Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. С. Арамян, Интегрируемая модель двумерного сингулярного сферического осциллятора в постоянном магнитном поле, *ТМФ*, 2008, том 156, номер 1, 131–137

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6234>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 03:48:17

© 2008 г.

К. С. Арамян*

ИНТЕГРИРУЕМАЯ МОДЕЛЬ ДВУМЕРНОГО СИНГУЛЯРНОГО СФЕРИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Предложен аналог двумерного сингулярного осциллятора (осциллятора Смо-
родинского–Винтерница) на сфере, который точно решается в классическом
смысле как в отсутствие, так и в присутствии постоянного магнитного поля.
Найдены его явные классические решения.

Ключевые слова: сингулярный осциллятор, магнитное поле, интегрируемая модель.

1. ВВЕДЕНИЕ

Осциллятор является системой, примечательной во многих отношениях, прежде
всего наличием широкой алгебры симметрий $su(d)$, где d – размерность простран-
ства [1]. Кроме того, наряду с задачей Кулона, он отличается тем, что все его
траектории замкнуты [2]. Наличие широкой алгебры симметрий позволяет во мно-
гих случаях вводить взаимодействие осциллятора с внешними полями, оставляя
систему интегрируемой. Простейшим и важнейшим примером такого рода является
двумерный осциллятор в постоянном магнитном поле. Наконец, имеются обобщения
осциллятора на искривленные пространства. Наиболее известное обобщение такого
рода было предложено Хиггсом [3] для осциллятора на d -мерной сфере радиуса r_0 .
Оно задается потенциалом

$$V_{\text{osc}} = \frac{\alpha^2 r_0^2 \operatorname{tg}^2 \theta}{2}, \quad (1)$$

где $\operatorname{tg} \theta = x_{d+1}/r_0$, а $\mathbf{x}$, x_{d+1} суть евклидовы координаты объемлющего простран-
ства $\mathbb{R}^{d+1}$: $\mathbf{x}^2 + x_{d+1}^2 = r_0^2$. Наряду с обобщением задачи Кулона на сфере [4] такой
осциллятор выделен тем, что все его траектории замкнуты. Отметим, что обе эти
системы обладают нелинейными алгебрами скрытых симметрий, и в основном на-
следуют характерные свойства стандартных задач осциллятора и Кулона.

Однако недостаток осциллятора Хиггса состоит в том, что в присутствии посто-
янного магнитного поля он перестает быть точно решаемой системой, а это сильно
уменьшает его практическую ценность. Потому важно найти другие обобщения ос-
циллятора на сфере, остающиеся интегрируемыми в присутствии магнитного поля.

*Арцахский государственный университет, Степанакерт. E-mail: k_aramyan@rambler.ru

В работе [5] было предложено обобщение осциллятора на комплексных проективных пространствах $\mathbb{C}P^N$, точно решаемое как в отсутствие, так и в присутствии постоянного магнитного поля. С другой стороны, $\mathbb{C}P^1$ (комплексная проективная плоскость) эквивалентна стереографической проекции двумерной сферы. Его квантово-механическое решение было дано в [6], [7], а классические решения построены в [8] (см. также [9]). Аналоги этой системы на четырехмерной сфере и гиперboloиде были построены, соответственно, в работах [10], [11]: они допускают включение поля инстантона Белавина–Полякова–Шварца–Тюпкина. Затем эти модели были распространены на сферы произвольной размерности [12]. Потенциал указанных моделей выглядит следующим образом:

$$V_{\text{BN}} = 2\alpha^2 r_0^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}. \quad (2)$$

Системы на сфере имеют не только теоретическое, но и прикладное значение. Во-первых, модель частицы на двумерной (четырёхмерной) сфере, движущейся в постоянном магнитном (инстантонном) поле, является основой, на которой строится теория двумерного (четырёхмерного) эффекта Холла (см., соответственно, [13], [14]). Во-вторых, системы на сферах могут интерпретироваться как системы с зависящей от положения эффективной массой частицы. Наконец, они могут аппроксимировать движение реальных частиц в тонких сферических пленках и имеют отношение к физике наноструктур. С прикладной точки зрения именно вторая модель, допускающая включение постоянного магнитного поля, особо интересна. Заметим, что под постоянным магнитным полем мы здесь имеем в виду магнитное поле, постоянное на поверхности двумерной сферы, но не в трехмерном евклидовом пространстве. Его можно интерпретировать как магнитное поле монополя Дирака, помещенного в центр сферы. Поэтому с точки зрения описания движения частиц на поверхности сферы это поле нефизично. Но если рассматривать модель как систему с зависящей от положения эффективной массой частицы, то такое поле приобретает смысл постоянного магнитного поля в общепринятом смысле.

Целью настоящей работы является исследование обобщений осциллятора на двумерной сфере в присутствии постоянного магнитного поля. А именно, мы построим сферический аналог сингулярного двумерного осциллятора (известного также как осциллятор Смородинского–Винтерница), задаваемого потенциалом [15]

$$V_{\text{SW}} = \frac{\alpha^2 r^2}{2} + \frac{\beta^2}{2r^2}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \quad (3)$$

За основу сферического обобщения потенциала Смородинского–Винтерница возьмем осцилляторный потенциал на сфере, неявно содержащийся в работе [5]. Покажем, что он, естественно, расширяется до сферического аналога потенциала двумерного сингулярного осциллятора, который имеет вид

$$V = 2\alpha^2 r_0^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + \frac{\beta^2}{8r_0^2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2}.$$

Как и осциллятор Смородинского–Винтерница, построенная система остается точно решаемой в присутствии постоянного магнитного поля. Отметим, что при $\alpha^2 = \beta^2$ эта система инвариантна относительно отражений.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 найдены решения классических уравнений движения сингулярного кругового осциллятора в присутствии постоянного магнитного поля. В разделе 3 построен сферический аналог сингулярного кругового осциллятора и найдены решения его классических уравнений движения в присутствии постоянного магнитного поля. В заключении обсуждаются задачи, которые мы предполагаем решить впоследствии.

2. СИНГУЛЯРНЫЙ КРУГОВОЙ ОСЦИЛЛЯТОР В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Пусть мы имеем аксиально-симметричную систему на плоскости, движущуюся во внешнем постоянном магнитном поле, направленном перпендикулярно плоскости: $B_1 = B_2 = 0$, $B_3 = B$.

Если внешнее магнитное поле имеет напряженность $\mathbf{B}$, то на частицу действует сила Лоренца¹⁾ $\mathbf{F}_L = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$. Ясно, что наличие постоянного магнитного поля не нарушает вращательной симметрии системы, а также не меняет ее энергии. Поэтому в присутствии постоянного магнитного поля двумерный осциллятор остается системой, интегрируемой по Лиувиллю. Он имеет два интеграла движения: энергию и вращательный момент. С их помощью можно проинтегрировать уравнения движения аналогично тому, как это сделано в книге Ландау и Лифшица для случая движения частицы в потенциальном центрально-симметричном поле [16].

Однако при сохранении функционального вида энергии постоянное магнитное поле меняет вид вращательного момента. Если перейти к полярным координатам, то энергия и вращательный момент сингулярного кругового осциллятора задаются выражениями

$$E = \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{\alpha^2 r^2}{2} + \frac{\beta^2}{2r^2}, \quad \mathcal{J} = r^2 \dot{\varphi} + \frac{Br^2}{2}.$$

Отсюда находим

$$2E = \dot{r}^2 + \frac{(\mathcal{J} - Br^2/2)^2}{r^2} + \alpha^2 r^2 + \frac{\beta^2}{r^2}.$$

Эквивалентно,

$$2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -(\alpha^2 + B^2/4)x^2 + 2(E + \mathcal{J}B/2)x - (\mathcal{J}^2 + \beta^2), \quad x \equiv r^2. \quad (4)$$

Поэтому допустимые значения интегралов движения удовлетворяют условию

$$(E + \mathcal{J}B/2)^2 > (\alpha^2 + B^2/4)(\mathcal{J}^2 + \beta^2).$$

Из (4) находим

$$t = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{-(\alpha^2 + B^2/4)x^2 + 2(E + \mathcal{J}B/2)x - (\mathcal{J}^2 + \beta^2)}}.$$

¹⁾Мы пользуемся системой единиц, в которой $\mu = c = e = 1$.

Этот интеграл вычисляется в явном виде, в результате чего получаем [17]

$$t = -\frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 + B^2/4}} \arcsin \frac{(E + \mathcal{J}B/2) - (\alpha^2 + B^2/4)x}{\sqrt{(E + \mathcal{J}B/2)^2 - (\alpha^2 + B^2/4)(\mathcal{J}^2 + \beta^2)}}$$

или, эквивалентно,

$$r^2 = \frac{E + \mathcal{J}B/2}{\alpha^2 + B^2/4} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{(\alpha^2 + B^2/4)(\mathcal{J}^2 + \beta^2)}{(E + \mathcal{J}B/2)^2}} \sin 2\sqrt{\alpha^2 + B^2/4} t \right).$$

Как видим, наличие центробежного потенциала не влияет на частоту радиальных колебаний, а влияет только на их амплитуду.

Принимая во внимание, что вращательный момент имеет вид $\mathcal{J} = x\dot{\varphi} + Bx/2$, мы можем найти также зависимость $\varphi = \varphi(t)$:

$$\varphi = \int dt \frac{\mathcal{J} - Bx/2}{x} = -\frac{Bt}{2} + \mathcal{J} \int \frac{dt}{r^2(t)}.$$

Этот интеграл тоже вычисляется [17], в результате окончательно получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{(\alpha^2 + B^2/4)(\mathcal{J}^2 + \beta^2)}}{E + \mathcal{J}B/2} \operatorname{tg}(\mathcal{J} + \beta^2/\mathcal{J})(\varphi + Bt/2) = \\ & = \sqrt{1 - \frac{(\alpha^2 + B^2/4)(\mathcal{J}^2 + \beta^2)}{(E + \mathcal{J}B/2)^2}} + \operatorname{tg} \sqrt{\alpha^2 + B^2/4} t. \end{aligned}$$

Итак, мы показали, что двумерный сингулярный осциллятор в постоянном магнитном поле является классически точно решаемой системой. Мы нашли его явные решения и убедились, что наличие центробежного члена качественно не меняет свойства системы, хотя и влияет на вид решений уравнений движения. Поэтому можно ожидать, что и в случае сферического сингулярного осциллятора будет иметь место аналогичное явление.

3. СФЕРИЧЕСКИЙ СИНГУЛЯРНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Как построить сферический аналог осциллятора Смородинского–Винтерница? Прежде чем приступить к обсуждению этого вопроса, напомним основные элементы сферической геометрии. Метрика на двумерной сфере задается выражением

$$ds^2 = r_0^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

где θ и φ связаны с евклидовыми координатами сферы следующим образом:

$$x_1 = r_0 \sin \theta \sin \varphi, \quad x_2 = r_0 \sin \theta \cos \varphi, \quad x_3 = r_0 \cos \theta.$$

В пределе $r_0 \rightarrow \infty$ метрика сферы переходит в метрику плоскости. Для аналогии с рассмотренным ранее осциллятором на плоскости удобно воспользоваться стереографической проекцией сферы на плоскость, касательную южному полюсу сферы. Тогда каждой точке сферы (θ, φ) соответствует точка $u = y_1 + iy_2$ плоскости

$$y_1 = 2r_0 \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \sin \varphi, \quad y_2 = 2r_0 \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \cos \varphi.$$

Соответственно

$$r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} = 2r_0 \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}.$$

Рассмотрим пространственное отражение

$$\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r} \iff \theta \rightarrow \pi - \theta, \varphi \rightarrow -\varphi.$$

Ясно, что при этом преобразовании метрика сферы (и кинетическая энергия частицы на сфере) не меняется. Потенциал осциллятора Хиггса (1) также инвариантен относительно указанного преобразования, а потенциал (2) неинвариантен относительно этого преобразования. Он преобразуется следующим образом:

$$2\alpha^2 r_0^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} \rightarrow 2\alpha^2 r_0^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}.$$

Эквивалентно,

$$\alpha^2 r^2 \rightarrow \frac{\alpha^2}{r^2}.$$

Поэтому, естественно ввести следующий сферический аналог потенциала осциллятора Смородинского–Винтерница:

$$V_{\text{BN}} = 2\alpha^2 r_0^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + \frac{\beta^2}{8r_0^2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2}. \quad (5)$$

Коэффициенты мы подобрали так, чтобы в плоском пределе получался потенциал Смородинского–Винтерница (3). Соответственно энергия предложенной нами модели сингулярного осциллятора задается выражением

$$E = \frac{r_0^2 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{r_0^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta}{2} + 2\alpha^2 r_0^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + \frac{\beta^2}{8r_0^2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2}. \quad (6)$$

При свободном движении на сфере вращательный момент задается выражением $J = r_0^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta$.

При наличии вращательно-инвариантного потенциала, в том числе потенциала, соответствующего уравнению (4), эта величина опять сохраняется. Воспользовавшись приведенными выражениями энергии и вращательного момента, мы можем проинтегрировать уравнения движения. Однако мы рассмотрим более общую задачу, когда система помещена в постоянное магнитное поле.

В присутствии постоянного магнитного поля вращательный момент частицы на сфере задается выражением (см., например, [8])

$$\mathcal{J} = r_0^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta - Br_0^2 (1 - \cos \theta). \quad (7)$$

Теперь мы готовы к интегрированию уравнений движения. Как и в предыдущем разделе, воспользуемся для этого законами сохранения. А именно, мы исключим из выражения для энергии (6) угловую скорость $\dot{\varphi}$, воспользовавшись выражением для углового момента (7). В результате получаем

$$\frac{2E}{r_0^2} = \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{(\mathcal{J}/r_0^2 + B(1 - \cos \theta))^2}{1 - \cos^2 \theta} + 4\alpha^2 \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{\beta^2}{4r_0^4} \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}.$$

Это выражение можно представить в следующем виде:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = M + 2Nx + Kx^2,$$

где

$$x = 1 - \cos \theta,$$

$$M = \frac{\mathcal{J}^2 + \beta^2}{r_0^4}, \quad N = \frac{2E + \mathcal{J}B}{r_0^2} - \frac{\beta^2}{4r_0^4}, \quad K = 4\alpha^2 + B^2 + \frac{\beta^2}{4r_0^4} - \frac{2E}{r_0^2}.$$

Отсюда получаем табличный интеграл [17]

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{M + 2Nx + Kx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{-K}} \arcsin \frac{Kx + N}{\sqrt{N^2 - KM}}.$$

Окончательно, зависимость угла θ (“радиуса”) от времени определяется выражением

$$1 - \cos \theta = -\Lambda \sin \sqrt{K} t, \quad \Lambda \equiv \frac{N}{K} (1 + \sqrt{1 - KM/N^2}). \quad (8)$$

Таким образом, в отличие от плоского сингулярного осциллятора, эффективная частота сферического сингулярного осциллятора $\sqrt{K}/2$ зависит от параметра сингулярности β . Как и следовало ожидать, частота колебаний сферического сингулярного осциллятора зависит симметричным образом от параметров $2\alpha r_0$ (исходной частоты) и $\beta/2r_0$. Как и в случае несингулярного сферического осциллятора, частота радиальных колебаний зависит от энергии системы. Иными словами, в отличие от плоской системы, колебания сферической системы негармоничны.

Теперь найдем зависимость от времени угловой переменной φ . Из (7) получаем

$$\varphi = \int dt \frac{\mathcal{J}/r_0^2 + B(1 - \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta} = \left(\frac{\mathcal{J}}{2r_0^2} + B \right) \int \frac{dt}{1 + \cos \theta} + \frac{\mathcal{J}}{2r_0^2} \int \frac{dt}{1 - \cos \theta}.$$

Подставив сюда выражение (8), вновь получим табличный интеграл [17], который даст нам явную зависимость угловой переменной от времени:

$$\varphi = \frac{\mathcal{J}}{r_0^2 \sqrt{K} \sqrt{1 - \Lambda^2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{K} t/2 - \Lambda}{\sqrt{1 - \Lambda^2}} + \frac{\mathcal{J}/r_0^2 + 2B}{\sqrt{K} \sqrt{1 - \Lambda^2/4}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{K} t/2 + \Lambda/2}{\sqrt{1 - \Lambda^2/4}}.$$

Как видим, уравнения движения угловой переменной также явно интегрируются. Заметим, что в отличие от плоского сингулярного случая, зависимость эволюции угла от магнитного поля гораздо более сложная.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы предложили сферическое обобщение двумерного сингулярного осциллятора (осциллятора Смородинского–Винтерница) и рассмотрели его поведение в постоянном магнитном поле. Мы показали, что эта система точно решается на классическом уровне, предъявив ее явные классические решения.

Вне всякого сомнения, предложенная система является также точно решаемой на квантовом уровне: ее квантово-механические решения можно получить из решений сферического (несингулярного) осциллятора [6] соответствующим переопределением магнитного квантового числа $|m| \rightarrow \sqrt{m^2 + \beta^2}$. Хотя способ получения квантово-механических решений очевиден, они заслуживают более детального анализа. Так, интересно посмотреть свойства спектра системы при $2\alpha r_0 = \beta/2r_0$, т.е. в случае, когда система обладает симметрией относительно пространственных отражений. Наконец, интересно проанализировать оптические свойства предложенной модели с целью выяснения возможности ее применения в описании кольцеобразных квантовых точек.

Благодарности. Автор благодарен А. Нерсисяну за предложенную задачу и помощь в оформлении рукописи.

Список литературы

- [1] А. М. Переломов, *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли*, Наука, М., 1990.
- [2] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1989.
- [3] P. W. Higgs, *J. Phys. A*, **12**:3 (1979), 309–323; H. I. Leemon, *J. Phys. A*, **12**:4 (1979), 489–501.
- [4] E. Schrödinger, *Proc. Roy. Irish Soc.*, **46** (1940), 9–16; **46** (1941), 183–206; **47** (1941), 53–54.
- [5] S. Bellucci, A. Nersessian, *Phys. Rev. D*, **67**:6 (2003), 5013.
- [6] S. Bellucci, A. Nersessian, A. Yeranyan, *Phys. Rev. D*, **70**:8 (2004), 5013.
- [7] S. Bellucci, A. Nersessian, A. Yeranyan, *Phys. Rev. D*, **70**:4 (2004), 5006.
- [8] M. A. Alexanyan, K. S. Aramyan, *J. Contemp. Phys.*, **42**:2 (2007), 49–54.
- [9] A. Nersessian, A. Yeranyan, *J. Phys. A*, **37**:7 (2004), 2791–2801.
- [10] L. Mardoyan, A. Nersessian, *Phys. Rev. B*, **72**:23 (2005), 3303.
- [11] S. Bellucci, L. Mardoyan, A. Nersessian, *Phys. Lett. B*, **636**:2 (2006), 137–141.
- [12] L. Mardoyan, A. Nersessian, A. Yeranyan, *Phys. Lett. A*, **366**:1–2 (2007), 30–35.
- [13] R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.*, **50**:18 (1983), 1395–1398.
- [14] S. C. Zhang, J. P. Hu, *Science*, **294**:5543 (2001), 823–828.
- [15] П. Винтернитц, Я. А. Смородинский, М. Углирж, И. Фриш, *ЯФ*, **4** (1967), 625–635; J. Fris, V. Mandrasov, Ya. A. Smorodinsky, M. Uhler, P. Winternitz, *Phys. Lett.*, **16**:3 (1965), 354–356.
- [16] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, Наука, М., 1973.
- [17] Г. Б. Двайт, *Таблицы интегралов и другие математические формулы*, Наука, М., 1983.

Поступила в редакцию 17.05.2007