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

В формулах (16), (17) величина Ψ – это вектор из линейного пространства $L_{A_n^{(1)}}$, в котором действует представление алгебры Каца–Мули $A_n^{(1)}$. Размерность пространства представления $\dim L_{A_n^{(1)}} = n + 1$ и Ψ – столбец с компонентами Ψ^k , $k = 1, \dots, n + 1$. Функции f^i и ϕ^i , $i = 1, \dots, n + 1$, в (18) также объединяются в столбцы f и ϕ .

Следуя работе [12], введем обозначения

$$\begin{aligned}\Psi^i &= e^{\theta^i}, & \phi^i &= f^{i+1} - 2f^i + f^{i-1}, \\ F^l(\phi) &= \frac{1}{n+1}(-\phi^1 - 2\phi^2 - \dots - (l-1)\phi^{l-1} + \\ &+ (n-l+1)\phi^l + (n-l)\phi^{l+1} + \dots + 2\phi^{n-1} + \phi^n), \\ G^i(\phi, \theta) &= F^i(\phi) + \theta^i - \theta^{i+1}.\end{aligned}\tag{21}$$

В этих обозначениях системы линейных уравнений (16), (17), условием совместности которых служит периодическая цепочка Тоды $A_n^{(1)}$, принимают вид

$$(G^i - F^{i+1})_x = \lambda(e^{-G^i + F^i} - e^{-G^{i+1} + F^{i+1}}),\tag{22}$$

$$\begin{aligned}(-G^i + F^i)_t &= \frac{1}{\lambda}(e^{G^i - F^{i+1}} - e^{G^{i-1} - F^i}), \\ i &= 1, 2, \dots, n + 1 \pmod{n + 1}.\end{aligned}\tag{23}$$

Эти уравнения задают преобразования Беклунда периодической $A_n^{(1)}$ -цепочки Тоды. С помощью условий совместности из них можно исключить как функции F^i , так и функции G^i . При этом получаем, что функции $\phi^i = F^i - F^{i+1}$ и величины

$$\chi^i = G^i - G^{i+1} = \phi^i + \theta^i - 2\theta^{i+1} + \theta^{i+2}\tag{24}$$

удовлетворяют уравнениям (15) периодической $A_n^{(1)}$ -цепочки Тоды.

Введем обозначения

$$P^i = e^{G^i - F^{i+1}}, \quad Q^i = e^{F^i - G^i}.\tag{25}$$

В этих обозначениях уравнения (22), (23) принимают вид

$$P_x = \lambda[P, \tilde{Q}],\tag{26}$$

$$Q_t = \frac{1}{\lambda}[Q, \tilde{P}].\tag{27}$$

Здесь $P, \tilde{P}, Q, \tilde{Q}$ являются $((n + 1) \times (n + 1))$ -матрицами,

$$P = \sum_{i=1}^{n+1} P^i E_i, \quad \tilde{P} = \sum_{i=1}^{n+1} P^i e_{i,i}, \quad Q = \sum_{i=1}^{n+1} Q^i E_{-i}, \quad \tilde{Q} = \sum_{i=1}^{n+1} Q^i e_{i,i}.\tag{28}$$

Легко проверить, что система уравнений (26), (27) представляет собой условие совместности двух линейных систем

$$\Psi_x = \left(\frac{1}{\mu} Q - \lambda \tilde{Q} \right) \Psi, \quad (29)$$

$$\Psi_t = \left(\mu P - \frac{1}{\lambda} \tilde{P} \right) \Psi. \quad (30)$$

Систему уравнений (26), (27) можно также записать и в виде условия нулевой кривизны вида (2):

$$\left(\frac{1}{\mu} Q - \lambda \tilde{Q} \right)_t - \left(\mu P - \frac{1}{\lambda} \tilde{P} \right)_x + \left[\left(\frac{1}{\mu} Q - \lambda \tilde{Q} \right), \left(\mu P - \frac{1}{\lambda} \tilde{P} \right) \right] = 0. \quad (31)$$

Подведем итог. Уравнения (26), (27), получающиеся из линейных систем (16), (17), условием совместности которых служит периодическая $A_n^{(1)}$ -цепочка Тоды, сами являются условием совместности линейных систем (29), (30) и могут быть записаны в виде условия нулевой кривизны (31). Величина μ , входящая в уравнения (29), (30), играет роль спектрального параметра, аналогичного параметру λ в уравнениях (16), (17). Мы будем называть уравнения (26), (27) двукратной периодической $A_n^{(1)}$ -цепочкой Тоды.

Между обычной (однократной) и двукратной периодическими $A_n^{(1)}$ -цепочками Тоды имеется принципиальное отличие. В то время как уравнения (16), (17) строятся только с помощью операторов алгебры Каца–Муди $A_n^{(1)}$, для построения уравнений (29), (30) необходимо использовать также единичный оператор I . В соотношения (28) входят матрицы $e_{i,i}$, которые можно представить с помощью единичного оператора I и операторов H_k , принадлежащих подалгебре Картана алгебры Каца–Муди $A_n^{(1)}$, следующим образом:

$$e_{i,i} = \frac{1}{n+1} \left(I + \sum_{k=1}^{i-1} k H_k - \sum_{l=i}^n (n-l+1) H_l \right). \quad (32)$$

Величины P^i , Q^i , входящие в уравнения (26), (27), выражаются с помощью соотношений (25) через функции G^i , F^i , которые являются решениями уравнений (15) периодической $A_n^{(1)}$ -цепочки Тоды. Эти решения связаны между собой преобразованиями Беклунда (22), (23). Поэтому по заданной паре таких решений уравнений (15), используя формулы (25), мы можем сразу найти некоторое решение уравнений (26), (27).

В явном виде эту процедуру можно осуществить, начав с тривиального решения $\phi^i = 0$ системы (15), проинтегрировав соответствующие линейные системы (16), (17) и применив затем формулу суперпозиции.

Общее решение систем

$$\Psi_x = \lambda \sum_{i=1}^{n+1} E_{-i} \Psi, \quad \Psi_t = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n+1} E_i \Psi \quad (33)$$

имеет вид

$$\psi^k = \sum_{i=1}^{n+1} a_i (\omega_{n+1})^{ik} \exp \left(\lambda (\omega_{n+1})^i x + \frac{t}{\lambda (\omega_{n+1})^i} \right). \quad (34)$$

Здесь ψ^k – k -я компонента вектор-столбца Ψ , а ω_{n+1} – корень $(n+1)$ -й степени из единицы, т.е. $(\omega_{n+1})^{n+1} = 1$.

С помощью формул (21) можно найти решение уравнений (15) периодической $A_n^{(1)}$ -цепочки Тоды, которое связано преобразованиями Беклунда (22), (23) с тривиальным решением $\phi^i = 0$, $i = 1, \dots, n+1$. Используя эти два решения и формулы (25), можно построить решение системы уравнений (22), (23) двукратной периодической цепочки Тоды. В случае $n = 1$ в множестве этих решений содержатся и солитонные решения системы уравнений (3), найденные в работе [9].

Более сложные решения системы уравнений (15) можно получить с помощью формулы суперпозиции. Такие формулы были найдены в работах [4], [12], [13]. Они позволяют по трем известным решениям построить новое. Таким способом можно найти явный вид N -солитонного и $(N+1)$ -солитонного решений периодической $A_n^{(1)}$ -цепочки Тоды, связанных друг с другом преобразованиями Беклунда (22), (23). Пара таких решений дает одно решение двукратной периодической цепочки Тоды (22), (23).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что система уравнений (3), описывающая процесс вынужденного комбинационного рассеяния, с одной стороны, является интегрируемой системой, обладающей $(F-G)$ -парой Захарова–Шабата, а с другой стороны, сводится к преобразованиям Беклунда более простого уравнения синус-Гордон. Алгебраическая структура данной системы такова, что физический процесс взаимодействия возбуждающего и первого стоксова импульсов излучения описывается величинами (14), зависящими от двух решений уравнения синус-Гордон, связанных преобразованием Беклунда.

Эта конструкция допускает обобщение на многокомпонентный случай. Мы показали, что уравнения, задающие преобразования Беклунда периодических $A_n^{(1)}$ -цепочек Тоды, можно записать в более симметричном виде (26), (27), отличном от вида систем (1), в которых функции Ψ^k и u^m имеют принципиально разный смысл. Уравнения (26), (27) обладают $(F-G)$ -парой Захарова–Шабата и могут быть представлены в виде условия нулевой кривизны, что свидетельствует об их интегрируемости.

В дальнейшем мы предполагаем рассмотреть данную конструкцию для цепочек Тоды, отвечающих другим алгебрам Ли и Каца–Мути.

Список литературы

- [1] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, *Phys. Rev. Lett.*, **19** (1967), 1095; В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *ЖЭТФ*, **61** (1971), 118; Л. А. Тахтаджян, *ЖЭТФ*, **66** (1974), 476; В. Е. Захаров, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *ДАН*, **219** (1974), 1334; В. Е. Захаров, Л. А. Тахтаджян, *ТМФ*, **38** (1979), 26; А. Е. Боровик, В. Н. Робук, *ТМФ*, **46** (1981), 371; В. А. Андреев, *ТМФ*, **29** (1976), 213.

- [2] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, *Stud. Appl. Math.*, **53** (1974), 249; В. Е. Дринфельд, В. В. Соколов, *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления*, **24** (1984), 81; А. Н. Лезнов, М. В. Савельев, *Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем*, Наука, М., 1985.
- [3] A. V. Mikhailov, M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, *Comm. Math. Phys.*, **79** (1981), 473.
- [4] A. P. Fordy, J. Gibbons, *Comm. Math. Phys.*, **77** (1980), 21.
- [5] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прилож.*, **13** (1979), 13.
- [6] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [7] D. J. Kaup, *Phys. D*, **6** (1983), 143; H. Steudel, *Phys. D*, **6** (1983), 155; A. I. Maimistov, E. A. Manykin, *Phys. Lett. A*, **95** (1983), 216; J. Leon, A. V. Mikhailov, *Phys. Lett. A*, **253** (1999), 33; A. S. Fokas, C. R. Menyuk, *J. Nonlinear Sci.*, **9** (1999), 1; E. A. Moskovenko, V. P. Kotlyarov, *J. Phys. A*, **39** (2006), 14591.
- [8] Т. М. Махвиладзе, М. Е. Сарычев, Л. А. Шелепин, *ЖЭТФ*, **69** (1975), 499.
- [9] Т. М. Махвиладзе, М. Е. Сарычев, *ЖЭТФ*, **71** (1976), 896.
- [10] А. И. Соколовская, *Препринт ФИАН № 103*, М., 1971.
- [11] В. А. Андреев, *Тр. ФИАН*, **173**, 1986, 200.
- [12] В. А. Андреев, *ТМФ*, **75** (1988), 340.
- [13] D. Levi, L. Pilloni, P. M. Santini, *J. Phys. A*, **14** (1981), 1567; R. Hirota, *J. Phys. Soc. Japan*, **50** (1981), 3785; T. Miwa, *Proc. Japan. Acad.*, **58** (1982), 9.

Поступила в редакцию 29.03.2007,
после доработки 22.06.2007