Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. В. Пальвелев, Рассеяние вихрей в абелевой модели Хиггса, *ТМФ*, 2008, том 156, номер 1, 77–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6231>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 05:58:38

© 2008 г.

Р. В. Пальвелев*

РАССЕЯНИЕ ВИХРЕЙ В АБЕЛЕВОЙ МОДЕЛИ ХИГГСА

Изучается рассеяние вихрей в абелевой $(2+1)$ -мерной модели Хиггса. Показано, что в случае столкновения N вихрей под равными углами их траектории после столкновения поворачиваются на угол π/N .

Ключевые слова: уравнения вихрей, уравнения Гинзбурга–Ландау, адиабатический предел, рассеяние вихрей.

В данной работе мы изучаем рассеяние вихрей в абелевой $(2+1)$ -мерной модели Хиггса. Вихри, которые мы рассматриваем, – это решения вихревых уравнений, возникающих в теории сверхпроводимости. Они задаются гладкими парами (A, Φ) , состоящими из (электромагнитного) калибровочного потенциала A и скалярного поля Хиггса Φ на плоскости $\mathbb{C}$. С точностью до калибровочной эквивалентности вихревые решения параметризуются нулями поля Хиггса Φ , так что пространство модулей N -вихревых решений можно отождествить с $\mathbb{C}^N$.

Динамика вихрей на $\mathbb{C}$ задается гиперболическим функционалом действия Гинзбурга–Ландау. Динамика N вихрей приближенно описывается геодезическими в пространстве $\mathbb{C}^N$ в метрике, определяемой кинетической энергией модели. К сожалению, эту метрику не удастся вычислить в явном виде. Однако в специальном случае симметричного столкновения N вихрей мы можем показать, не используя явного вида метрики, что их траектории после столкновения поворачиваются на угол π/N . В частности, в случае двух вихрей их траектории после лобового столкновения поворачиваются на угол $\pi/2$, т.е. происходит рассеяние под прямым углом. Последний результат был уже получен ранее в ряде работ (см. [1]–[4]).

1. ВИХРЕВЫЕ РЕШЕНИЯ В АБЕЛЕВОЙ МОДЕЛИ ХИГГСА

Двумерная абелева модель Хиггса задается следующим функционалом действия:

$$V(\alpha, \Phi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left(|d_\alpha \Phi|^2 + F_{12}^2 + \frac{\lambda}{4} (|\Phi|^2 - 1)^2 \right) dx dy, \quad (1)$$

где $\alpha = -iA_1 dx - iA_2 dy$ – калибровочный потенциал с гладкими вещественнозначными коэффициентами A_1, A_2 на $\mathbb{R}^2$, $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$ – поле Хиггса, задаваемое

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: palvelev@front.ru

гладкой комплекснозначной функцией на плоскости $\mathbb{R}^2$, $\lambda > 0$ – константа. Через $F_{12} := \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$ мы обозначаем калибровочное поле, порождаемое потенциалом (A_1, A_2) . Здесь и далее $\partial_1 := \partial_x$, $\partial_2 := \partial_y$.

Функционал действия V инвариантен относительно калибровочных преобразований следующего вида:

$$\alpha \mapsto \tilde{\alpha} = \alpha - i d\chi, \quad \Phi \mapsto \tilde{\Phi} = e^{i\chi}\Phi,$$

где χ – гладкая вещественнозначная функция на $\mathbb{R}^2$.

Интегрируя по частям, мы можем переписать функционал действия V в виде формулы Богомольного:

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ ((\partial_1 \Phi_1 + A_1 \Phi_2) \mp (\partial_2 \Phi_2 - A_2 \Phi_1))^2 + \right. \\ & \left. + ((\partial_2 \Phi_1 + A_2 \Phi_2) \pm (\partial_1 \Phi_2 - A_1 \Phi_1))^2 + \left(F_{12} \pm \frac{1}{2}(|\Phi|^2 - 1) \right)^2 \right\} dx dy \pm \\ & \pm \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} F_{12} dx dy + \frac{\lambda - 1}{4} \int_{\mathbb{R}^2} (|\Phi|^2 - 1)^2 dx dy. \end{aligned} \quad (2)$$

Далее мы рассматриваем лишь критический случай $\lambda = 1$ (см. [5]). Тогда правая часть последнего равенства есть сумма неотрицательных слагаемых и члена

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} F_{12} dx dy,$$

который пропорционален *топологическому заряду* или *вихревому числу* N поля (α, Φ) . Вихревое число – это целое число, которое равно (см. [5])

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} F_{12} dx dy = N,$$

если выполнены следующие условия: $F_{12} \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $|\Phi| \rightarrow 1$ при $r := \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ и, кроме того, $|d_\alpha \Phi| \leq C/r^{1+\delta}$. Очевидно, N не меняется при калибровочных преобразованиях.

Зафиксируем вихревое число N и предположим, что $N \geq 0$. Тогда из формулы Богомольного следует, что $V(\alpha, \Phi) \geq \pi N$ и минимальное значение V (равное πN) достигается на решениях системы уравнений

$$\begin{aligned} \partial_1 \Phi_1 + A_1 \Phi_2 &= \partial_2 \Phi_2 - A_2 \Phi_1, \\ \partial_2 \Phi_1 + A_2 \Phi_2 &= -\partial_1 \Phi_2 + A_1 \Phi_1, \\ F_{12} &= -\frac{1}{2}(|\Phi|^2 - 1), \end{aligned} \quad (3)$$

называемых *вихревыми уравнениями*. Эти уравнения инвариантны относительно калибровочных преобразований.

Введем на плоскости комплексную координату $z = x + iy$ и обозначим, как обычно, $\partial := \partial_z := (\partial_1 - i\partial_2)/2$ и $\bar{\partial} := \partial_{\bar{z}} := (\partial_1 + i\partial_2)/2$. Также пусть $A := (A_1 - iA_2)/2$. Тогда первые два из вихревых уравнений можно переписать в виде

$$\bar{\partial}\Phi = i\bar{A}\Phi.$$

Для полноты заметим, что в случае $N < 0$ минимальное значение V , равное $\pi|N|$, достигается на решениях похожей системы уравнений, называемых *антивихревыми уравнениями*. Любое решение $(\tilde{A}, \tilde{\Phi})$ антивихревых уравнений можно получить из некоторого решения (A, Φ) вихревых уравнений по формулам $\tilde{A}(z) = -\bar{A}(-\bar{z})$, $\tilde{\Phi}(z) = \Phi(-\bar{z})$. Поэтому мы ограничимся рассмотрением случая $N \geq 0$.

В [5] доказана следующая теорема существования и единственности.

ТЕОРЕМА 1 (Таубс). *Пусть $N \geq 0$, $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$ – произвольные (не обязательно различные) точки на комплексной плоскости. Тогда существует такое решение (A_1, A_2, Φ) вихревых уравнений, что нули Φ совпадают с точками $Z_1, \dots, Z_N$ и*

$$\Phi(z, \bar{z}) \sim c_j(z - Z_j)^{n_j}$$

в окрестности каждой из точек Z_j . Здесь n_j – кратность Z_j в наборе $\{Z_1, \dots, Z_N\}$, c_j – ненулевая константа.

Для этого решения $|\Phi|$ экспоненциально стремится к единице при $|z| \rightarrow \infty$, а $|(\partial_1 - iA_1)\Phi|$ и $|(\partial_2 - iA_2)\Phi|$ экспоненциально убывают. Более точно,

$$|d_\alpha \Phi| \leq C(1 - |\Phi|)$$

для некоторого $C > 0$ и для любого $\delta > 0$ существует $C(\delta) > 0$ такое, что

$$1 - |\Phi| \leq C(\delta)e^{-(1-\delta)|z|}.$$

Вихревое число этого решения равно N . Решение с указанными свойствами единственно с точностью до калибровочной эквивалентности.

Решение, существование которого устанавливается этой теоремой, называется *N -вихревым решением*.

Пространство модулей N -вихревых решений, обозначаемое через $\mathcal{M}_N$, – это множество классов N -вихревых решений с точностью до калибровочной эквивалентности. С помощью теоремы Таубса мы можем отождествить $\mathcal{M}_N$ с N -й симметрической степенью $S^N \mathbb{C}$, т.е. со множеством неупорядоченных наборов N комплексных чисел (а именно, нулей Φ). Эту симметрическую степень можно отождествить с $\mathbb{C}^N$, сопоставив каждому набору $\{Z_1, \dots, Z_N\}$ полином $p(z)$ с нулями $Z_1, \dots, Z_N$ и старшим коэффициентом 1:

$$p(z) = (z - Z_1) \dots (z - Z_N) = z^N + S_1 z^{N-1} + \dots + S_{N-1} z + S_N.$$

2. КАСАТЕЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ $\mathcal{M}_N$ И КИНЕТИЧЕСКАЯ МЕТРИКА НА $\mathcal{M}_N$

Касательное пространство к $\mathcal{M}_N$ в любой точке совпадает с $\mathbb{C}^N$. Однако, следуя [6], мы можем дать более детальное описание касательного расслоения $\mathcal{M}_N$. Это описание $T\mathcal{M}_N$ будет использовано при определении специальной кинетической метрики на $\mathcal{M}_N$.

Для данной точки $\{Z_1, \dots, Z_N\} \in \mathcal{M}_N$ мы рассмотрим определенное N -вихревое решение (A_1, A_2, Φ) , которое сопоставляется точке $\{Z_1, \dots, Z_N\}$ по теореме Таубса, причем калибровку зафиксируем следующим образом:

$$\Phi(z) = (z - Z_1)(z - Z_2) \dots (z - Z_N)f(z), \quad f(z) > 0. \quad (4)$$

Теперь рассмотрим *линеаризованные уравнения вихрей* (в окрестности решения (A_1, A_2, Φ)), которые имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_1 \varphi_1 + a_1 \Phi_2 + A_1 \varphi_2 &= \partial_2 \varphi_2 - a_2 \Phi_1 - A_2 \varphi_1, \\ \partial_2 \varphi_1 + a_2 \Phi_2 + A_2 \varphi_2 &= -\partial_1 \varphi_2 + a_1 \Phi_1 + A_1 \varphi_1, \\ \partial_1 a_2 - \partial_2 a_1 &= -\Phi_1 \varphi_1 - \Phi_2 \varphi_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь (a_1, a_2, φ) – возмущение, $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$. Эти уравнения инвариантны относительно *инфинитезимальных калибровочных преобразований* вида

$$a_1 \mapsto \tilde{a}_1 = a_1 + \partial_1 \chi, \quad a_2 \mapsto \tilde{a}_2 = a_2 + \partial_2 \chi, \quad \varphi \mapsto \tilde{\varphi} = \varphi + i\chi\Phi,$$

где χ – вещественнозначная функция.

Рассмотрим пространство решений $(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2)$ линеаризованных вихревых уравнений, принадлежащих пространству Соболева $(H^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}))^4$. Заметим, что инфинитезимальные калибровочные преобразования с $\chi \in H^2(\mathbb{R}^2)$ переводят это пространство в себя. Следуя [6], мы зафиксируем инфинитезимальную калибровку, накладывая на решения $(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2)$ линеаризованных уравнений вихрей следующее условие L^2 -ортогональности:

$$\int_{\mathbb{R}^2} (-\varphi_1 \chi \Phi_2 + \varphi_2 \chi \Phi_1 + a_1 \partial_1 \chi + a_2 \partial_2 \chi) dx dy = 0 \quad \forall \chi \in H^2(\mathbb{R}^2).$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_{\mathbb{R}^2} (-\varphi_1 \Phi_2 + \varphi_2 \Phi_1 - \partial_1 a_1 - \partial_2 a_2) \chi dx dy = 0$$

для любого $\chi \in H^2(\mathbb{R}^2)$, откуда вытекает, что

$$\varphi_1 \Phi_2 - \varphi_2 \Phi_1 + \partial_1 a_1 + \partial_2 a_2 = 0.$$

Это соотношение мы будем называть *условием ортогональности*.

Теперь введем *линеаризованный вихревой оператор* $\mathcal{D}_{(A, \Phi)}$, определяемый линеаризованными вихревыми уравнениями:

$$\mathcal{D}_{(A, \Phi)}(a_1, a_2, \varphi) = \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi_1 + a_1 \Phi_2 + A_1 \varphi_2 - \partial_2 \varphi_2 + a_2 \Phi_1 + A_2 \varphi_1 \\ \partial_2 \varphi_1 + a_2 \Phi_2 + A_2 \varphi_2 + \partial_1 \varphi_2 - a_1 \Phi_1 - A_1 \varphi_1 \\ \partial_1 a_2 - \partial_2 a_1 + \Phi_1 \varphi_1 + \Phi_2 \varphi_2 \\ \varphi_1 \Phi_2 - \varphi_2 \Phi_1 + \partial_1 a_1 + \partial_2 a_2 \end{pmatrix}.$$

Это ограниченный линейный оператор, который отображает $(H^1)^4$ в $(L^2)^4$. Ядро $\mathcal{D}_{(A, \Phi)}$ имеет (вещественную) размерность $2N$ (см. [6]).

Мы будем отождествлять $\ker \mathcal{D}_{(A,\Phi)}$ с касательным пространством к $\mathcal{M}_N$ в точке, определяемой (согласно теореме Таубса) набором $\{Z_1, \dots, Z_N\}$ нулей Φ . Для этого рассмотрим симметрические функции $S_1, \dots, S_N$ нулей Φ (равные коэффициентам полинома со старшим коэффициентом 1, имеющего нули $\{Z_1, \dots, Z_N\}$) как координаты на $\mathcal{M}_N$. Зафиксировав калибровку условием (4), мы можем рассматривать компоненты Φ , A_1 , A_2 вихревых решений как функции комплексных параметров $S_1, \dots, S_N$. Решения линеаризованных уравнений будем строить, дифференцируя эти функции по параметрам.

Обозначим $S_{j,1} := \operatorname{Re} S_j$, $S_{j,2} := \operatorname{Im} S_j$, $j = 1, 2, \dots, N$. Хотелось бы определить кинетическую метрику на $\mathcal{M}_N$ с помощью L^2 -норм производных $(A_1, A_2, \Phi_1, \Phi_2)$ по переменным $S_{j,k}$, $j = 1, 2, \dots, N$, $k = 1, 2$. К сожалению, эти производные могут не быть квадратично-интегрируемыми. Однако мы можем заменить $(A_1, A_2, \Phi_1, \Phi_2)$ на подходящие калибровочно-эквивалентные функции так, что их производные уже будут лежать в L^2 . Другими словами, мы можем найти калибровочные множители $\chi_{j,k}$ так, чтобы функции

$$n_{j,k} = \left(\frac{\partial A_1}{\partial S_{j,k}} + \partial_1 \chi_{j,k} \frac{\partial A_2}{\partial S_{j,k}} + \partial_2 \chi_{j,k} \frac{\partial \Phi_1}{\partial S_{j,k}} - \chi_{j,k} \Phi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial S_{j,k}} + \chi_{j,k} \Phi_1 \right) \quad (6)$$

лежали в $(H^1)^4$ и удовлетворяли условию ортогональности. Векторы $n_{j,k}$ при $j = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2$, лежат в пространстве $\ker \mathcal{D}_{(A,\Phi)}$ и являются линейно независимыми. Поэтому они образуют базис в $\ker \mathcal{D}_{(A,\Phi)}$. Используя этот базис, мы можем отождествить $T_{(A,\Phi)} \mathcal{M}_N$ и $\ker \mathcal{D}_{(A,\Phi)}$.

Теперь мы можем определить кинетическую метрику g на $\mathcal{M}_N$ с помощью L^2 -скалярного произведения. А именно, для любых векторов $v_1, v_2 \in T_{(A,\Phi)} \mathcal{M}_N = \ker \mathcal{D}_{(A,\Phi)} \subset (H^1)^4$ положим $g(v_1, v_2) := (v_1, v_2)_{(L^2)^4}$.

Для того чтобы обосновать корректность определения метрики и ее гладкость, мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A_1(z; S_1, \dots, S_N)$, $A_2(z; S_1, \dots, S_N)$, $\Phi(z; S_1, \dots, S_N)$ – компоненты вихревого решения, которое имеет нули в корнях многочлена $z^N + S_1 z^{N-1} + \dots + S_N$ и удовлетворяет калибровочному условию (4). Тогда:

- 1) Φ , A_1 , A_2 гладко зависят от $S_1, \dots, S_N$ в том смысле, что при фиксированном z_0 функция $\Phi(z_0; S_1, \dots, S_N)$ – гладкая функция аргументов $S_1, \dots, S_N$ и то же самое верно для A_1, A_2 ;
- 2) можно выбрать функции $\chi_{j,k}$ так, чтобы векторы $n_{j,k}$, определяемые формулой (6), лежали в $(H^1)^4$ и удовлетворяли условию ортогональности;
- 3) отображения $(S_1, \dots, S_N) \mapsto n_{j,k}(S_1, \dots, S_N)$ – гладкие отображения $\mathbb{C}^N \rightarrow (L^2)^4$ со значениями в $(H^1)^4$;
- 4) векторы $n_{j,k}$ при $j = 1, 2, \dots, N$, $k = 1, 2$ линейно независимы.

Доказательство этой теоремы будет дано в разделе 4.

СЛЕДСТВИЕ. Коэффициенты кинетической метрики суть гладкие функции координат $S_1, \dots, S_N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коэффициенты метрики определяются по формулам $g_{j,k;l,m} = (n_{j,k}, n_{l,m})_{(L^2)^4}$. Из п. 3 теоремы 2 следует, что они являются гладкими функциями координат $S_1, \dots, S_N$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из симметрии задачи следует, что кинетическая метрика является инвариантной относительно одновременных сдвигов всех нулей, их поворотов, а также относительно замены всех нулей на комплексно-сопряженные, т.е. относительно преобразований вида $Z_j \mapsto Z_j + Z_0$, $Z_j \mapsto e^{i\varphi} Z_j$ и $Z_j \mapsto \bar{Z}_j$. Это обстоятельство будет использовано при доказательстве теоремы 3.

3. ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Динамическая $(2+1)$ -мерная модель Хиггса задается функционалом действия

$$\mathcal{S}(A, \Phi) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ |(\partial_0 - iA_0)\Phi|^2 + F_{01}^2 + F_{02}^2 - \left(|(\partial_1 - iA_1)\Phi|^2 + |(\partial_2 - iA_2)\Phi|^2 + F_{12}^2 + \frac{1}{4}(|\Phi|^2 - 1)^2 \right) \right\} dx dy. \quad (7)$$

Здесь $\Phi(t, x, y)$ – гладкая комплекснозначная функция, $A_j(t, x, y)$ – гладкие вещественнозначные функции, $j = 0, 1, 2$, $F_{jk} := \partial_j A_k - \partial_k A_j$. (Мы обозначаем $\partial_0 = \partial_t$, $\partial_1 = \partial_x$, $\partial_2 = \partial_y$.)

Функционал действия можно представить в стандартной форме

$$\mathcal{S} = \int (T - V) dt,$$

где потенциальная энергия V задается формулой (1), а кинетическая энергия T равна

$$T = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (|(\partial_0 - iA_0)\Phi|^2 + F_{01}^2 + F_{02}^2) dx dy.$$

Хотелось бы описать пространство модулей соответствующей динамической задачи $\delta\mathcal{S}(A, \Phi) = 0$. Но в отличие от вихревых решений (которые являются статическими решениями нашей динамической задачи), получить явное описание этого пространства модулей затруднительно. Однако, следуя идее, выдвинутой в [6] и [7], мы можем рассмотреть геодезические на $\mathcal{M}_N$ в кинетической метрике как хорошие приближения к траекториям N медленно движущихся вихрей. Будем использовать это приближение, чтобы описать рассеяние N вихрей после их симметричного столкновения.

К сожалению, для кинетической метрики нет явной формулы. Однако мы будем использовать инвариантность этой метрики относительно вращений и комплексного сопряжения, чтобы получить качественное описание рассеяния. А именно, мы докажем, что после симметричного столкновения траектории вихрей поворачиваются на угол π/N .

Под симметричным столкновением N вихрей мы подразумеваем их движение в одну точку вдоль таких лучей с началом в этой точке, что угол между любыми

соседними лучами равен $2\pi/N$. Иначе говоря, в каждый момент времени вихри находятся в вершинах правильного N -угольника с центром в точке, в которую они движутся. Поскольку задача инвариантна относительно сдвигов и поворотов плоскости, мы можем предположить, что N вихрей движутся в начало координат вдоль лучей $\arg z = 0, \arg z = 2\pi/N, \dots, \arg z = 2(N-1)\pi/N$ и одновременно сталкиваются в начале координат. Утверждается, что после столкновения они разлетаются по лучам $\arg z = \pi/N, \dots, \arg z = (2(N-1)+1)\pi/N$ (они получаются из исходных лучей поворотом на угол π/N).

В частности, лобовое столкновение двух вихрей приводит к повороту их траекторий на угол $\pi/2$, так что в этом случае мы наблюдаем рассеяние под прямым углом. Последний результат уже был получен в ряде работ (см. [1]–[4]).

Мы докажем математический результат (теорема 3), а затем дадим его физическую интерпретацию.

ТЕОРЕМА 3. *На пространстве модулей $\mathcal{M}_N$ с кинетической метрикой имеется геодезическая, которую можно параметризовать в симметрических координатах следующим образом¹⁾:*

$$S_1 = \dots = S_{N-1} = 0, \quad S_N(s) = (-1)^N \lambda(s),$$

где $\lambda(s)$ – гладкая вещественнозначная убывающая функция, $\lambda(s)$ принимает все вещественные значения и $\lambda(0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия из теоремы 2 мы можем пользоваться стандартными результатами о существовании и единственности геодезических для кинетической метрики. Рассмотрим геодезическую, проходящую через начало координат $S_1 = \dots = S_N = 0$ и имеющую в этой точке касательный вектор $\vec{v} = (0, 0, \dots, 0, (-1)^{N+1})$. Покажем, что она имеет требуемый вид. В самом деле, пусть наша геодезическая параметризована: $S_1 = S_1(s), \dots, S_N = S_N(s)$ ²⁾.

Воспользуемся свойствами инвариантности метрики (см. замечание после следствия из теоремы 2). Поворот нулей Φ на угол φ ($Z_j \mapsto e^{i\varphi} Z_j$) в симметрических координатах соответствует преобразованию вида

$$S'_1 = e^{i\varphi} S_1, \quad S'_2 = e^{2i\varphi} S_2, \quad \dots, \quad S'_N = e^{iN\varphi} S_N.$$

Значит, поворот на угол $2\pi/N$ оставляет на месте вектор $\vec{v}$, касательный к кривой $S_1(t) = \dots = S_{N-1}(t) = 0, S_N(t) = (-1)^{N+1}t$, которая инвариантна относительно этого поворота. Из этого следует, что поворот на угол $2\pi/N$ переводит нашу геодезическую в геодезическую, которая также проходит через начало координат и имеет в этой точке тот же самый касательный вектор $\vec{v}$. Из единственности геодезической мы получаем, что наша геодезическая инвариантна относительно этого

¹⁾Множитель $(-1)^N$ в формулировке и в доказательстве появляется потому, что $S_N = (-Z_1)(-Z_2)\dots(-Z_N) = (-1)^N Z_1 Z_2 \dots Z_N$.

²⁾Здесь s – натуральный параметр на геодезической. Будем считать, что началу координат соответствует значение параметра $s = 0$. Интервал изменения параметра выбирается максимальным.

поворота: $S_1(s) = e^{2\pi/N} S_1(s)$, $\dots$, $S_{N-1}(s) = e^{2\pi(N-1)/N} S_{N-1}(s)$, а из этого следует, что $S_1(s) = \dots = S_{N-1}(s) = 0$.

Теперь мы используем комплексное сопряжение. В симметрических координатах $S_1, \dots, S_N$ оно соответствует отображению $S'_1 = \bar{S}_1$, $S'_2 = \bar{S}_2$, $\dots$, $S'_N = \bar{S}_N$. Это отображение также переводит вектор $\vec{v}$ в себя и потому оставляет нашу геодезическую на месте. Значит, функции $S_N(s)$ и $\lambda(s) := (-1)^N S_N(s)$ вещественные. Очевидно, что $\lambda(s)$ убывает и при $s = 0$ меняет знак с положительного на отрицательный.

Поскольку в симметрических координатах метрика не имеет особенностей, то наша геодезическая продолжается в обе стороны неограниченно, т.е. $(-1)^N S_N$ при возрастании s меняется от $+\infty$ до $-\infty$. (В [2] отмечено, что при $\min_{j \neq l} |Z_j - Z_l| \rightarrow \infty$ метрика стремится к плоской метрике вида $\text{const} \sum_{j=1}^N dZ_j d\bar{Z}_j$. Поэтому интервал изменения s есть вся прямая: $-\infty < s < \infty$.)

Физически теорему 3 можно интерпретировать следующим образом. В координатах $(Z_1, \dots, Z_N)$ наша геодезическая (гладкая в симметрических координатах) описывает следующее движение N вихрей. При $\lambda(s) > 0$ (т.е. $s < 0$) они движутся по траекториям

$$s \mapsto \left(\sqrt[N]{\lambda(s)}, \sqrt[N]{\lambda(s)} e^{2\pi i/N}, \dots, \sqrt[N]{\lambda(s)} e^{2\pi i(N-1)/N} \right),$$

а при $\lambda(s) < 0$ (т.е. $s > 0$) – по траекториям, повернутым на угол π/N :

$$s \mapsto \left(\sqrt[N]{|\lambda(s)|} e^{\pi i/N}, \sqrt[N]{|\lambda(s)|} e^{3\pi i/N}, \dots, \sqrt[N]{|\lambda(s)|} e^{(2N-1)\pi i/N} \right).$$

Другими словами, наша геодезическая задает процесс рассеяния, описанный выше: до столкновения N вихрей движутся в начало координат по лучам $\arg z = 0$, $\arg z = 2\pi/N$, $\dots$, $\arg z = 2(N-1)\pi/N$, затем они сталкиваются в начале координат и разлетаются по лучам $\arg z = \pi/N$, $\dots$, $\arg z = (2N-1)\pi/N$. В частности, при $N = 2$ имеются два вихря, которые движутся навстречу друг другу по вещественной оси, сталкиваются и разлетаются по мнимой оси, т.е. происходит рассеяние под прямым углом.

Важно отметить, что теорема 3 дает не только *локальный* результат (т.е. главные члены асимптотики функций, описывающих движение вихрей на малом интервале времени после столкновения), но и *глобальный* результат о рассеянии: мы получаем полное описание траекторий вихрей на всем интервале времени как после столкновения, так и до него. В частности, получается, что симметричное столкновение возможно лишь тогда, когда вихри с самого начала (из бесконечности) движутся вдоль лучей $\arg z = 0$, $\arg z = 2\pi/N$, $\dots$, $\arg z = 2(N-1)\pi/N$.

В задаче о рассеянии вихрей наиболее изученным является случай $N = 2$. В частности, Стюарт [6] доказал для этого случая корректность определения и гладкость метрики и, более того, обосновал применимость геодезического приближения. Ранее результат о рассеянии двух вихрей был получен в [1]–[3] (с разной степенью строгости). Общий же случай (рассеяние N вихрей при симметричном столкновении) был описан на “физическом” уровне строгости в статьях [8] и [9].

Следствие из теоремы 2 позволяет получать локальные результаты о рассеянии в некоторых более общих случаях. Рассмотрим следующий пример. Пусть имеется $N > 2$ вихрей, движение которых описывается геодезической вида $S_1 = S_1(s), \dots, S_N = S_N(s)$. Пусть два из этих вихрей в момент $s = 0$ сталкиваются в нуле, а остальные в этот момент находятся в других точках (это значит, что многочлен $z^N + S_1(0)z^{N-1} + \dots + S_N(0)$ имеет в точке $z = 0$ нуль кратности два, или $S_N(0) = S_{N-1}(0) = 0, S_{N-2}(0) \neq 0$). Лобовым столкновением таких двух вихрей мы будем называть ситуацию, когда эти вихри до столкновения движутся по траекториям вида $Z_1(s) = d(s)(1 + o(1))$ и $Z_2(s) = -d(s)(1 + o(1))$ (при $s \rightarrow 0^-$), где $d(s)$ – положительная непрерывная убывающая функция, определенная при $s \leq 0$, и $d(0) = 0$. Возникает вопрос: как будут двигаться эти два вихря после столкновения?

Заметим, что в описанной ситуации при малых по модулю значениях s можно представить многочлен $z^N + S_1(s)z^{N-1} + \dots + S_N(s)$ в виде произведения

$$(z^2 + a(s)z + b(s))(z^{N-2} + \tilde{S}_1(s)z^{N-3} + \dots + \tilde{S}_{N-2}(s)), \quad (8)$$

где коэффициенты $a(s), b(s), \tilde{S}_k(s)$ – гладкие функции, $a(0) = b(0) = 0$ и $\tilde{S}_{N-2}(0) \neq 0$, т.е. корни первого многочлена – положения двух сталкивающихся вихрей, а корни второго – всех остальных. Ясно, что $b(s) = -d^2(s)(1 + o(1))$. Рассмотрим лишь случай, когда $b'(0) \neq 0$ (т.е. $b(s) = b_1s + o(s)$ при $s \rightarrow 0$). Тогда $-d^2(s) = b_1s(1 + o(1))$ при малых отрицательных значениях s , и поэтому $b_1 > 0$. Решая квадратное уравнение, получаем $Z_{1,2} = (-a(s) \pm \sqrt{a^2(s) - 4b(s)})/2$. Но $a^2(s) - 4b(s) = -4b_1s + O(s^2)$, а значит, $\sqrt{a^2(s) - 4b(s)} = \pm 2i\sqrt{b_1}\sqrt{s}(1 + O(s))$ при $s > 0$. Следовательно, $Z_{1,2} = \pm i\sqrt{b_1}\sqrt{s} + O(s)$. Это означает, что, несмотря на присутствие остальных вихрей, локально опять происходит рассеяние под прямым углом.

Следует заметить, что любая геодезическая, выходящая из точки $(S_1, \dots, S_{N-2}, 0, 0)$ с $S_{N-2} \neq 0$ в направлении вектора $(a_1, \dots, a_N)$ с $a_N \neq 0$, описывает локальное лобовое столкновение двух вихрей в нуле, имеющее вышеуказанный вид, так как в формуле (8) $b(s) = (a_N s / \tilde{S}_{N-2}(0)) + o(s)$, а значит, $b'(0) \neq 0$. То, что мы считали эти два вихря сталкивающимися вдоль вещественной оси, несущественно в силу инвариантности метрики относительно поворотов.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Гладкая зависимость от S_k . Система вихревых уравнений может быть сведена к одному нелинейному эллиптическому уравнению [5]. Это делается следующим образом. Мы полагаем

$$\Phi = e^{(u+i\theta)/2}, \quad A = \frac{1}{2}(u - i\theta),$$

где $\theta = 2 \sum_{k=1}^N \arg(z - Z_k)$. Затем представляем u в виде $u = u_0 + v$, где

$$u_0 = - \sum_{k=1}^N \ln \left(1 + \frac{\mu}{|z - Z_k|^2} \right),$$

а v – решение уравнения

$$\Delta v = e^{u_0} e^v - 1 + g, \quad (9)$$

в котором

$$g(z) = 4 \sum_{k=1}^N \frac{\mu}{(\mu + |z - Z_k|^2)^2}.$$

При этом мы требуем, чтобы v удовлетворяла асимптотическому условию $v(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$ (число $\mu > 4N$ – вспомогательный параметр, который в сумме $u_0 + v$ сокращается). Уравнение (9) имеет единственное гладкое решение, которое лежит в пространстве Соболева $H^2(\mathbb{R}^2)$ (см. [5]).

Применим теперь эту процедуру к нашему решению, которое удовлетворяет условию (4):

$$\Phi(z) = (z - Z_1) \dots (z - Z_N) f(z), \quad f(z) > 0.$$

Обозначим $p(z) := (z - Z_1) \dots (z - Z_N)$, тогда $\Phi(z) = p(z)f(z)$.

Мы докажем, что единственное (при каждом значении параметров) решение $v = v(Z_1, \dots, Z_N)$ уравнения (9) гладко зависит от параметров $(S_1, \dots, S_N)$, т.е. симметрических функций от нулей $(Z_1, \dots, Z_N)$. Нам будет проще доказать это утверждение для функции $w := 2 \ln f + \ln(1 + |p|^2)$, которая отличается от v на известную функцию:

$$w = v + \ln(1 + |p|^2) - \sum_{k=1}^N \ln(\mu + |z - Z_k|^2).$$

Заметим, что

$$\ln(1 + |p|^2) - \sum_{k=1}^N \ln(\mu + |z - Z_k|^2) \in H^2(\mathbb{R}^2).$$

Для функции w мы получаем следующее уравнение:

$$\Delta w = \frac{|p|^2}{1 + |p|^2} e^w - 1 + \Delta \ln(1 + |p|^2). \quad (10)$$

Отметим, что w является решением (10) тогда и только тогда, когда

$$v = w - \ln(1 + |p|^2) + \sum_{k=1}^N \ln(\mu + |z - Z_k|^2)$$

является решением (9).

Мы докажем, что $(S_1, \dots, S_N) \mapsto w(S_1, \dots, S_N)$ есть гладкое отображение $\mathbb{C}^N \rightarrow H^2(\mathbb{R}^2)$, используя следующую форму теоремы о неявной функции на банаховом пространстве.

ТЕОРЕМА 4 (теорема о неявной функции). Пусть X, Y, Z – банаховы пространства, $W \subset X \times Y$ – окрестность точки (x_0, y_0) , $\Psi: W \rightarrow Z$ – отображение класса $C^1(W)$ и $\Psi(x_0, y_0) = 0$. Предположим, что существует ограниченный обратный оператор $(\Psi'_y(x_0, y_0))^{-1}: Z \rightarrow Y$.

Тогда найдутся шар $B(x_0, \delta) \subset X$ и C^1 -гладкое отображение $\phi: B(x_0, \delta) \rightarrow Y$ такие, что:

а) $\phi(x_0) = y_0$;

б) $\Psi(x, \phi(x)) \equiv 0$;

в) существует шар $B(y_0, \varepsilon) \subset Y$ такой, что $\phi(x)$ – единственное решение уравнения $\Psi(x, y) = 0$ относительно y , лежащее в этом шаре.

Кроме того, если $\Psi \in C^r$, $r \in \mathbb{N}$, то и $\phi \in C^r(B(x_0, \delta))$. (Значит, если $\Psi \in C^\infty$, то и $\phi \in C^\infty$.)

Применим эту теорему к отображению $F: H^2(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{C}^N \rightarrow L^2$, которое задается формулой

$$F(v; S) = -\Delta v + \frac{|p(S)|^2}{1 + |p(S)|^2} e^v - 1 + \Delta \ln(1 + |p(S)|^2),$$

где $S := (S_1, \dots, S_N) \in \mathbb{C}^N$ (здесь v – не обязательно решение (9)). Чтобы применить теорему 4, мы должны проверить, что $F(v; S)$ удовлетворяет ее условию. Для этого докажем следующие две леммы.

ЛЕММА 1. *Отображение $F(v; S)$ – гладкое отображение из пространства $H^2(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{C}^N$ в $L^2(\mathbb{R}^2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем F в следующем виде:

$$F(v; S) = -\Delta v + \frac{|p(S)|^2}{1 + |p(S)|^2} (e^v - 1) - \frac{1}{1 + |p(S)|^2} + \Delta \ln(1 + |p(S)|^2).$$

Чтобы доказать, что отображение F гладкое, достаточно показать, что $e^v - 1$ лежит в $L^2(\mathbb{R}^2)$ для $v \in H^2(\mathbb{R}^2)$ и отображение $v \mapsto e^v - 1$ – гладкое отображение из H^2 в L^2 . Но согласно теореме вложения Соболева имеется непрерывное вложение пространства $H^2(\mathbb{R}^2)$ в пространство $BC(\mathbb{R}^2)$ ограниченных непрерывных функций на $\mathbb{R}^2$, снабженное нормой $\|f\|_{BC} = \sup_{x,y} |f(x, y)|$. Пользуясь этим, несложно доказать оценку

$$\|v^m\|_{L^2} \leq C^{m-1} \|v\|_{L^2} \|v\|_{H^2}^{m-1},$$

из которой и вытекает требуемое утверждение.

ЛЕММА 2. *Обозначим через $w = w(S)$ единственное решение уравнения (10), соответствующее единственному решению v уравнения (9). Это и есть неявная функция, задаваемая уравнением $F(w(S); S) = 0$. Тогда оператор $h \mapsto F'_v(w(S); S)h$ (из $H^2(\mathbb{R}^2)$ в $L^2(\mathbb{R}^2)$) обратим для всякого $S \in \mathbb{C}^N$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для производной отображения F по v верна формула

$$F'_v h = -\Delta h + \frac{|p(S)|^2}{1 + |p(S)|^2} e^v h.$$

Если $v = w(S)$, то коэффициент при h имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{|p(S)|^2}{1 + |p(S)|^2} e^{w(S)} &= \\ &= \frac{|p(S)|^2}{1 + |p(S)|^2} \exp \left(v(S) - \sum_{k=1}^N \ln(\mu + |z - Z_k|^2) + \ln(1 + |p(S)|^2) \right) = \\ &= |p(S)|^2 \exp \left(v(S) - \sum_{k=1}^N \ln(\mu + |z - Z_k|^2) \right) = |\Phi(S)|^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Поэтому нам нужно доказать, что оператор $F'_v h = Ah := -\Delta h + |\Phi|^2 h$ имеет ограниченный обратный. Мы знаем, что $|\Phi|^2$ — гладкая функция на плоскости, $0 \leq |\Phi|^2 \leq 1$ и $|\Phi| \rightarrow 1$ при $|z| \rightarrow \infty$.

Сначала покажем, что обратим оператор $B: H^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ вида $Bh = -\Delta h + s(x, y)h$, где $s(x, y)$ — гладкая функция, $\delta \leq s(x, y) \leq 1$ для некоторого $\delta > 0$. Перепишем B в виде $Bh = -\Delta h + h + \psi(x, y)h$, где $\psi(x, y) = 1 - s(x, y)$. Заметим, что ψ — гладкая функция, $0 \leq \psi(x, y) \leq 1 - \delta$.

Используя преобразование Фурье

$$\hat{u} = \mathcal{F}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(x\xi_1 + y\xi_2)} u(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

мы можем показать, что

$$\|(1 + x^2 + y^2)\hat{h}\|_{L^2} \leq \text{const} \cdot \|Bh\|_{L^2},$$

откуда $\|Bh\|_{L^2} \geq \gamma \|h\|_{H^2}$ для некоторого $\gamma > 0$. Далее, заметим, что

$$Bh = -\Delta h + h + \psi(x, y)h = B_1 h + B_2 h,$$

где $B_1 h = -\Delta h + h$, $B_2 h = \psi(x, y)h$. Оператор B_1 обратим, поскольку

$$B_1^{-1} h = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\mathcal{F} h}{1 + x^2 + y^2} \right),$$

поэтому B_1 сюръективен. Далее, $\|B_1 h\|_{L^2} = \|(1 + x^2 + y^2)\hat{h}\|_{L^2} \geq \|\hat{h}\|_{L^2} = \|h\|_{L^2}$, а $\|B_2 h\|_{L^2} \leq (1 - \delta)\|h\|_{L^2}$. Из этого следует, что B также сюръективен, а значит, B обратим.

Чтобы доказать, что оператор $A = -\Delta + |\Phi|^2$ обратим, мы приблизим его обратимым оператором A_ϵ , определяемым функцией ϵ со следующими свойствами: $\epsilon(x, y)$ — гладкая функция, $\epsilon(x, y) \geq 0$, она удовлетворяет неравенству $\delta \leq |\Phi|^2 + \epsilon \leq 1$ для некоторого $\delta > 0$ и обращается в нуль вне некоторого круга $B_R = B(0, R)$. Пусть $A_\epsilon h := -\Delta h + (|\Phi|^2 + \epsilon)h$ (этот оператор также отображает $H^2(\mathbb{R}^2)$ в $L^2(\mathbb{R}^2)$). Как уже доказано, оператор A_ϵ обратим и $A_\epsilon h = Ah + \epsilon h$, поэтому $h = A_\epsilon^{-1} Ah + A_\epsilon^{-1}(\epsilon h)$, откуда $A_\epsilon^{-1} Ah = h - A_\epsilon^{-1}(\epsilon h) = (I - K_\epsilon)h$, где I — тождественный оператор, $K_\epsilon h = A_\epsilon^{-1}(\epsilon h)$.

Очевидно, K_ϵ – компактный оператор, так как компактно вложение $H^2(B_R) \hookrightarrow L^2(B_R)$. Теперь докажем, что уравнение $(I - K_\epsilon)h = 0$ имеет лишь тривиальное решение в $H^2(\mathbb{R}^2)$. В самом деле, если $(I - K_\epsilon)h = 0$, то $Ah = A_\epsilon(I - K_\epsilon)h = 0$, и, значит, $-\Delta h + |\Phi|^2 h = 0$. Умножая левую часть этого равенства на h и интегрируя по частям, получаем

$$(\nabla h, \nabla h)_{L^2} + (|\Phi|^2 h, h)_{L^2} = 0.$$

Но это значит, что $h = 0$, так как $|\Phi| \rightarrow 1$ при $|z| \rightarrow \infty$. Из теоремы Фредгольма следует, что $I - K_\epsilon$ обратим, а тогда и оператор $A = A_\epsilon(I - K_\epsilon)$ также обратим.

Доказав эти леммы, мы можем теперь применить теорему о неявной функции и получить, что функция w гладко зависит от $S_1, \dots, S_N$ в $H^2(\mathbb{R}^2)$. Но H^2 -норма мажорирует равномерную норму, а значит, w гладко зависит от $S_1, \dots, S_N$ (в терминах п. 1 теоремы 2). Тогда и функции A_1, A_2, Φ , которые задаются формулами

$$\begin{aligned} A_1 &= \partial_2 \ln f = \frac{1}{2}(\partial_2 w - \partial_2 \ln(1 + |p|^2)), \\ A_2 &= -\partial_1 \ln f = \frac{1}{2}(-\partial_1 w + \partial_1 \ln(1 + |p|^2)), \\ \Phi &= p e^{(w - \ln(1 + |p|^2))/2} = \frac{p}{\sqrt{1 + |p|^2}} e^{w/2}, \end{aligned}$$

также гладко зависят от $S_1, \dots, S_N$ (в терминах п. 1 теоремы 2).

Определение функций $\chi_{j,k}$. Подставляя выражения (6) в условие ортогональности, мы получим уравнение на функцию $\chi_{j,k}$:

$$-\Delta \chi_{j,k} + |\Phi|^2 \chi_{j,k} = |\Phi|^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial S_{j,k}}, \quad (12)$$

где $\vartheta = \arg \Phi$.

Правая часть этого уравнения не лежит в L^2 . Однако мы все же сможем воспользоваться обратимостью оператора $-\Delta + |\Phi|^2$, изменив правую часть вдали от нулей Φ .

Пусть $\xi(r) \geq 0$ – гладкая функция от r , $r \geq 0$, со следующими свойствами: $\xi(r) = 1$ при $0 \leq r \leq 1$, $\xi(r)$ убывает при $1 \leq r \leq 2$ и обращается в нуль при $r \geq 2$. Выберем гладкую функцию $R = R(S)$ так, чтобы круг $\{|z| < R\}$ содержал все нули многочлена $p(z) = z^N + S_1 z^{N-1} + \dots + S_{N-1} z + S_N$. Например, можно взять

$$R(S) = R(S_1, \dots, S_N) = \sqrt{1 + |S_1|^2} + \sqrt[4]{1 + |S_2|^2} + \dots + \sqrt[2N]{1 + |S_N|^2}.$$

Пусть $\rho(z; S) := \xi(|z|/R(S))$. Тогда ρ – гладкая функция с компактным носителем (по z), тождественно равная 1 в круге, содержащем все нули Φ .

Предположим, что $\chi_{j,k}$ – гладкое решение (12). Рассмотрим функцию

$$v_{j,k} := \chi_{j,k} + (1 - \rho) \frac{\partial \vartheta}{\partial S_{j,k}}. \quad (13)$$

Эта функция удовлетворяет уравнению

$$-\Delta v_{j,k} + |\Phi|^2 v_{j,k} = -\rho |\Phi|^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial S_{j,k}} - \Delta \left((1 - \rho) \frac{\partial \vartheta}{\partial S_{j,k}} \right). \quad (14)$$

В правой части этого уравнения стоит гладкая финитная функция. Поскольку оператор $-\Delta + |\Phi|^2$ обратим, оно имеет единственное решение в $H^2(\mathbb{R}^2)$, которое является гладким в силу известных теорем о регулярности решений эллиптических уравнений. Таким образом, вместо того чтобы решать уравнение (12) для $\chi_{j,k}$, мы решаем уравнение (14) для $v_{j,k}$ и находим $\chi_{j,k}$ из соотношения (13).

Чтобы доказать, что $v_{j,k}$ гладко зависят от $S = (S_1, \dots, S_N)$, мы опять используем теорему о неявной функции, применяя ее к отображению

$$\tilde{F}(v; S) := -\Delta v + |\Phi(S)|^2 v + \rho(S) |\Phi(S)|^2 \frac{\partial \vartheta(S)}{\partial S_{j,k}} + \Delta \left((1 - \rho(S)) \frac{\partial \vartheta(S)}{\partial S_{j,k}} \right). \quad (15)$$

Заметим, что $\tilde{F}: H^2 \times \mathbb{C}^N \rightarrow L^2$ есть гладкое отображение, а его производная по v — обратимый оператор $-\Delta + |\Phi|^2$.

Теперь мы полагаем $\chi_{j,k} = v_{j,k} - (1 - \rho) \partial \vartheta / \partial S_{j,k}$ и определяем $n_{j,k}$ выражением (6). Тогда $n_{j,k} \in (H^1)^4$, а отображения $(S_1, \dots, S_N) \mapsto n_{j,k}(S_1, \dots, S_N)$, рассматриваемые как отображения из $\mathbb{C}^N$ в $(L^2)^4$, — гладкие.

Линейная независимость $n_{j,k}$. Пусть $p(z) = p_1(z) + ip_2(z)$. Обозначим $\tilde{w} := 2 \ln f$. Тогда

$$\begin{aligned} n_{j,k}^{(1)} &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial S_{j,k}} - \Phi_2 \chi_{j,k} = e^{\tilde{w}/2} \left(\frac{\partial p_1}{\partial S_{j,k}} + \frac{p_1}{2} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial S_{j,k}} - p_2 \chi_{j,k} \right), \\ n_{j,k}^{(2)} &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial S_{j,k}} + \Phi_1 \chi_{j,k} = e^{\tilde{w}/2} \left(\frac{\partial p_2}{\partial S_{j,k}} + \frac{p_2}{2} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial S_{j,k}} + p_1 \chi_{j,k} \right). \end{aligned}$$

Предположим, что

$$\sum_{j,k} c_{j,k} n_{j,k}^{(1)} = \sum_{j,k} c_{j,k} n_{j,k}^{(2)} = 0$$

для некоторых вещественных чисел $c_{j,k}$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} c_{j,k} \left(\frac{\partial p_1}{\partial S_{j,k}} + \frac{1}{2} p_1 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial S_{j,k}} - p_2 \chi_{j,k} \right) &= 0, \\ \sum_{j,k} c_{j,k} \left(\frac{\partial p_2}{\partial S_{j,k}} + \frac{1}{2} p_2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial S_{j,k}} + p_1 \chi_{j,k} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Умножая первое уравнение на $2p_1$, второе на $2p_2$ и складывая их, получаем

$$\sum_{j,k} c_{j,k} \left(2p_1 \frac{\partial p_1}{\partial S_{j,k}} + 2p_2 \frac{\partial p_2}{\partial S_{j,k}} + (p_1^2 + p_2^2) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial S_{j,k}} \right) = 0,$$

что можно записать как

$$\sum_{j,k} c_{j,k} \left(\frac{\partial |p|^2}{\partial S_{j,k}} + |p|^2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial S_{j,k}} \right) = 0. \quad (16)$$

Функция $\tilde{w}$ удовлетворяет уравнению $\Delta \tilde{w} = |p|^2 e^{\tilde{w}} - 1$. Дифференцируя его по параметрам $S_{j,k}$, мы получаем

$$\Delta \frac{\partial \tilde{w}}{\partial S_{j,k}} = e^{\tilde{w}} \left(\frac{\partial |p|^2}{\partial S_{j,k}} + |p|^2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial S_{j,k}} \right).$$

С помощью (16) из последнего уравнения мы можем заключить, что

$$\sum_{j,k} c_{j,k} \Delta \frac{\partial \tilde{w}}{\partial S_{j,k}} = e^{\tilde{w}} \sum_{j,k} c_{j,k} \left(\frac{\partial |p|^2}{\partial S_{j,k}} + |p|^2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial S_{j,k}} \right) = 0.$$

Другими словами, функция $\sum_{j,k} c_{j,k} \partial \tilde{w} / \partial S_{j,k}$ гармонична. Однако частные производные

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial S_{j,k}} = \frac{\partial w}{\partial S_{j,k}} - \frac{\partial \ln(1 + |p|^2)}{\partial S_{j,k}} = \frac{\partial w}{\partial S_{j,k}} - \frac{\partial |p|^2}{\partial S_{j,k}} \frac{1}{1 + |p|^2}$$

стремятся к нулю при $|z| \rightarrow \infty$. Из теоремы Лиувилля вытекает, что

$$\sum_{j,k} c_{j,k} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial S_{j,k}} \equiv 0.$$

Тогда из уравнения (16) мы получаем, что

$$\sum_{j,k} c_{j,k} \frac{\partial |p|^2}{\partial S_{j,k}} \equiv 0,$$

но это возможно лишь тогда, когда все коэффициенты $c_{j,k}$ нулевые.

Благодарности. Работа частично поддержана РФФИ (гранты № 05-01-00498, 05-01-00370) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-6705.2006.1).

Список литературы

- [1] А. Г. Сергеев, С. В. Чечин, *ТМФ*, **85**:3 (1990), 397–411.
- [2] T. M. Samols, *Comm. Math. Phys.*, **145**:1 (1992), 149–179.
- [3] P. J. Ruback, *Nucl. Phys. B*, **296**:3 (1988), 669–678.
- [4] F. Abdelwahid, J. Burzlaff, *J. Math. Phys.*, **35**:9 (1994), 4651–4660.
- [5] A. Jaffe, C. Taubes, *Vortices and Monopoles*, Prog. Phys., **2**, Birkhäuser, Boston, 1980.
- [6] D. Stuart, *Comm. Math. Phys.*, **159**:1 (1994), 51–91.
- [7] N. S. Manton, *Phys. Lett. B*, **110**:1 (1982), 54–56.
- [8] R. MacKenzie, *Phys. Lett. B*, **352** (1995), 96–98; [arXiv: hep-th/9503044](#).
- [9] K. Arthur, J. Burzlaff, *Lett. Math. Phys.*, **36**:3 (1996), 311–318; [arXiv: hep-th/9503010](#).

Поступила в редакцию 25.12.2006,
после доработки 3.05.2007