Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Пупышев, Строение регулярных решений уравнений Фаддеева вблизи точки парного удара, *ТМФ*, 2008, том 156, номер 1, 112–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6233>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 13:51:39

© 2008 г.

В. В. Пупышев*

СТРОЕНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА ВБЛИЗИ ТОЧКИ ПАРНОГО УДАРА

Исследуются двумерные и трехмерные уравнения Фаддеева для системы трех частиц с центральными или S -волновыми парными взаимодействиями. Регулярные решения таких уравнений представлены бесконечными рядами по целым степеням расстояния между двумя частицами и искомым функциям других трехчастичных координат. Построение таких функций сведено к решению алгебраических рекуррентных уравнений. Для регулярных решений уравнений Фаддеева выведены граничные условия в точке парного удара.

Ключевые слова: задача трех частиц, дифференциальные уравнения Фаддеева, регулярные решения, точка парного удара.

1. ВВЕДЕНИЕ

После работы Като [1] разложения трехчастичной волновой функции вблизи точки парного удара в случае кулоновских парных взаимодействий исследовались многими авторами. Результаты таких исследований представлены в работах [2]–[6] и во многих других работах, обсужденных в обзоре [7]. Наиболее полный анализ строения волновой функции вблизи точки парного удара дан в работе [8], где исследовалось шестимерное уравнение Шредингера для системы трех частиц с центральными парными взаимодействиями более общего вида, чем кулоновские. Регулярные общее и частные физические решения такого уравнения были представлены бесконечными рядами по целым степеням расстояния между двумя частицами и искомым функциям других трехчастичных координат. Построение таких функций в угловых базисах, образованных сферическими и бисферическими гармониками или симметризованными D -функциями Вигнера, было сведено к решению простых алгебраических рекуррентных уравнений. Для проекций физических решений на угловые базисные функции были выведены граничные условия в точке парного удара.

Настоящая работа является продолжением вышеупомянутой работы [8] и посвящена построению и анализу разложений регулярных решений двумерных и трехмерных уравнений Фаддеева [9]–[11] вблизи точки парного удара. Главная цель

*Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: pupyshev@thsun1.jinr.ru

нашего анализа – вывод связей в точке парного удара, т.е. линейных соотношений, связывающих частные производные исследуемых решений в этой точке.

С теоретической точки зрения искомые связи интересны как аналоги и обобщения давно известного условия Като, но уже для парциальных фаддеевских компонент волновой функции. Вывод таких связей представляется актуальным и с практической точки зрения. Дело в том, что включение связей в дискретные сплайн-аналоги [12], [13] уравнений Фаддеева – простой способ заметно улучшить поточечную сходимость вычисляемого решения к точному вблизи точки парного удара.

Наши исследования основаны на известном в теории дифференциальных уравнений асимптотическом методе [14], [15], когда решение исследуемого дифференциального уравнения в частных производных ищется в виде бесконечного степенного ряда по одному аргументу и неизвестным функциям всех других аргументов. На первом этапе для таких функций из исходного уравнения выводится рекуррентная цепочка бесконечных систем уравнений, а затем доказывается ее однозначная разрешимость. Если описанный этап удастся завершить, то построенный ряд называется формальным асимптотическим решением исходного дифференциального уравнения. Следующий и, как правило, довольно сложный этап состоит в доказательстве асимптотической сходимости и дифференцируемости полученного ряда.

В настоящей работе реализуется первый этап построения асимптотических разложений регулярных решений двумерных и трехмерных уравнений Фаддеева вблизи точки парного удара: для таких решений выводятся формальные асимптотические разложения, вопрос о сходимости которых в каком-либо смысле остается открытым. Доказательство сходимости принципиально затрудняется наличием в полученных разложениях произвольных функций. Поэтому предполагается, что все разложения асимптотические и дифференцируемые, а все содержащиеся в них неопределенные функции отличны от нуля. Далее выводятся явные асимптотики полученных рядов в виде подсумм их нескольких наиболее медленно убывающих слагаемых. Наконец, вычисляются частные производные разных порядков таких подсумм в точке парного удара и из полученной совокупности выражений исключаются все неопределенные функции. В итоге получают искомые связи для парциальных фаддеевских компонент.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И КЛЮЧЕВЫЕ ФОРМУЛЫ

Будем использовать систему единиц, в которой заряд электрона e и постоянная Планка $\hbar$ равны единице. В трехмерном координатном пространстве $\mathbb{R}^3$ фиксируем декартову систему координат S с осями $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ и $\hat{e}_3$ и начальной точкой O , совпадающей с центром масс исследуемой системы $\{p_1, p_2, p_3\}$ трех частиц p_1 , p_2 и p_3 с массами m_1 , m_2 , m_3 и зарядами z_1 , z_2 , z_3 . Пусть в этой системе $\mathbf{a}_{ij}$ – разность радиус-векторов $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{a}_j$ частиц p_i и p_j , а $\mathbf{x}_k$ и $\mathbf{y}_k$ – приведенные векторы Якоби [9],

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &\equiv \sqrt{2\mu_{ij}} (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i), & \mu_{ij} &\equiv \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}, \\ \mathbf{y}_k &\equiv \sqrt{2\mu_{k,ij}} \left(\frac{m_i \mathbf{a}_i + m_j \mathbf{a}_j}{m_i + m_j} - \mathbf{a}_k \right), & \mu_{k,ij} &\equiv \frac{m_k (m_i + m_j)}{m_1 + m_2 + m_3}, \end{aligned} \quad (1)$$

где индексы i, j, k образуют циклическую перестановку индексов 1, 2, 3: индекс i переходит в k , j – в i , а k – в j . В шестимерном координатном пространстве $\mathbb{R}^6$ векторам $\mathbf{x}_k$ и $\mathbf{y}_k$ сопоставим вектор $\mathbf{r}_k = (\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$.

Выберем пару $\{p_j, p_k\}$ частиц p_j и p_k . В $\mathbb{R}^6$ под окрестностью точки парного удара частиц p_j и p_k подразумевается область $\mathcal{G} \equiv \{\mathbf{r}_i : x_i \ll 1, y_i > 0\}$, в которой эти частицы близки друг к другу, но отделены от частицы p_i .

Пусть Ψ^ε – регулярное ($|\Psi^\varepsilon(\mathbf{r})| < \infty \forall \mathbf{r}$) решение уравнения Шредингера для системы $\{p_1, p_2, p_3\}$ в $\mathbb{R}^6$:

$$(H - E)\Psi^\varepsilon = 0, \quad H = H_0 + V, \quad V \equiv \sum_{k=1}^3 V_k, \quad (2)$$

где H_0 – свободный гамильтониан, E – полная энергия, V_k – взаимодействие между частицами p_i и p_j , а ε – полный набор сохраняющихся квантовых чисел рассматриваемой трехчастичной системы.

В теории Фаддеева [9] решение Ψ^ε рассматривается как сумма его трех фаддеевских компонент Ψ_1^ε , Ψ_2^ε и Ψ_3^ε , подчиненных в $\mathbb{R}^6$ системе трех дифференциальных уравнений

$$(H_0 - E)\Psi_k^\varepsilon = -V_k\Psi^\varepsilon, \quad \Psi^\varepsilon = \Psi_1^\varepsilon + \Psi_2^\varepsilon + \Psi_3^\varepsilon, \quad k = 1, 2, 3. \quad (3)$$

В случае центральных парных взаимодействий, например кулоновских

$$V_k(x_k(a_{ij})) = \frac{z_i z_j}{a_{ij}}, \quad V_k(x_k) = \frac{q_k}{x_k}, \quad q_k \equiv z_i z_j \sqrt{2\mu_{ij}}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (4)$$

или взаимодействий более общего вида

$$V_k(x_k) = \frac{q_k}{x_k} + \bar{V}_k(x_k), \quad \bar{V}_k(x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} x_k^n \bar{V}_{kn}, \quad \bar{V}_{kn} = \text{const}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (5)$$

с гамильтонианом H коммутируют сам H , квадрат оператора полного углового момента $\mathbf{l}$, его компонента l_3 и оператор P_r инверсии $\mathbf{r}_i \rightarrow -\mathbf{r}_i$. Набор $\varepsilon = \{E, \ell, m, \sigma\}$ состоит из собственных чисел этих операторов.

Пусть некулоновские слагаемые $\bar{V}_k$ парных взаимодействий (5) являются аналитическими функциями. Полагаем, что

$$x \equiv x_i \rightarrow 0, \quad y \equiv y_i > 0, \quad u \equiv \cos \theta = \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})}{xy}, \quad k \neq i, \quad q \equiv q_i,$$

и используем координатное представление $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} | \equiv \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i |$, в котором

$$H_0 = -\partial_x^2 - \frac{2}{x}\partial_x + \frac{\mathbf{l}_x^2}{x^2} - \partial_y^2 - \frac{2}{y}\partial_y + \frac{\mathbf{l}_y^2}{y^2}, \quad \mathbf{l}_x \equiv -i\mathbf{x} \times \nabla_x, \quad \mathbf{l}_y \equiv -i\mathbf{y} \times \nabla_y. \quad (6)$$

В качестве собственных функций операторов $\mathbf{l}^2$, l_3 , P_r используем бисферические гармоники [16]

$$\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) \equiv \sum_{\alpha=-a}^a C_{\alpha a b}^{\ell m} Y_{a\alpha}(\hat{y}) Y_{b\beta}(\hat{x}), \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{l}, \quad (-1)^{a+b} = \sigma, \quad (7)$$

а симметризованные D -функции Вигнера представим в виде [4]

$$D_{mm'}^{\ell\sigma}(\omega^t) = \left[\frac{2\ell+1}{16\pi^2(1+\delta_{m'0})} \right]^{1/2} [D_{mm'}^{\ell}(\omega^t) + \sigma(-1)^{\ell-m'} D_{m,-m'}^{\ell}(\omega^t)], \quad (8)$$

где $C_{a\alpha b\beta}^{\ell m}$ – коэффициент Клебша–Гордана, Y_{fe} – сферическая гармоника,

$$Y_{fe}(\hat{a}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ie\varphi_a} \Theta_{fe}(\cos \theta_a), \quad \hat{a} \equiv (\theta_a, \varphi_a), \quad a = \hat{x}, \hat{y}, \quad (9)$$

$\omega^t = (\alpha^t, \beta^t, \gamma^t)$ – набор углов Эйлера, определяющих ориентацию выбранной “подвижной” системы координат S^t относительно системы S .

Введем две “подвижные” системы координат $S^t = (\mathbf{e}_1^t, \mathbf{e}_2^t, \mathbf{e}_3^t)$, $t = x, y$. Пусть начальные точки O^x и O^y систем S^x и S^y совпадают с начальной точкой O фиксированной системы $S = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, а их реперы таковы, что

$$\begin{aligned} (\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_1^x) &> 0, & (\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_2^x) &= 0, & (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3^x) &= x, \\ (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1^y) &< 0, & (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2^y) &= 0, & (\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_3^y) &= y. \end{aligned}$$

Тогда орты $\mathbf{e}_2^x$ и $\mathbf{e}_2^y$ направлены вдоль нормали $\mathbf{n} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ к плоскости трех частиц, а система S^x получается поворотом системы S^y вокруг орта $\mathbf{e}_2^y$ на угол θ между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. В системе S ориентация этих векторов задана углами $\hat{x} = (\theta_x, \varphi_x)$ и $\hat{y} = (\theta_y, \varphi_y)$, а в системе S^t – углами $\hat{x}^t$ и $\hat{y}^t$:

$$\begin{aligned} \hat{x}^t &= (\theta_x^t, \varphi_x^t) = (0, 0), & \hat{y}^t &= (\theta_y^t, \varphi_y^t) = (\theta, 0), & t &= x, \\ \hat{x}^t &= (\theta_x^t, \varphi_x^t) = (\theta, \pi), & \hat{y}^t &= (\theta_y^t, \varphi_y^t) = (0, 0), & t &= y, \end{aligned}$$

поэтому переход $S \rightarrow S^x$ определяется углами Эйлера $\omega^x = (\varphi_x, \theta_x, \gamma^x)$, а переход $S \rightarrow S^y$ – углами Эйлера $\omega^y = (\varphi_y, \theta_y, \gamma^y)$, где углы γ^t таковы, что

$$\cos \gamma^t = \operatorname{ctg} \theta \cos \theta_t - \operatorname{cosec} \theta \cos \theta_{t'}, \quad t, t' = x, y \quad t' \neq t.$$

Далее будут рассматриваться два случая $t = x$ и $t = y$. В случае $t = x$ “подвижной” является система S^x , а в случае $t = y$ – система S^y .

Выведем ключевые формулы дифференцирования.

Векторы Якоби (1) кинематически связаны [17]:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{y}_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_{ki} & s_{ki} \\ -s_{ki} & c_{ki} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{y}_i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_{ki} \\ s_{ki} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos \gamma_{ki} \\ \sin \gamma_{ki} \end{pmatrix}, \quad \gamma_{ki} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right],$$

где γ_{ki} – кинематический угол, зависящий только от отношений масс частиц. В силу такой связи x_k, y_k – функции аргументов x, y, u :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \mid x_k \rangle &= x_k(x, y, u) = [(c_{ki}x)^2 + (s_{ki}y)^2 + 2c_{ki}s_{ki}uxy]^{1/2}, \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \mid y_k \rangle &= y_k(x, y, u) = [(s_{ki}x)^2 + (c_{ki}y)^2 - 2c_{ki}s_{ki}uxy]^{1/2}, \end{aligned} \quad (10)$$

поэтому

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \mid x_k \rangle &= x_k(x, y, u) = \frac{|s_{ki}|y}{g(v_x)}, & \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \mid y_k \rangle &= y_k(x, y, u) = \frac{c_{ki}y}{g(v_y)}, \\ g(v) &\equiv (1 - 2uv + v^2)^{-1/2}, & v_x &\equiv -\frac{c_{ki}x}{s_{ki}y}, & v_y &\equiv \frac{s_{ki}x}{c_{ki}y}. \end{aligned} \quad (11)$$

Следовательно, функция $1/x_k(x, y, u)$ пропорциональна производящей функции $g(v_x)$ для полиномов Лежандра $P_n(u)$ (см. [16]), поэтому

$$\frac{1}{x_k} = \frac{1}{|s_{ki}|y} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{c_{ki}x}{s_{ki}y} \right)^n P_n(u), \quad k \neq i. \quad (12)$$

Из соотношений (11), (12) вытекает формула дифференцирования

$$\partial_x^n x_k|_{x=0} = c_{ki} \frac{s_{ki}}{|s_{ki}|} \frac{n!}{2n-1} \left(-\frac{c_{ki}}{s_{ki}y} \right)^{n-1} [P_n(u) - P_{n-2}(u)], \quad n = 0, 1, \dots \quad (13)$$

Аналогичным образом доказывается формула дифференцирования

$$\partial_x^n y_k|_{x=0} = s_{ki} \frac{n!}{2n-1} \left(\frac{s_{ki}}{c_{ki}y} \right)^{n-1} [P_n(u) - P_{n-2}(u)], \quad n = 0, 1, \dots \quad (14)$$

Теперь приведем и поясним разложения, доказанные в работе [8] и являющиеся ключевыми для построений, выполненных в разделе 3.

Гладкая часть $\bar{V}_k$ парного взаимодействия (5) является рядом

$$\bar{V}_k(x_k(x, y, u)) = \sum_{p=0}^{\infty} x^p \sum_{s=0}^p \bar{V}_k^{ps}(|s_{ki}|y) P_s(u), \quad (-1)^{p+s} = 1. \quad (15)$$

С учетом представлений (5), (12), (15) полное взаимодействие $V = V_1 + V_2 + V_3$ разлагается в двойной ряд

$$\begin{aligned} V(x, y, u) &= \frac{q}{x} + V^{00}(y) + \sum_{p=1}^{\infty} x^p \sum_{s=0}^p V^{ps}(y) P_s(u), \\ V^{ps}(y) &\equiv \bar{V}_{ip} \delta_{s0} + \delta_{ps} \sum_{k \neq i} \frac{q_k}{|s_{ki}|y} \left(-\frac{c_{ki}}{s_{ki}y} \right)^p + \sum_{k \neq i} \bar{V}_k^{ps}(y), \end{aligned} \quad (16)$$

где отличны от нуля только константы $V^{p0} = \bar{V}_{ip}$ с нечетным p и функции $V^{ps}(y)$ с четной суммой $p + s$. При $p \leq 2$ их можно найти по формулам

$$V^{00}(y) = V_{i0} + \sum_{k \neq i} \left[\frac{q_k}{|s_{ki}|y} + \bar{V}_k(|s_{ki}|y) \right], \quad V^{10}(y) = V_{i1},$$

$$V^{11}(y) = \sum_{k \neq i} c_{ki} \left(\frac{s_{ki}}{|s_{ki}|} \right) \left[\bar{V}_k'(|s_{ki}|y) - \frac{q_k}{(s_{ki}y)^2} \right],$$

$$V^{20}(y) = V_{i2} + \frac{1}{6} \sum_{k \neq i} c_{ki}^2 \left[\bar{V}_k''(|s_{ki}|y) + \frac{2\bar{V}_k'(|s_{ki}|y)}{|s_{ki}|y} \right],$$

$$V^{22}(y) = \sum_{k \neq i} \left\{ \frac{q_k c_{ki}^2}{(|s_{ki}|y)^3} + \frac{1}{3} c_{ki}^2 \left[\frac{\bar{V}_k''(|s_{ki}|y) - \bar{V}_k'(|s_{ki}|y)}{|s_{ki}|y} \right] \right\},$$

где $\bar{V}'_k$ и $\bar{V}''_k$ – первая и вторая производные функции $\bar{V}_k(x_k)$ по аргументу x_k в точке $x_k = |s_{ki}|y$, т.е. при $x = 0$.

Разложение решения Ψ^ε по бисферическому базису (7) можно представить конечной суммой

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{ab} \Psi_{ab}^\varepsilon(x, y) \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}), \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{l}, \quad (-1)^{a+b} = \sigma, \quad (17)$$

где ее бисферические компоненты Ψ_{ab}^ε являются рядами

$$\Psi_{ab}^\varepsilon(x, y) = \sum_{n=b \geq \mu(\sigma)}^{\infty} x^n \Psi_{ab}^{n\varepsilon}(y), \quad \mu(\sigma) \equiv \frac{1}{2} [1 - \sigma(-1)^\ell], \quad (18)$$

а компоненты $\Psi_{ab}^{n\varepsilon}(y)$ этих рядов подчинены цепочкам рекуррентных по индексу $n \geq b$ алгебраических уравнений и однозначно выражаются через неопределенные функции $\Psi_{ab}^{n\varepsilon}(y)$, $b = n$, и известные коэффициенты q_k , $\bar{V}_{ip}$ и функции $\bar{V}^{ps}(y)$, содержащиеся в разложении (16) полного взаимодействия.

Разложение решения Ψ^ε по D^σ -базису является конечной суммой

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} \Psi_{m'}^{\varepsilon t}(x, y, \theta) D_{mm'}^{\ell \sigma*}(\omega^t), \quad t = x, y. \quad (19)$$

Все ее D^σ -компоненты $\Psi_{m'}^{\varepsilon t}$ в случае $t = x$ являются рядами

$$\Psi_{m'}^{\varepsilon x}(x, y, \theta) = \sum_{n=m'}^{\infty} x^n \sum_{a=m'}^{\ell+n-\mu(\sigma)} \Psi_{am'}^{n\varepsilon x}(y) \Theta_{am'}(u), \quad (20)$$

а в случае $t = y$ – рядами

$$\Psi_{m'}^{\varepsilon y}(x, y, \theta) = \sum_{n=\mu(\sigma)}^{\infty} x^n \sum_{b=m'}^n \Psi_{bm'}^{n\varepsilon y}(y) \Theta_{bm'}(u). \quad (21)$$

В обоих случаях Θ -компоненты $\Psi_{am'}^{n\varepsilon t}(y)$ подчиняются цепочкам рекуррентных по индексу $n \geq b$ алгебраических уравнений и однозначно выражаются через соответствующие ($t = x$ или $t = y$) произвольные функции $f_{m'}^{n+2,t}(y)$, известные коэффициенты q_k , $\bar{V}_{ip}$ и компоненты $\bar{V}^{ps}(y)$ разложения (16).

3. СЛУЧАЙ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ПАРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Исследуем строение фаддеевской компоненты Ψ_i^ε в бисферическом базисе.

Пусть решение Ψ^ε уравнения Шредингера представлено рядом (17) с известными компонентами $\Psi_{ab}^{n\varepsilon}(y)$ (18). Докажем, что такое представление порождает аналогичные представления фаддеевской компоненты

$$\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{ab} \Psi_{iab}^\varepsilon(x, y) \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}), \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{l}, \quad (-1)^{a+b} = \sigma, \quad (22)$$

и ее бисферических компонент

$$\Psi_{iab}^{\varepsilon}(x, y) \equiv \langle \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) | \Psi_i^{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle = \sum_{n=b \geq \mu(\sigma)}^{\infty} x^n \Psi_{iab}^{n\varepsilon}(y). \quad (23)$$

Для этого исследуем только одно уравнение системы Фаддеева (3), а именно уравнение, содержащее в левой части компоненту Ψ_i^{ε} . В этом уравнении представим операторы V_i , H_0 и решение Ψ^{ε} уравнения Шредингера соответствующими суммами (5), (6) и (17), (18). Правая часть получившегося уравнения является рядом по степеням x и базисным функциям $\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}$. Поэтому искомое регулярное решение Ψ_i^{ε} может быть рядом только того же типа, но пока без дополнительных ограничений на индексы a , b и n :

$$\Psi_i^{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{ab} \Psi_{iab}^{n\varepsilon}(y) \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}). \quad (24)$$

Заменяем компоненту Ψ_i^{ε} таким рядом. Спроецируем полученное уравнение на функции $\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y})$ и выведем для каждой пары $\{a, b\}$ алгебраическую и рекуррентную по индексу n цепочку уравнений

$$\begin{aligned} [b(b+1) - (n+2)(n+3)] \Psi_{iab}^{n+2,\varepsilon}(y) = & -[h_a(y) - V^{00}(y)] \Psi_{iab}^{n\varepsilon}(y) - \\ & - q \Psi_{ab}^{n+1,\varepsilon}(y) - \sum_{p=0}^n V_{ip} \Psi_{ab}^{n-p,\varepsilon}(y), \quad n = -2, -1, \dots, \end{aligned} \quad (25)$$

где h_a – диагональный матричный элемент оператора

$$h(\mathbf{y}) \equiv -\partial_y^2 - \frac{2}{y} \partial_y + \frac{\mathbf{l}_y^2}{y^2} + V^{00}(y) - E$$

в бисферическом базисе (7)

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m} | h(\mathbf{y}) | \mathcal{Y}_{a'b'}^{\ell m} \rangle &= \delta_{aa'} \delta_{bb'} h_a(y), \\ h_a(y) &\equiv -\partial_y^2 - \frac{2}{y} \partial_y + \frac{a(a+1)}{y^2} + V^{00}(y) - E. \end{aligned} \quad (26)$$

Пусть в этой цепочке $n < b$ или $b < \mu(\sigma)$, тогда $\Psi_{iab}^{n\varepsilon}(y) \equiv 0$, поэтому $\Psi_{iab}^{n\varepsilon}(y) \equiv 0$. Далее полагаем $n \geq b \geq \mu(\sigma)$. При таких ограничениях пробный ряд (24) становится рядом (22), а исследуемая цепочка однозначно разрешима: при данных a и b все искомые функции $\Psi_{iab}^{n\varepsilon}$ при $n > b$ выражаются через неопределенную функцию $\Psi_{iab}^{n\varepsilon}(y)$ с $n = b$ и известные функции $\Psi_{ab}^{n\varepsilon}$. Следовательно, разложения (22) и (23) существуют, что и требовалось доказать.

Теперь построим явные асимптотики рядов (23) при $b \leq 2$ как подсуммы их трех слагаемых наиболее медленно убывающих при $x \rightarrow 0$, а затем получим связи при $x = 0$ для производных $\partial_x^n \Psi_{iab}^{\varepsilon}$. Сначала в уравнениях (25) заменим функции $\Psi_{ab}^{n\varepsilon}(y)$ при $n \leq 3$ их явными выражениями, найденными в работе [8]. Решим полученные уравнения и выразим функции $\Psi_{iab}^{n\varepsilon}(y)$ как комбинации неопределенных функций

$\Psi_{ab}^{n\varepsilon}$ и $\Psi_{iab}^{n\varepsilon}$ с $n = b$, равных производным $(n!)^{-1}\partial_x^n \Psi_{ab}^\varepsilon(x, y)$ и $(n!)^{-1}\partial_x^n \Psi_{iab}^\varepsilon(x, y)$ при $x = 0$ и $n = b$. Используя такие комбинации, получаем следующие асимптотические формулы для компонент рядов (23):

$$\begin{aligned} \Psi_{i\ell 0}^\varepsilon(x, y) = & \left\{ 1 + \frac{x^2}{6}(h_\ell - V^{00}) \left[1 + \frac{x^2}{20}(h_\ell - V^{00}) \right] \right\} \Psi_{i\ell 0}^\varepsilon(0, y) + \\ & + \frac{x}{2} \left\{ q + \frac{x}{6}(2V_{i0} + q^2) + \frac{x^2}{72}[q^3 + 2q(4h_\ell + 3V_{i0} - 3V^{00}) + 12V_{i1}] + \right. \\ & + \frac{x^3}{1440}[q^4 + 4q^2(5h_\ell + 3V_{i0} - 3V^{00}) + \\ & \left. + 84qV_{i1} + 24(6V_{i2} + V_{i0}(2h_\ell - V^{00})) \right\} \Psi_{i\ell 0}^\varepsilon(0, y) + O(x^5), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{ia1}^\varepsilon(x, y) = & x \left[1 + \frac{x^2}{10}(h_a - V^{00}) \right] \partial_x \Psi_{ia1}^\varepsilon(x, y)|_{x=0} + \\ & + \frac{x^2}{4} \left\{ q + \frac{x}{10}(4V_{i0} + q^2) + \right. \\ & + \frac{x^2}{180}[q^3 + 2q(7h_a + 5V_{i0} - 5V^{00}) + 40V_{i1}] \left. \right\} \partial_x \Psi_{ia1}^\varepsilon(x, y)|_{x=0} - \\ & - \frac{x^4}{180\sqrt{3}} q V^{11} C_{\ell 0 10}^{a0} \Psi_{\ell 0}^\varepsilon(0, y) + O(x^5), \end{aligned} \quad (28)$$

где $a = |\ell \pm (1 - \mu(\sigma))|$,

$$\begin{aligned} \Psi_{ia2}^\varepsilon(x, y) = & \frac{x^2}{2} \left[1 + \frac{x^2}{14}(h_a - V^{00}) \right] \partial_x^2 \Psi_{ia2}^\varepsilon(x, y)|_{x=0} + \\ & + \frac{x^3}{12} \left[q + \frac{x}{14}(6V_{i0} + q^2) \right] \partial_x^2 \Psi_{ia2}^\varepsilon(x, y)|_{x=0} + O(x^5), \end{aligned} \quad (29)$$

где $a = |\ell + \mu(\sigma)|, |\ell \pm (2 - \mu(\sigma))|$. Вычислив производные ∂_x^n , $n \leq 4$, этих асимптотик, получаем серию связей при $x = 0$ и $y > 0$ для компонент Ψ_{iab}^ε и Ψ_{ab}^ε . В этой серии при любом q имеются связи

$$\partial_x^b [2\partial_x \Psi_{iab}^\varepsilon(x, y) - q\Psi_{ab}^\varepsilon(x, y)] = 0, \quad b \geq n = 0, 1, 2. \quad (30)$$

Из этих связей в случае $q \neq 0$ следуют равенства

$$\partial_x^b \Psi_{ab}^\varepsilon(x, y) = \frac{2}{q} \partial_x^{b+1} \Psi_{ab}^\varepsilon(x, y), \quad b = 0, 1, 2, \quad x = 0, \quad y > 0.$$

Используя эти равенства, исключим производные $\partial_x^b \Psi_{ab}^\varepsilon$ из других связей исследуемой серии и в результате выведем связи, но уже только для фаддеевских компо-

нент Ψ_{iab}^ε :

$$\begin{aligned}
 & [3q\partial_x^2 - (2V_{i0} + q^2)\partial_x - q(h_\ell - V^{00})]\Psi_{i\ell 0}^\varepsilon(x, y) = 0, \\
 & \partial_x \{12q\partial_x^2 - [q^3 + 2q(4h_\ell + 3V_{i0} - 3V^{00}) + 12V_{i1}]\}\Psi_{i\ell 0}^\varepsilon(x, y) = 0, \\
 & \{60q\partial_x^4 - [q^4 + 4q^2(5h_\ell + 3V_{i0} - 3V^{00}) + 84qV_{i1} + \\
 & + 24(6V_{i2} + V_{i0}(2h_\ell - V^{00}))]\partial_x - 12q(h_\ell - V^{00})^2\}\Psi_{i\ell 0}^\varepsilon(x, y) = 0, \\
 & \partial_x [10q\partial_x^2 - 3(4V_{i0} + q^2)\partial_x - 3(h_a - V^{00})]\Psi_{ia1}^\varepsilon(x, y) = 0, \\
 & \sqrt{3}\partial_x^2 \{15q\partial_x^2 - [q^2 + 2q(7h_a + 5V_{i0} - 5V^{00}) + 40V_{i1}]\}\Psi_{ia1}^\varepsilon(x, y) = \\
 & = 4qV^{11}C_{010}^{a0}\partial_x\Psi_{i\ell 0}^\varepsilon(x, y) = 0, \\
 & \partial_x^2 [7q\partial_x^2 - 2\partial_x - 6(h_a - V^{00})]\Psi_{ia2}^\varepsilon(x, y) = 0.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Если $q = 0$ и $x = 0$, то все связи (30) и (31) становятся тривиальными: $\partial_x^{b+1}\Psi_{iab}^\varepsilon = 0$, $b = 0, 1, 2$, между компонентами Ψ_{iab}^ε и Ψ_{ab}^ε имеются связи

$$\begin{aligned}
 & (3\partial_x^2 + V^{00} - h_\ell)\Psi_{i\ell 0}^\varepsilon(x, y) = V_{i0}\Psi_{i\ell 0}^\varepsilon(x, y), \\
 & \partial_x [5\partial_x^2 - 3(h_a - V^{00})]\Psi_{ia1}^\varepsilon(x, y) = 3V_{i0}\partial_x\Psi_{a1}^\varepsilon(x, y), \\
 & \partial_x^2 [7\partial_x^2 - 6(h_a - V^{00})]\Psi_{ia2}^\varepsilon(x, y) = 6\partial_x^2\Psi_{a2}^\varepsilon(x, y),
 \end{aligned} \tag{32}$$

а компоненты Ψ_{iab}^ε , $b = 0, 1$, удовлетворяют следующим связям:

$$\begin{aligned}
 & [2V_{i0}\partial_x^3 - V_{i1}(3\partial_x^2 + V^{00} - h_\ell)]\Psi_{i\ell 0}^\varepsilon(x, y) = 0, \\
 & \{5V_{i0}\partial_x^4 - 3[6V_{i2} + V_{i0}(2h_\ell - V^{00})]\partial_x^2 + \\
 & + (6V_{i2} + V_{i0}h_\ell)(h_\ell - V^{00})\}\Psi_{i\ell 0}^\varepsilon(x, y) = 0, \\
 & \partial_x [9\partial_x^3 - 20\partial_x^2 + 12(h_a - V^{00})]\Psi_{ia1}^\varepsilon(x, y) = 0.
 \end{aligned} \tag{33}$$

Как известно [9], шестимерные уравнения Фаддеева (3) подстановкой представления (22) сводятся к системе двумерных интегродифференциальных уравнений для совокупности $\{\Psi_{jab}^\varepsilon\}$ всех фаддеевских бисферических компонент Ψ_{jab}^ε . Ядра интегральных операторов таких двумерных уравнений Фаддеева являются довольно сложными функциями. Детальное исследование этих ядер выполнено в работах [18], [19]. Сравнительный анализ дискретных сплайн-аналогов двумерных уравнений Фаддеева дан в обзоре [12]. Во все такие аналоги несложно включить полученные связи (30)–(33) и улучшить поточечную сходимость вычисляемого решения к точному решению $\{\Psi_{jab}^\varepsilon\}$ вблизи точки парного удара. Пример такого включения дан в работе [13].

Теперь исследуем строение фаддеевской компоненты Ψ_i^ε в D^σ -базисе.

Пусть решение Ψ^ε уравнения Шредингера представлено рядом (19) с D^σ -компонентами (20) или рядом (19) с D^σ -компонентами (21), а все компоненты этих рядов $\Psi_{im'}^{\varepsilon t}(y)$, где $t = x$ или $t = y$, известны. Используя те же приемы, что и при доказательстве формул (22), нетрудно показать, что обоим представлениям (при $t = x$ и $t = y$) функции Ψ^ε отвечают аналогичные по строению разложения фаддеевской

компоненты Ψ_i^ε и разложения ее D^σ -компонент $\Psi_{im'}^{\varepsilon t}$: при $t = x$

$$\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\omega^x) \Psi_{im'}^{\varepsilon x}(x, y, \theta), \quad (34)$$

$$\Psi_{im'}^{\varepsilon x}(x, y, \theta) = \sum_{n=\mu(\sigma)}^{\infty} x^n \sum_{a=m'}^{\ell+n-\mu(\sigma)} \Psi_{iam'}^{n\varepsilon x}(y) \Theta_{am'}(u), \quad (35)$$

при $t = y$

$$\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\omega^y) \Psi_{im'}^{\varepsilon y}(x, y, \theta), \quad (36)$$

$$\Psi_{im'}^{\varepsilon y}(x, y, \theta) = \sum_{n=\mu(\sigma)}^{\infty} x^n \sum_{b=m'}^n \Psi_{ibm'}^{n\varepsilon y}(y) \Theta_{bm'}(u). \quad (37)$$

Вывод уравнений для неизвестных Θ -компонент $\Psi_{iam'}^{n\varepsilon x}$ и $\Psi_{ibm'}^{n\varepsilon y}$ из уравнения (3), содержащего в левой части компоненту Ψ_i^ε , несложен. Сначала V_i , H_0 и Ψ^ε заменяются соответствующими суммами (5), (6) и (19), (20) или (19), (21), а Ψ_i^ε – искомым рядом (34) или (36). Затем полученные уравнения проецируются сначала на функции $D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\omega^t)$ с $t = x$ или $t = y$, а затем на соответствующие базисные функции $\Theta_{am'}(u)$ или $\Theta_{bm'}(u)$. Все правила для такого последовательного проецирования подробно описаны в работе [8].

В итоге для искоемых Θ -компонент $\Psi_{iam'}^{n\varepsilon t}(y)$, $t = x, y$, получаются рекуррентные по индексу n цепочки алгебраических уравнений. В случае $t = x$ при любых m' и $n > \mu(\sigma)$ уравнения цепочки для неизвестных $\Psi_{iam''}^{n\varepsilon x}(y)$ зацепляются по индексу $m'' = m'$, $m' \pm 1$; поэтому цепочка неудобна для анализа и далее не рассматривается. В случае $t = y$ для каждого $m' = \mu(\sigma), \mu(\sigma) + 1, \dots, \ell$, получается простая рекуррентная ($n = -2, -1, \dots$) цепочка

$$\begin{aligned} [b(b+1) - (n+2)(n+3)] \Psi_{ibm'}^{n+2, \varepsilon y}(y) &= -q \Psi_{bm'}^{n+1, \varepsilon y}(y) - \sum_{p=0}^n V_{ip} \Psi_{b'm'}^{n-p, \varepsilon y}(y) + \\ &+ y^{-2} \sum_{m''=m' \pm 1} \gamma_{m'm''}^{\ell\sigma} q_{m'm''}^b \Psi_{ibm''}^{n\varepsilon y}(y) - [h_{bm'}^y(y) - V^{00}(y)] \Psi_{ibm'}^{n\varepsilon y}(y), \end{aligned} \quad (38)$$

где $\Psi_{ibm'}^{n\varepsilon x} \equiv 0$ при $n < b$ и при $b < m'$, $h_{bm'}^y(y)$ – дифференциальный оператор,

$$h_{bm'}^y(y) \equiv -\frac{1}{y^2} \partial_y (y^2 \partial_y) + \frac{1}{y^2} [\ell(\ell+1) + b(b+1) - 2m'^2] + V^{00}(y) - E,$$

а коэффициенты $\gamma_{m'm''}^{\ell\sigma}$ и $q_{m'm''}^b$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \gamma_{m', m'+1}^{\ell\sigma} &\equiv \{ [1 + \delta_{m'0} \sigma(-1)^\ell] [\ell(\ell+1) - m'(m'+1)] \}^{1/2}, \\ \gamma_{m', m'-1}^{\ell\sigma} &\equiv (1 - \delta_{m'0}) \{ [1 + \delta_{m'1} \sigma(-1)^\ell] [\ell(\ell+1) - m'(m'-1)] \}^{1/2}, \\ q_{m'm''}^b &\equiv [b(b+1) - m'm'']^{1/2}, \quad m'' = m' \pm 1. \end{aligned}$$

Решения $\Psi_{ibm'}^{n+2,\varepsilon y}$ уравнений (38) удобно искать в порядке возрастания ($n = -2, -1, \dots$) индекса n и убывания ($b = n, n-1, \dots$) индекса b при каждом n . Уравнение (38) при $b = n+2$ имеет вид $0 \cdot \Psi_{ibm'}^{n+2,\varepsilon y} = 0$, поэтому $\Psi_{im'}^{n+2,\varepsilon y}(y) = g_{im'}^{n+2,y}(y)$, где $g_{im'}^{n+2,y}(y)$ – некоторая нетривиальная функция. Исключение составляет случай $\sigma = (-1)^{\ell+1}$, $m' = 0$, когда согласно (37) $\Psi_{im'}^{n\varepsilon y} = 0$ при всех n . Поэтому в этом случае полагаем $g_{i0}^{ny}(y) \equiv 0$ при всех n .

Теперь построим явные асимптотики рядов (37) при $m' \leq 2$ в виде подсумм их трех наиболее медленно убывающих при $x \rightarrow 0$ слагаемых и выведем связи для Θ -компонент $\Psi_{ibm'}^{\varepsilon y}$. Сначала в уравнениях (38) при $m' \leq 2$ заменим функции $\Psi_{bm'}^{n\varepsilon y}(y)$ при $n \leq 3$ их явными выражениями, найденными в работе [8]. Затем решим полученные уравнения и выразим решения $\Psi_{ibm'}^{n\varepsilon y}(y)$ через неопределенные функции $f_{m'}^{ny} \equiv \Psi_{bm'}^{n\varepsilon y}$ и $g_{im'}^{ny} \equiv \Psi_{ibm'}^{n\varepsilon y}$, равные производным $(n!)^{-1} \partial_x^n \Psi_{m'}^{\varepsilon y}(x, y)$ и $(n!)^{-1} \partial_x^n \Psi_{im'}^{\varepsilon y}(x, y)$ при $x = 0$ и $n = b$. Используя полученные выражения, представим асимптотики рядов (37) при $m' \leq 2$, т.е. асимптотики D^σ -компонент $\Psi_{im'}^{\varepsilon y}$, $m' \leq 2$, в обоих случаях $\sigma = \pm(-1)^\ell$ в виде

$$\begin{aligned} \Psi_{i0}^{\varepsilon y}(x, y, \theta) = & \left\{ g_{i0}^{0y} + \frac{qx}{2} f_0^{0y} + \frac{x^2}{12} [(2V_{i0} + q^2) f_0^{0y} + 2(h_{00}^{0y} - V^{00}) g_{i0}^{0y}] + \right. \\ & + \frac{x^3}{144} [q^3 + 2q(4h_{00}^{0y} + 3V_{i0} - 3V^{00}) + 12V_{i1}] f_0^{0y} \Big\} \Theta_{00}(u) + \\ & + x \left[g_{i0}^{1y} + \frac{qx}{4} f_0^{1y} + \frac{x^2}{40} (4V_{i0} + q^2) f_0^{1y} \right] \Theta_{10}(u) + \\ & + \frac{x^3}{10y^2} \{ y^2 [h_{10}^{1y} - V^{00}] g_{i0}^{1y} - [2\ell(\ell+1)(1 + \sigma(-1)^\ell)]^{1/2} g_{i1}^{1y} \} \Theta_{10}(u) + \\ & + x^2 \left[g_{i1}^{2y} + \frac{qx}{6} f_0^{2y} \right] \Theta_{20}(u) + x^3 g_{i0}^{3y} \Theta_{30}(u) + O(x^4), \quad (39) \\ \Psi_{i1}^{\varepsilon y}(x, y, \theta) = & x \left[g_{i1}^{1y} + \frac{qx}{4} f_1^{1y} + \frac{x^2}{40} (4V_{i0} + q^2) f_1^{1y} \right] \Theta_{11}(u) + \\ & + \frac{x^3}{10y^2} \{ y^2 (h_{11}^{1y} - V^{00}) g_{i1}^{1y} - 2[\ell(\ell+1)]^{1/2} g_{i0}^{1y} \} \Theta_{11}(u) + \\ & + x^2 \left[g_{i1}^{2y} + \frac{qx}{6} f_1^{2y} \right] \Theta_{21}(u) + x^3 g_{i1}^{3y} \Theta_{31}(u) + O(x^4), \\ \Psi_{i2}^{\varepsilon y}(x, y, \theta) = & x^2 \left[g_{i2}^{2y} + \frac{qx}{6} f_2^{2y} \right] \Theta_{22}(u) + x^3 g_{i2}^{3y} \Theta_{32}(u) + O(x^4), \end{aligned}$$

где $f_{m'}^{ny}(y), g_{im'}^{ny}(y)$ – произвольные функции, но $f_0^{ny}, g_{i0}^{ny} \equiv 0$ при $\sigma = (-1)^{\ell+1}$.

Теперь найдем производные ∂_x^n полученных асимптотик и, таким образом, выведем связи при $x = 0, y > 0$ для проекций $\partial_x^n \Psi_{ibm'}^{\varepsilon y} \equiv (n!) \Psi_{ibm'}^{n\varepsilon y}$, производных $\partial_x^n \Psi_{m'}^{\varepsilon y}$ на функции $\Theta_{bm'}(u)$. При $x = 0$ и $q \neq 0$ проекции $\Psi_{ibm'}^{\varepsilon y}$, фаддеевской компоненты Ψ_i^ε связаны с проекциями $\Psi_{bm'}^{\varepsilon y}$ функции Ψ^ε соотношениями

$$\partial_x^b [2\partial_x \Psi_{ibm'}^{\varepsilon y}(x, y) - q \Psi_{bm'}^{\varepsilon y}(x, y)] = 0, \quad b \geq m' = 0, 1, 2, \quad (40)$$

а для проекций $\Psi_{ibm'}^{\varepsilon y}$ имеются связи

$$\begin{aligned}
 & [3q\partial_x^2 - (2V_{i0} + q^2)\partial_x - q(h_{00}^y - V^{00})]\Psi_{i00}^{\varepsilon y}(x, y) = 0, \\
 & \partial_x \{12q\partial_x^2 - [q^3 + 2q(4h_{00}^y + 3V_{i0} - 3V^{00}) + 12V_{i1}]\}\Psi_{i00}^{\varepsilon y}(x, y) = 0, \\
 & \partial_x [10q\partial_x^2 - 3(4V_{i0} + q^2)\partial_x - 6q(h_{10}^y - V^{00})]\Psi_{i10}^{\varepsilon y}(x, y) = \\
 & = -\frac{6q}{y^2} [2\ell(\ell+1)(1 + \sigma(-1)^\ell)]^{1/2} \partial_x \Psi_{i11}^{\varepsilon y}(x, y), \\
 & \partial_x [10q\partial_x^2 - 3(4V_{i0} + q^2)\partial_x - 6q(h_{11}^y - V^{00})]\Psi_{i11}^{\varepsilon y}(x, y) = \\
 & = -12q[\ell(\ell+1)]^{1/2} \partial_x \Psi_{i10}^{\varepsilon y}(x, y).
 \end{aligned} \tag{41}$$

При $q = 0$ все эти связи вырождаются в равенства

$$\partial_x^{a+1} \Psi_{iam'}^{\varepsilon y}(x, y)|_{x=0} = 0, \quad a = 0, 1,$$

и, кроме того, имеются связи

$$\begin{aligned}
 & [3\partial_x^2 - (h_{00}^y - V^{00})]\Psi_{i00}^{\varepsilon}(x, y) = V_{i0}\Psi_{00}^{\varepsilon y}(x, y), \\
 & \{2V_{i0}\partial_x^3 - V_{i1}[3\partial_x^2 - (h_{00}^y - V^{00})]\}\Psi_{i00}^{\varepsilon y}(x, y) = 0, \\
 & \partial_x [5\partial_x^2 - 3(h_{10}^y - V^{00})]\Psi_{i10}^{\varepsilon y}(x, y) + \\
 & + \frac{3}{y^2} [2\ell(\ell+1)(1 + \sigma(-1)^\ell)]^{1/2} \partial_x \Psi_{i11}^{\varepsilon y}(x, y) = 3V_{i0}\partial_x \Psi_{10}^{\varepsilon}(x, y), \\
 & \partial_x [5\partial_x^2 - 3(h_{11}^y - V^{00})]\Psi_{i11}^{\varepsilon y}(x, y) + \\
 & + \frac{6}{y^2} [\ell(\ell+1)]^{1/2} \partial_x \Psi_{i10}^{\varepsilon y}(x, y) = 3V_{i0}\partial_x \Psi_{11}^{\varepsilon}(x, y).
 \end{aligned} \tag{42}$$

Завершим настоящий раздел важными замечаниями.

В работе [10] шестимерные уравнения Фаддеева (3) подстановкой (34) с $t = x$ были впервые редуцированы к конечной системе трехмерных дифференциальных уравнений Фаддеева для совокупности $\{\Psi_{jm'}^{\varepsilon x}\}$ всех искомым D^σ -компонент $\Psi_{jm'}^{\varepsilon x}$, $j = 1, 2, 3$, $m' \geq \mu(\sigma)$. Теория рассеяния для такой формулировки задачи трех частиц в представлении полного углового момента предложена в работе [11]. После публикации этой работы дискретные сплайн-аналоги трехмерных уравнений Фаддеева стали интенсивно использоваться для расчета характеристик реальных трехчастичных систем. Результаты первых расчетов, выполненных в таком подходе к решению задачи трех частиц с кулоновскими взаимодействиями, обсуждались в обзоре [7]. В случае парных взаимодействий с сильным короткодействующим отталкиванием дискретные сплайн-аналоги трехмерных уравнений Фаддеева впервые построены, исследованы и применены для расчета связанных состояний тримера атома ^4He в работах [20], [21]. Затем такие сплайн-аналоги использовались в работе [22], но уже для анализа упругого рассеяния атома ^4He на связанном состоянии двух атомов ^4He .

Как было показано выше, выбор системы S^y в качестве “подвижной” является более предпочтительным, потому что при таком выборе фаддеевские D^σ -компоненты

$\Psi_{im'}^{\varepsilon y}$, $m' \geq \mu(\sigma)$, вблизи точки парного удара частиц p_j и p_k устроены довольно просто. Поэтому для оптимизации численных расчетов предлагается использовать введенные в работе [23] трехмерные уравнения Фаддеева в случае $t = y$. Доказанные в настоящей работе связи (40)–(42) стоит включать в дискретные сплайн-аналоги таких уравнений для ускорения поточечной сходимости вычисляемых фаддеевских D^σ -компонент $\Psi_{im'}^{\varepsilon y}$ к точным вблизи соответствующих ($i = 1, 2, 3$) точек парных соударений.

4. СЛУЧАЙ S -ВОЛНОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Ограничимся случаем трех тождественных частиц. Пусть парные потенциалы $V_k(x_k)$ заданы рядами (5), а парные взаимодействия являются S -волновыми:

$$V_k(\mathbf{x}_k) = |Y_{00}(\hat{x}_k)\rangle V_k(x_k) \langle Y_{00}(\hat{x}_k)|, \quad k = 1, 2, 3.$$

Как известно [9], в этом случае система уравнений Фаддеева в бисферическом базисе состоит из одного двумерного интегродифференциального уравнения. Его можно вывести разными способами [19]. Для наших целей наиболее удобным является представление фаддеевских компонент Ψ_k^ε в виде

$$\Psi_k^\varepsilon(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) = y_k^\ell G^\ell(x_k, y_k) \mathcal{Y}_{\ell 0}^{\ell m}(\hat{x}_k, \hat{y}_k), \quad k = 1, 2, 3. \quad (43)$$

Вследствие тождественности частиц такому представлению отвечает особое бисферическое разложение (17) решения Ψ^ε уравнения Шредингера (2), в котором при $b = 1, 2, \dots$ $\Psi_{ab}^\varepsilon \equiv 0$, а при $b \neq 1, 2, \dots$

$$\Psi_{ab}^\varepsilon(x, y) = y^\ell G^\ell(x, y) \delta_{a\ell} \delta_{b0} + 2 \int_{-1}^1 K_{ab\ell 0}^\ell(x, y, u) (y')^\ell G^\ell(x', y') du. \quad (44)$$

Здесь и далее $G^\ell(x_k, y_k)$ – искомая функция; $x \equiv x_i$, $y \equiv y_i$ – аргументы; переменные $x' \equiv x_k$, $y' \equiv y_k$ – функции (10) или (11) аргументов x, y, u при $\gamma_{ki} = \pi/3$; а ядра $K_{ab\ell 0}^\ell(y')^\ell$ – функции, исследованные в работах [18], [19].

В общем случае эти функции – конечные двойные суммы:

$$K_{ab\ell 0}^\ell(x, y, u) (y')^\ell = y^\ell \sum_{n=0}^{\ell} \left(\frac{x}{y}\right)^n \sum_{s=b-n}^{b+n} K_{ab}^{\ell ns} P_s(u), \quad (-1)^{n+s+b} = 1, \\ K_{ab}^{\ell ns} \equiv (-1)^a (\sqrt{3})^{\ell-n} \left(\frac{1}{2}\right)^\ell \left[\frac{(2\ell+1)!}{(2\ell-2n)!n!} \right]^{1/2} \times \\ \times (2s+1) C_{s0\ell-n0}^{a0} C_{s0n0}^{b0} \begin{Bmatrix} a & b & \ell \\ n & \ell-n & s \end{Bmatrix}, \quad (45)$$

а в случае $a = \ell$, $b = 0$ – однократные суммы:

$$K_{\ell 0 \ell 0}^\ell(x, y, u) (y')^\ell = y^\ell \sum_{n=0}^{\ell} \left(\frac{x}{y}\right)^n K^{\ell n} P_n(u), \\ K^{\ell n} \equiv \frac{1}{2} (-1)^\ell \left(\frac{1}{2}\right)^\ell \frac{(\sqrt{3})^n \ell!}{n! (\ell-n)!}. \quad (46)$$

Заменим в системе Фаддеева (3) функции Ψ_k^ε и Ψ^ε их бисферическими рядами с компонентами (43), (44). Спроецируем полученные уравнения на бисферический базис и в результате для искомой функций G^ℓ выведем двумерное интегродифференциальное уравнение с ядром $K_{\ell 0 \ell 0}^\ell(y')^\ell$. Заменив это ядро суммой (46), получаем уравнение

$$\left\{ \partial_x^2 + \frac{2}{x} \partial_x + \partial_y^2 + (\ell+1) \frac{2}{y} \partial_y + E - V_i(x) \right\} G^\ell(x, y) = 2V_i(x) \sum_{n=0}^{\ell} \left[K^{\ell n} \left(\frac{x}{y} \right)^n \int_{-1}^1 du P_n(u) G^\ell(x', y') \right]. \quad (47)$$

Построим решение G^ℓ этого уравнения в виде формального ряда

$$G^\ell(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n G_n^\ell(y), \quad G_n^\ell(y) = \frac{1}{n!} \partial_x^n G^\ell(x, y)|_{x=0}. \quad (48)$$

Начнем с анализа ряда Тейлора с центром в точке $x = 0$ для функции $G^\ell(x', y')$, стоящей под знаком интеграла. Ее аргументы x' и y' – функции вида (11) переменных x, y, u при $\gamma = \pi/3$, поэтому производные $\partial_x^n G^\ell$ – сложные комбинации производных $\partial_x^p x', \partial_x^p y'$ и их целых степеней, например

$$\begin{aligned} \partial_x G^\ell(x', y') &= [(\partial_x x') \partial_{x'} + (\partial_x y') \partial_{y'}] G^\ell(x', y'), \\ \partial_x^2 G^\ell(x', y') &= \{[(\partial_x x') \partial_{x'} + (\partial_x y') \partial_{y'}]^2 + (\partial_x x')^2 \partial_{x'} + (\partial_x y')^2 \partial_{y'}\} G^\ell(x', y'). \end{aligned}$$

В силу (13) и (14) производные $\partial_x^p x'$ и $\partial_x^p y'$ – конечные суммы по полиномам Лежандра. Поэтому исследуемый ряд Тейлора функции G^ℓ – двойная сумма

$$G^\ell(x', y') = \sum_{p=0}^{\infty} x^p \sum_{s=0}^p G_{ps}^\ell(y) P_s(u), \quad (-1)^{p+s} = 1, \quad (49)$$

в которой функции $G_{ps}^\ell(y)$ – довольно громоздкие комбинации производных функции $G^\ell(x', y')$ при $x = 0$, т. е. в точке $(x', y') = (\sqrt{3}y/2, y/2)$. Например,

$$\begin{aligned} G_{00}^\ell(y) &= G^\ell(x', y'), & G_{11}^\ell(y) &= \frac{1}{2} (\partial_{x'} - \sqrt{3} \partial_{y'}) G^\ell(x', y'), \\ G_{20}^\ell(y) &= (d_2 + d_1) G^\ell(x', y'), & G_{22}^\ell(y) &= (2d_2 - d_1) G^\ell(x', y'), \\ d_1 &\equiv \frac{1}{6\sqrt{3}} (\partial_{x'} + 3\sqrt{3} \partial_{y'}), & d_2 &\equiv \frac{1}{24} (\partial_{x'} - \sqrt{3} \partial_{y'})^2. \end{aligned} \quad (50)$$

Докажем правило отбора $(-1)^{p+s} = 1$ для ряда (49). Как следует из (10), функции x' и y' инвариантны относительно одновременной инверсии $x \rightarrow -x, u \rightarrow -u$. Значит любая функция $G^\ell(x', y')$ и ее разложение (49) обладают этим же свойством. Каждое слагаемое $x^s G_{ps}^\ell(y) P_s(u)$ такого ряда при инверсии приобретает множитель $(-1)^{p+s}$, а все слагаемые линейно независимы по одному или двум аргументам x и u . Поэтому исследуемый ряд инвариантен относительно инверсии тогда и только

тогда, когда его индексы p и s такие, что $p + s$ – четное число, что и требовалось показать.

Теперь в уравнении (47) заменим функции $V_i(x)$, $G^\ell(x, y)$ и $G^\ell(x', y')$ соответствующими рядами (5), (48) и (49). Из получившегося уравнения для искомым функций G_n^ℓ выведем рекуррентную цепочку уравнений

$$(n+2)(n+3)G_{n+2}^\ell(y) = qG_{n+1}^\ell(y) + \tilde{h}_\ell(y)G_n^\ell(y) + \sum_{p=1}^n V_{ip}G_{n-p}^\ell(y) + \sum_{p=0}^n \sum_{s=0}^{\min\{\ell, p\}} V_{i, n-p-s} \frac{4K^{\ell s}}{2s+1} y^{-s} G_{ps}^\ell(y), \quad (51)$$

где $n = -2, -1, \dots$, а $G_n^\ell \equiv 0$ при $n < 0$ и по определению

$$\tilde{h}_\ell(y) \equiv -\partial_y^2 - (\ell+1)\frac{2}{y}\partial_y + V_{i0} - E.$$

Все функции $G_n^\ell(y)$, удовлетворяющие этой цепочке, выражаются явно через неопределенную функцию $G_0^\ell(y) = G^\ell(0, y)$ и функции $G_{ps}^\ell(y)$. Заменим этими выражениями функции $G_n^\ell(y)$, $n \leq 3$, в сумме (48), а затем запишем ее асимптотику при $x \rightarrow 0$, $y > 0$ в виде

$$\begin{aligned} G^\ell(x, y) = & \left\{ 1 + \frac{qx}{2} + \frac{x^2}{12}(2\tilde{h}_\ell(y) + q^2) + \right. \\ & \left. + \frac{x^3}{144}[q(8\tilde{h}_\ell(y) + q^2) + 12V_{i1}] \right\} G^\ell(0, y) + \\ & + xK^{\ell 0} \left\{ 2q + \frac{x}{3}(q^2 + 2V_{i0}) + \frac{x^2}{36}[q(q^2 + 6\tilde{h}_\ell(y) + 2V_{i0}) + 12V_{i1}] \right\} G_{00}^\ell(y) + \\ & + x^3 \frac{q}{9} K^{\ell 0} \left[-\frac{\ell\sqrt{3}}{y} G_{11}^\ell(y) + 3G_{20}^\ell(y) \right] + O(x^4), \end{aligned} \quad (52)$$

где $K^{\ell s}$ и G_{00}^ℓ определены формулами (46) и (50). Из этой асимптотики в случае $q \neq 0$ находим следующие связи при $x = 0$, $y > 0$ и $(x', y') = (\sqrt{3}y/2, y/2)$:

$$\begin{aligned} (2\partial_x - q)G^\ell(x, y) &= (-1)^\ell 2^{1-\ell} q G^\ell(x', y'), \\ [3q\partial_x^2 - (2V_{i0} + q^2)\partial_x - q(\tilde{h}_\ell + V_{i0})]G^\ell(x, y) &= 0, \\ \{12q\partial_x^3 - [q(6\tilde{h}_\ell + 2V_{i0} + q^2) + 12V_{i1}]\partial_x - q^2(\tilde{h}_\ell + V_{i0})\}G^\ell(x, y) &= \\ = (-1)^\ell 2^{-\ell-1} q^2 \left\{ (\partial_{x'} - \sqrt{3}\partial_{y'})^2 + \right. \\ & \left. + \frac{4}{\sqrt{3}}y^{-1}[(1-3\ell)\partial_{x'} + 3(1+3\ell)\partial_{y'}] \right\} G^\ell(x', y'), \end{aligned} \quad (53)$$

а при $q = 0$ получаем равенство $\partial_x G^\ell(x, y)|_{x=0} = 0$ и связи

$$\begin{aligned} [3\partial_x - \tilde{h}_\ell(y)]G^\ell(x, y) &= (-1)^\ell 2^{1-\ell} G^\ell(x', y'), \\ \{2V_{i0}\partial_x^3 - V_{i1}[3\partial_x^2 + V_{i0} - \tilde{h}_\ell(y)]\}G^\ell(x, y) &= 0. \end{aligned} \quad (54)$$

В полученной серии связей (53), (54) имеются особые связи, содержащие функцию $G^\ell(x', y')$. Эти соотношения связывают значения исследуемой функции $G^\ell(x, y)$ на прямой ($x = 0, y > 0$) с ее значениями, но на прямой $y = \sqrt{3}x > 0$. Такая связь является следствием нелокальности уравнения (47) и означает, что поведение фаддеевской бисферической компоненты $\Psi_{i\ell 0}^\varepsilon = y^\ell G^\ell(x, y)$ в точке парного удара ($x = 0, y > 0$) зависит и от значений ее частных производных в точке $(\sqrt{3}y/2, y/2)$.

Теперь исследуем строение бисферических компонент Ψ_{ab}^ε разложения (17) решения Ψ^ε уравнения Шредингера (2), отвечающее найденному разложению (48) функции G^ℓ . Заменим в представлениях (44) этих компонент функции $G^\ell(x, y)$ и $G^\ell(x', y')$ рядами (48) и (49), а ядро $K_{ab\ell 0}^\ell(y')^\ell$ – суммой (45). Рассмотрим получившийся ряд

$$\Psi_{ab}^\varepsilon(x, y) = y^\ell \sum_{n=0}^{\infty} x^n G_n^\ell(y) \delta_{a\ell} \delta_{b0} + y^\ell \sum_{m=0}^{\infty} x^m \sum_{p=m-\ell}^m y^{p-m} \sum_{s=b-m+p}^{b+m-p} \frac{4K_{ab}^{\ell, m-p, s}}{2s+1} G_{ps}^\ell(y), \quad (55)$$

где b – четное из-за тождественности частиц, а обе суммы $p+s$ и $m-p+s$ – четные в силу правил отбора для рядов (45) и (49). Поэтому m четно. Следовательно, вблизи точки парного удара компонента $\Psi_{\ell 0}^\varepsilon(x, y)$ – ряд по четным и нечетным степеням аргумента x , а все остальные компоненты $\Psi_{ab}^\varepsilon(x, y)$, $b = 2, 4, \dots$, – ряды по четным степеням этого же аргумента.

Явные асимптотики компонент $\Psi_{ab}^\varepsilon(x, y)$ при $x \rightarrow 0$ несложно найти как подсуммы наиболее медленно убывающих слагаемых рядов (55).

Например, при $b = 0$

$$\begin{aligned} \Psi_{\ell 0}^\varepsilon(x, y) = y^\ell \left(1 + \frac{qx}{2}\right) & \left[G_0^\ell(y) + 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^\ell G_{00}^\ell(y) \right] - \\ & - x^2 \frac{2}{\sqrt{3}} \left(-\frac{y}{2}\right)^{\ell-1} C_{10\ell-10}^{\ell 0} G_{11}^\ell(y) + O(x^3), \end{aligned} \quad (56)$$

при $b = 2$

$$\begin{aligned} \Psi_{a2}^\varepsilon = x^2 \frac{2}{\sqrt{5}} \left(-\frac{y}{2}\right)^\ell & \left\{ C_{\ell 020}^{a0} G_{22}^\ell(y) + \right. \\ & + \frac{1}{y\sqrt{3}} [(\ell+a+2)(\ell+a+3)(\ell-a+2)(\ell-a+1)]^{1/2} C_{10\ell-10}^{a0} G_{11}^\ell(y) + \\ & \left. + 3y^{-2} [(2\ell+1)(2\ell-1)\ell(\ell-1)]^{1/2} G_{00}^\ell(y) \delta_{a,\ell-2} \right\} + O(x^4). \end{aligned} \quad (57)$$

С учетом представлений (17), (56), (57) исследуемое решение Ψ^ε при $x \rightarrow 0$ и $y > 0$ обладает следующим свойством:

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Psi_{\ell 0}^\varepsilon(x, y) \mathcal{Y}_{\ell 0}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) [1 + o(1)] = \left(1 + \frac{qx}{2}\right) \Psi^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_{x=0} + O(x^2),$$

поэтому подчиняется связи

$$(2 - \partial_x - q) \Psi^\varepsilon(x, y) = 0, \quad x = 0, \quad y > 0.$$

При $q \neq 0$ и $\ell = 0$ эта связь, выведенная нами для случая S -волновых взаимодействий, является аналогом условия Като, доказанного в работе [1], но в случае центральных, а именно кулоновских, парных взаимодействий.

5. МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В разделе 3 показано, как построить разложения одной фаддеевской компоненты Ψ_i^ε и ее парциальных компонент Ψ_{iab}^ε и $\Psi_{im'}^{\varepsilon y}$ вблизи точки парного удара двух выбранных частиц p_j и p_k . Полагая последовательно $i = 1, 2, 3$ и повторяя каждый раз все построения, нетрудно найти разложения всех парциальных компонент Ψ_{iab}^ε и $\Psi_{im'}^{\varepsilon y}$, $i = 1, 2, 3$, вблизи точек столкновения соответствующих частиц p_j и p_k . Таким образом, в случае центральных парных взаимодействий завершается построение разложений решений $\{\Psi_{jab}^\varepsilon\}$ и $\{\Psi_{jm'}^{\varepsilon y}\}$ двумерных и трехмерных уравнений Фаддеева вблизи любой из трех точек парных ударов.

Предложенный в разделе 3 метод является достаточно общим по двум причинам. Во-первых, этот метод применим для системы трех разных частиц с центральными парными взаимодействиями довольно общего для задач атомной и молекулярной физики типа (5) и при любых допустимых значениях полного углового момента ℓ и пространственной четности σ . Во-вторых, этим методом можно исследовать полные (бесконечные) формальные разложения регулярных решений двумерных и трехмерных уравнений Фаддеева в малых окрестностях всех трех точек парных соударений.

Главное преимущество предложенного метода – его исключительная простота, заключающаяся в том, что построение разложений всех исследуемых функций сводится к явному решению соответствующих рекуррентных цепочек алгебраических уравнений.

Метод реализуется в три этапа и начинается с уравнения Шредингера (2). Сначала бисферические или D^σ -компоненты $\Psi_{ab}^{n\varepsilon}$ или $\Psi_{m'}^{n\varepsilon t}$ решения Ψ^ε этого уравнения строятся в виде рядов (18) или (21) способами, предложенными в работе [8]. Затем в уравнении системы Фаддеева (3), содержащем в левой части компоненту Ψ_i^ε , функция Ψ^ε заменяется одним из таких рядов, взаимодействие V_i представляется известным рядом (5), а компонента Ψ_i^ε восстанавливается как соответствующий выбранному разложению функции Ψ^ε ряд (22), (23) или (36), (37) с искомыми функциями $\Psi_{iab}^{n\varepsilon}(y)$ или $\Psi_{im'}^{n\varepsilon y}(y)$. Наконец, эти функции выражаются как решения рекуррентных цепочек уравнений (25) или (38) через известные функции $\Psi_{ab}^{n\varepsilon}$ или $\Psi_{m'}^{n\varepsilon t}$.

Все вышеупомянутые этапы реализуются исключительно просто благодаря тому, что для анализа уравнения Шредингера и лишь одного из уравнений системы Фаддеева используется только собственное для этих уравнений координатное представление $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} | \equiv \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i |$.

Альтернативный нашему метод построения разложений фаддеевских парциальных компонент в точке парного удара впервые был предложен в работе [10], где решение Ψ^ε уравнения Шредингера не используется, а основными являются одновременно все три шестимерных уравнения Фаддеева (3) и разложения всех ($k = 1, 2, 3$) парных взаимодействий $V_k(x_k)$ и всех искомым компонент Ψ_k^ε в ряды Тейлора с

центром в точке $x = x_i = 0$:

$$\Psi_k^\varepsilon(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Psi_k^{n\varepsilon}(\hat{x}, \mathbf{y}), \quad \Psi_k^n(\hat{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{n!} \partial_x^n \Psi_k^\varepsilon(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) \Big|_{x=0}.$$

Переменные x_k и y_k являются функциями (10) аргументов x и y , поэтому уже при $n = 3$ производные $\partial_x^n \Psi_k^\varepsilon(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$ – довольно сложные комбинации производных $\partial_x^p x_k$ и $\partial_x^p y_k$ и производных функции Ψ_k^ε по аргументам x_k и y_k . Так как функция Ψ^ε считается неизвестной, приходится решать все три уравнения Фаддеева и выводить одновременно разложения при $x_i \rightarrow 0$ и $y_i > 0$ для всех трех компонент Ψ_i^ε и Ψ_k^ε , $k \neq i$. Решение существенно усложняется тем, что искомые разложения необходимо записывать в каждом из трех координатных представлений $\langle \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k |$, $k = 1, 2, 3$. По той же причине сложным оказывается и решение заключительной задачи восстановления разложений функции Ψ^ε по найденным разложениям ее фаддеевских компонент Ψ_i^ε .

В случае центральных парных взаимодействий наш подход более экономичен и прост по сравнению с альтернативным подходом работы [10].

Если же парные взаимодействия нецентральные, то в бисферическом базисе система уравнений Шредингера бесконечная, а система уравнений Фаддеева конечная. Поэтому выгоднее сначала вывести разложения бисферических фаддеевских компонент Ψ_{iab}^ε , т. е. применить метод обсужденной выше работы [10], а затем по найденным представлениям воспроизвести разложения компонент Ψ_i^ε и их суммы Ψ^ε , подчиненной уравнению Шредингера. Именно по такой схеме выполнены исследования, представленные в разделе 4.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Суммируем основные результаты настоящей работы.

Было доказано, что если все центральные парные взаимодействия – ряды (5), то при $x \rightarrow 0$ и $y > 0$ представлениям (17) и (19) решения $\Psi^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ уравнения Шредингера (2) соответствуют аналогичные по строению разложения (22), (23) и (34)–(37) фаддеевской компоненты $\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ этого решения. Компоненты $\Psi_{iab}^{n\varepsilon}$ и $\Psi_{ibm'}^{n\varepsilon y}$ этих разложений подчинены разрешимым в явном виде рекуррентным цепочкам алгебраических уравнений (25) и (38).

Предложенная редукция исходных шестимерных уравнений Фаддеева (3) к таким цепочкам позволила вывести явные асимптотики (27)–(29) и (39) бисферических Ψ_{iab}^ε и D^σ -компонент $\Psi_{im}^{\varepsilon y}$, физического решения Ψ_i^ε вплоть до слагаемых $O(x^4)$ и $O(x^3)$. Из этих асимптотик выведены ранее неизвестные связи (30)–(33) и (40)–(42).

В случае трех тождественных частиц и S -волновых взаимодействий доказано следующее утверждение: если потенциалы таких взаимодействий являются степенными рядами (5), то при $x \rightarrow 0$ и $y > 0$ формальным решением $G^\ell(x, y)$ уравнения (47) является ряд (49) по целым степеням x с компонентами $G_n^\ell(y)$, подчиненными рекуррентной и разрешимой в явном виде цепочке уравнений (51). Для функции G^ℓ получена явная асимптотика (52) и связи (53), (54) в точке парного удара. Показано, что

такой асимптотике отвечают асимптотики (56), (57) бисферических компонент Ψ_{ab}^ε решения Ψ^ε уравнения Шредингера.

Список литературы

- [1] T. Kato, *Comm. Pure Appl. Math.*, **10**:2 (1957), 151–177.
- [2] W. A. Bingel, *Z. Naturforsch. A*, **18** (1963), 1249–1253.
- [3] R. T. Pack, W. B. Brown, *J. Chem. Phys.*, **45** (1966), 556–559.
- [4] С. И. Веницкий, Л. И. Пономарев, *ЭЧАЯ*, **13**:6 (1982), 1336–1418.
- [5] В. И. Коробов, *ЯФ*, **50**:6 (1989), 1595–1604.
- [6] V. I. Korobov, I. V. Puzynin, S. I. Vinitzky, *Muon Catalyzed Fusion*, **7** (1992), 63–80.
- [7] В. В. Пупышев, *ЭЧАЯ*, **33**:4 (2002), 843–914.
- [8] В. В. Пупышев, *ТМФ*, **136**:1 (2003), 90–114.
- [9] С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев, *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц*, Наука, М., 1985.
- [10] V. V. Kostykin, A. A. Kvitsinsky, S. P. Merkuriev, *Few-Body Systems*, **6**:2 (1989), 97–113.
- [11] А. А. Квицинский, В. В. Кострыкин, С. П. Меркурьев, *ЭЧАЯ*, **21**:6 (1990), 1301–1359.
- [12] В. В. Пупышев, *ЭЧАЯ*, **35**:2 (2004), 256–347.
- [13] В. В. Пупышев, *Письма в ЭЧАЯ*, **3**:2 (2006), 28–42.
- [14] М. В. Федорюк, *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1983.
- [15] А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, М., 1989.
- [16] Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, М., 1975.
- [17] F. T. Smith, *J. Chem. Phys.*, **31**:5 (1959), 1352–1359.
- [18] В. В. Пупышев, *ТМФ*, **81**:1 (1989), 86–93.
- [19] В. В. Пупышев, *ЭЧАЯ*, **28**:6 (1999), 1561–1649.
- [20] V. A. Roudnev, S. L. Yakovlev, *Comput. Phys. Comm.*, **126**:1–2 (2000), 162–164.
- [21] V. A. Roudnev, S. L. Yakovlev, *Chem. Phys. Lett.*, **328**:1–2 (2000), 97–106.
- [22] V. A. Roudnev, *Chem. Phys. Lett.*, **367**:1–2 (2003), 95–101.
- [23] В. В. Пупышев, *ТМФ*, **148**:2 (2006), 227–242.

Поступила в редакцию 29.03.2007