Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ли Чжи-Минь, Мао Мин-Чжи, Верхняя граница времени пребывания для простого процесса с запретом, *ТМФ*, 2008, том 156, номер 1, 147–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6236>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 16:15:38

© 2008 г.

Чжи-Минь Ли*, Мин-Чжи Мао*

ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ ДЛЯ ПРОСТОГО ПРОЦЕССА С ЗАПРЕТОМ

Рассмотрена дисперсия времени пребывания для асимметричного процесса с запретом. В случае, когда $m \neq 0$ (m – средняя частота прыжков) и $\rho = 1/2$ (ρ – вероятность заполнения состояния), получено, что дисперсия ограничена сверху величиной $O(t^{3/2})$.

Ключевые слова: процесс с запретом, формулы для дисперсии, нормы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим случайные блуждания с простым запретом. Это означает, что мы имеем набор частиц, совершающих блуждания по целочисленным точкам действительной прямой. Каждая частица в течение экспоненциально распределенного промежутка времени со средним, равным 1, находится в состоянии ожидания, а затем совершает прыжок в случайным образом выбранную точку. Вероятность того, что частица, находящаяся в точке i , через время t совершит скачок в точку j равна $p_t(i, j) = tp(i, j) + o(t)$, где $p(i, j) = p(j - i)$ – частота прыжков. Основное предположение заключается в том, что частица может совершить прыжок в точку j , только если это место не занято, в противном случае частица остается в исходной точке и ожидает в течение нового экспоненциально распределенного промежутка времени. В начальный момент времени мы помещаем одну из частиц в начало координат с вероятностью единица и затем следим за ее эволюцией. Эта частица называется отмеченной.

Более формально, пусть $\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ – конфигурационное пространство, где конфигурация $\eta = \{\eta(i) : i \in \mathbb{Z}\}$ характеризует “заполнение” координат: $\eta(i) = 1$, если точка i занята, и $\eta(i) = 0$ в противном случае. Процесс с запретом – это марковский случайный процесс η_t , развивающийся на Σ , с формальным генератором

$$(Lf)(\eta) = \sum_{i,j} p(j-i)\eta(i)(1-\eta(j))(f(\eta^{i,j}) - f(\eta)),$$

---

*Department of Mathematics, Shanghai Jiaotong University Shanghai, China.
E-mail: zmli05@sjtu.edu.cn

где

$$\eta^{i,j}(k) = \begin{cases} \eta(k), & \text{если } k \neq i, j, \\ \eta(j), & \text{если } k = i, \\ \eta(i), & \text{если } k = j, \end{cases}$$

и f – локальная (отличная от нуля на некотором конечном подмножестве) функция на $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$.

Для каждого $\rho \in [0, 1]$ мы имеем на Σ бернуллиевское произведение мер P_ρ , где $P_\rho\{\eta(x) = 1\} = \rho$, причем P_ρ – инвариантная мера. Обозначим через E_ρ математическое ожидание относительно P_ρ , и для всех f, g , принадлежащих пространству $L^2(P_\rho)$ функций, квадрат которых интегрируем по Лебегу по мере P_ρ , определим скалярное произведение $(f, g)_\rho = \int f g dP_\rho$.

Для простого процесса с запретом мы будем рассматривать дисперсию аддитивного функционала $A_t = \int_0^t f(\eta_s) ds$ [1], [2], поскольку его можно использовать для описания движения отмеченной частицы и частицы второго класса (см. [3]–[9]). Особое внимание мы обратим на функционал времени пребывания $\int_0^t (\eta_s(0) - \rho) ds$ [10], свойства которого используются для доказательства центральных предельных теорем для аддитивных функционалов. Рассмотрим вариацию времени пребывания, получим

$$\sigma_t^2 = E_\rho \left[\int_0^t (\eta_s(0) - \rho) ds \right]^2 = 2 \int_0^t (t-s) E_\rho [(\eta_s(0) - \rho)(\eta_0(0) - \rho)] ds.$$

Обозначив через $R(t)$ положение частицы второго класса в момент времени t , получим

$$\begin{aligned} E_\rho [(\eta_s(0) - \rho)(\eta_0(0) - \rho)] &= \\ &= \rho(1 - \rho) [P_\rho(\eta_s(0) = 1 \mid \eta_0(0) = 1) - P_\rho(\eta_s(0) = 1 \mid \eta_0(0) = 0)] = \\ &= \rho(1 - \rho) P(R(s) = 0), \end{aligned}$$

где P – парная мера для $P_\rho\{\cdot \mid \eta(0) = 1\}$ и $P_\rho\{\cdot \mid \eta(0) = 0\}$. Отсюда получаем соотношение между дисперсией времени пребывания и ожидаемым заполнением в начале координат для частицы второго класса:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma_t^2}{t} &= \lim_{t \rightarrow \infty} 2\rho(1 - \rho) \int_0^t \left(1 - \frac{s}{t}\right) P(R(s) = 0) ds = \\ &= 2\rho(1 - \rho) \int_0^\infty P(R(s) = 0) ds. \end{aligned}$$

Как было доказано в работе [2], предельную перемасштабированную дисперсию времени пребывания можно переписать как

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma_t^2}{t} = 2 \lim_{\lambda \rightarrow 0} E_\rho [(\eta_0(0) - \rho)(\lambda - L)^{-1}(\eta_0(0) - \rho)].$$

Эта формула дает нам метод исследования времени пребывания. В работе [11] дисперсия времени пребывания вычислена с использованием свойств дуальности симметричного процесса с запретом. В работе [6] эти результаты распространены на

асимметричный случай со средней частотой прыжков $m = \sum_{k \in \mathbb{Z}} kp(k) = 0$. Не так давно авторы работы [5] доказали принципы инвариантности для общего асимметричного случая в размерности $d \geq 3$, в рамках которого могут быть использованы транзиентные оценки. В работе [12] получена нижняя граница дисперсии для случая $m \neq 0$ и $\rho = 1/2$. На сегодняшний день нам не известны работы, в которых обсуждалась бы верхняя граница дисперсии. В настоящей работе мы получили эту верхнюю границу. Предложенный нами метод состоит в том, что мы устанавливаем связь между дисперсией времени пребывания и некоторыми нормами резольвенты H_1 и, используя эту связь, аппроксимируем процесс с запретом независимыми случайными блужданиями. По-видимому, такой подход применим только для $\rho = 1/2$.

Работа построена следующим образом: в разделе 2 даны определения; в разделе 3 рассмотрена дуальность простого процесса с запретом; в разделе 4 рассчитаны некоторые оценки, касающиеся связи между простым процессом с запретом и случайными блужданиями; в разделе 5 доказан основной результат настоящей работы.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Во избежание технических сложностей мы будем предполагать, что частота $p(j-i)$ переходов из точки i в точку j отлична от нуля в конечном интервале, т.е. $p(k) = 0$ для $|k| > M$ при некотором $M < \infty$, а также что случайный процесс с симметризацией $a(\cdot) = (p(\cdot) + p(-\cdot))/2$ неприводим. Генератор L можно разложить на симметричную и антисимметричную части, $L = -S - A$, где $-S = (L + L^*)/2$ и $-A = (L - L^*)/2$, L^* обозначает сопряженный оператор для L . Для локальной функции ϕ эти операторы задаются следующими явными формулами:

$$\begin{aligned} (-S\phi)(\eta) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (p(j-i) + p(i-j)) (\phi(\eta^{i,j}) - \phi(\eta)), \\ (-A\phi)(\eta) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (p(j-i) - p(i-j)) (\eta(i) - \eta(j)) (\phi(\eta^{i,j}) - \phi(\eta)). \end{aligned}$$

Заметим также, что в форме Дирихле $(\phi, -L\phi)_\rho$ остается только симметричная часть, и для локальной функции ϕ получаем

$$(\phi, -L\phi)_\rho = (\phi, S\phi)_\rho = \frac{1}{4} \sum_{i,j} E_\rho [(p(j-i) + p(i-j)) (\phi(\eta^{i,j}) - \phi(\eta))^2].$$

Для $\lambda > 0$ зададим норму $\|\cdot\|_{1,\lambda}$ равенством $\|\phi\|_{1,\lambda}^2 = (\phi, (\lambda - L)\phi)_\rho$. Для $\lambda > 0$ определим ограниченный оператор $(\lambda - L)^{-1}: L^2(P_\rho) \rightarrow L^2(P_\rho)$ такой, что

$$(\lambda - L)^{-1}f(\eta) = \int_0^\infty e^{\lambda t} T_t f(\eta) dt,$$

где $T_t f(\eta) = E_t f(\eta_t)$. Ассоциированная норма $\|\cdot\|_{-1,\lambda}$ определяется формулой $\|\phi\|_{-1,\lambda}^2 = (\phi, (\lambda - L)^{-1}\phi)_\rho$. В работе [5] норма $\|\cdot\|_{-1,\lambda}$ имеет другой вид:

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{-1,\lambda}^2 &= (\phi, (\lambda - L)^{-1}\phi)_\rho = \sup_f \{2(f, \phi) - (f, ((\lambda - L)^{-1})_s^{-1}f)\} = \\ &= \sup_f \{2(f, \phi) - (f, (\lambda + S)f) - (Af, (\lambda + S)^{-1}Af)\}, \end{aligned}$$

где $[(\lambda - L)^{-1}]_s$ обозначает симметричную часть оператора $(\lambda - L)^{-1}$. Имеем следующую лемму.

ЛЕММА 2.1. Пусть f – локальная функция и пусть $\lambda > 0$. Тогда

$$(f, (\lambda - L)^{-1}f)_\rho \leq \inf_u \{ (f + Au, (\lambda + S)^{-1}Au)_\rho + (u, (\lambda + S)u)_\rho \}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\lambda > 0$ оператор $(\lambda - L)^{-1}$ ограничен на $L^2(P_\rho)$. Заметим также, что

$$([(\lambda - L)^{-1}]_s)^{-1} = (\lambda + S) - A(\lambda + S)^{-1}A.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (f, (\lambda - L)^{-1}f)_\rho &= (f, [(\lambda - L)^{-1}]_s f)_\rho = \sup_\phi \{ 2(f, \phi)_\rho - (\phi, ([(\lambda - L)^{-1}]_s)^{-1} \phi)_\rho \} = \\ &= \sup_u \{ 2(f, u)_\rho - (u, (\lambda + S)u)_\rho - (Au, (\lambda + S)^{-1}Au)_\rho \}. \end{aligned}$$

Подставив S вместо L и $A\phi$ вместо f , получаем

$$(A\phi, (\lambda + S)^{-1}A\phi)_\rho = \sup_u \{ 2(A\phi, u)_\rho - (u, (\lambda + S)u)_\rho \}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (f, (\lambda - L)^{-1}f)_\rho &= \sup_\phi \inf_u \{ 2(f, \phi)_\rho - (\phi, (\lambda + S)\phi)_\rho - 2(A\phi, u)_\rho + (u, (\lambda + S)u)_\rho \} = \\ &= \sup_\phi \inf_u \{ 2(f + Au, \phi)_\rho - (\phi, (\lambda + S)\phi)_\rho + (u, (\lambda + S)u)_\rho \} \leq \\ &\leq \inf_u \sup_\phi \{ 2(f + Au, \phi)_\rho - (\phi, (\lambda + S)\phi)_\rho + (u, (\lambda + S)u)_\rho \} = \\ &= \inf_u \{ (f + Au, (\lambda + S)^{-1}(f + Au))_\rho + (u, (\lambda + S)u)_\rho \}. \blacksquare \end{aligned}$$

Теперь получим некоторые оценки для норм $\| \cdot \|_{1,\lambda}$ и $\| \cdot \|_{-1,\lambda}$. В работах [2], [13] были доказаны следующие предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $-S$ – генератор симметричного процесса с запретом на пространстве $\mathbb{Z}$ с неприводимой частотой прыжков p , отличной от нуля в конечном интервале значений, а $-S'$ – генератор процесса для ближайших соседей (т.е. процесса, для которого $p(k) = 0$ при $|k| > 1$). Тогда существуют такие C_1 и C_2 , что для локальной функции $\phi \in L^2(P_\rho)$ выполнены неравенства

$$C_1(\phi, (\lambda + S)\phi) \leq (\phi, (\lambda + S')\phi) \leq C_2(\phi, (\lambda + S)\phi).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть L – генератор процесса с запретом на пространстве $\mathbb{Z}$ с трансляционно-инвариантной частотой прыжков p , отличной от нуля в конечном интервале значений, и симметризация L неприводима. Пусть также L' – генератор трансляционно-инвариантной частоты прыжков p' для ближайших соседей с той же средней частотой прыжков, т.е.

$$p'(\pm 1) = \begin{cases} \max\{\pm m, 0\}, & \text{если } m \neq 0, \\ 1, & \text{если } m = 0. \end{cases}$$

Тогда найдутся такие $C = C(p)$ и $D = D(p) > 0$, что для всех $\lambda > 0$

$$C^{-1}(\phi, (D^{-1}\lambda - L')^{-1}\phi) \leq (\phi, (\lambda - L)^{-1}\phi) \leq C(\phi, (D^{-1}\lambda - L')\phi).$$

Далее мы будем рассматривать только простые асимметричные процессы с запретом для ближайших соседей. Продвигаясь вперед в наших исследованиях, докажем следующую лемму.

ЛЕММА 2.2. Пусть $L = -S - A$ соответствует процессу с запретом с конечной неприводимой частотой перехода p со средним $m = 0$ по отношению к локальной функции ϕ . Тогда существует некоторая постоянная C такая, что

$$(A\phi, (\lambda + S)^{-1}A\phi) \leq (C + 1)^2(\phi, S\phi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства Шварца для локальных функций ϕ и ψ имеем

$$\begin{aligned} |(A\phi, \psi)| &= |(\phi, S\psi)| + C\sqrt{(\phi, S\phi)(\psi, S\psi)} \leq \\ &\leq (C + 1)\sqrt{(\phi, S\phi)(\psi, S\psi)} \end{aligned}$$

для некоторой постоянной C . Теперь зафиксируем локальную функцию ϕ и заметим, что $E_\rho(A\phi) = 0$ для всех ρ . Используя лемму 3.4 из работы [2] и положив $\psi = (\lambda + S)^{-1}A\phi$, получаем

$$\begin{aligned} (A\phi, (\lambda + S)^{-1}A\phi) &\leq (C + 1)\sqrt{(\phi, S\phi)}\sqrt{(A\phi, (\lambda + S)^{-2}SA\phi)} \leq \\ &\leq (C + 1)\sqrt{(\phi, S\phi)}\sqrt{(A\phi, (\lambda + S)^{-1}A\phi)}. \end{aligned}$$

Разделив обе части последнего неравенства на $\sqrt{(A\phi, (\lambda + S)^{-1}A\phi)}$ и возведя его в квадрат, завершаем тем самым доказательство леммы. ■

3. ДУАЛЬНОСТЬ

Для любого конечного подмножества B из $\mathbb{Z}$ обозначим через ξ_B локальную функцию с нулевым средним по мере P_ρ вида

$$\xi_B = \prod_{x \in B} \frac{\eta(x) - \rho}{\sqrt{\rho(1 - \rho)}}.$$

По определению считаем, что $\xi_\emptyset = 1$. Заметим, что набор $\{\xi_B\}$, где B пробегает все конечные подмножества в $\mathbb{Z}$, образует ортогональный базис в $L^2(P_\rho)$. Для $n \geq 1$ обозначим через ε_n семейство всех подмножеств в $\mathbb{Z}$ из n точек, а через ε – семейство всех непустых конечных подмножеств в $\mathbb{Z}$,

$$\varepsilon_n = \{B \subset \mathbb{Z} : |B| = n\}, \quad \varepsilon = \bigcup_{n \geq 1} \varepsilon_n.$$

Любая функция $f \in L^2(P_\rho)$ может быть разложена по базису $\{\xi_B\}$:

$$f = \sum_{B \in \varepsilon} f_B \xi_B = \sum_{n \geq 1} \sum_{B \in \varepsilon_n} f_B \xi_B,$$

где функция $f: \varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ имеет конечный носитель. Назовем f_B коэффициентом Фурье локальной функции f . Говорят, что локальная функция, коэффициенты Фурье которой обращаются в нуль вне ε_n , имеет степень n . Для $f, g \in L^2(P_\rho)$ имеем

$$(f, g) := (f, g)_\rho = \sum_{B \in \varepsilon} f_B g_B.$$

Заметим, что $\eta(x) - \eta(y) = \sqrt{\rho(1-\rho)}(\xi_x - \xi_y)$. Используя равенство

$$\xi_x^2 = 1 + \frac{1-2\rho}{\sqrt{\rho(1-\rho)}}\xi_x,$$

получаем, что

$$[\eta(x) - \eta(y)][\xi_{B^{x,y}} - \xi_B] = \begin{cases} 2\sqrt{\rho(1-\rho)}[\xi_{B \cup y} - \xi_{B \setminus x}] + \\ + (2\rho - 1)[\xi_B + \xi_{(B \setminus x) \cup y}], & \text{если } x \in B, \quad y \notin B, \\ 2\sqrt{\rho(1-\rho)}[\xi_{B \setminus y} - \xi_{B \cup x}] - \\ - (2\rho - 1)[\xi_B + \xi_{(B \setminus y) \cup x}], & \text{если } y \in B, \quad x \notin B, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

где

$$B^{x,y} = \begin{cases} (B \setminus x) \cup y, & \text{если } x \in B, \quad y \notin B, \\ (B \setminus y) \cup x, & \text{если } x \notin B, \quad y \in B, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Таким образом, операторы исключения L , S , A задаются формулами

$$Lf = \sum_{B \in \varepsilon} \mathfrak{L}f(B)\xi_B, \quad Af = \sum_{B \in \varepsilon} \mathfrak{A}f(B)\xi_B, \quad Sf = \sum_{B \in \varepsilon} \mathfrak{S}f(B)\xi_B,$$

где $-\mathfrak{L} = \mathfrak{S} + \mathfrak{A}$ и

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}f(B) &= \frac{1}{2} \sum_{x,y} a(y-x)(f_{B^{x,y}} - f_B), \\ \mathfrak{A}f(B) &= (2\rho - 1) \sum_{x,y} b(y-x)(f_{B^{x,y}} - f_B) + 2\sqrt{\rho(1-\rho)} \sum_{x \in B, y \notin B} b(y-x)\xi_{B \cup y} - \\ &\quad - 2\sqrt{\rho(1-\rho)} \sum_{x \in B, y \notin B} b(y-x)\xi_{B \setminus x}. \end{aligned}$$

Для локальных функций определим норму $\|\cdot\|_{1,\lambda}$: $\|\mathfrak{g}\|_{1,\lambda} = (\mathfrak{g}, (\lambda - \mathfrak{L})\mathfrak{g})$ и дуальную норму $\|\cdot\|_{-1,\lambda}$: $\|\mathfrak{g}\|_{-1,\lambda}^2 = \sup_f \{2(\mathfrak{g}, f) - \|f\|_{1,\lambda}^2\}$. Тогда неравенство в лемме 2.1 можно переписать как

$$(f, (\lambda - L)^{-1}f)_\rho \leq \inf_{\mathfrak{g}} \{ (f + \mathfrak{A}\mathfrak{g}, (\lambda + \mathfrak{S})^{-1}(f + \mathfrak{A}\mathfrak{g})) + (\mathfrak{g}, (\lambda + \mathfrak{S})\mathfrak{g}) \},$$

где в правой части стоят только функции на ε .

4. ОЦЕНКА НОРМ

Теперь удалим основное условие запрета. Положим

$$\varepsilon_{n1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{Z}, x_i \neq x_j \text{ при } i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n\}$$

и рассмотрим n независимых случайных блужданий на $\mathbb{Z}$. Пространством состояний этого процесса $(X)_{t \geq 0} = (x_t^1, x_t^2, \dots, x_t^n)_{t \geq 0}$ является $\mathbb{Z}^n$, инфинитезимальный генератор n независимых случайных блужданий с частотой прыжков $s(\cdot)$ задается равенством

$$(\Delta f)(X) = \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{z \in \mathbb{Z}} s(z)[f(X + ze_j) - f(X)],$$

где f – функция на $\mathbb{Z}^n$ с конечным носителем. Для $n \geq m$ и заданной функции f на $\mathbb{Z}^n$ определим функцию g на $\mathbb{Z}^m$ выражением

$$g^2(B) = \sum_{\substack{A: A \supset B, \\ |A|=n}} f^2(A).$$

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 4.1. Для любого $n \geq m$ существует некоторая постоянная C такая, что

$$(g, -Sg) \leq C \cdot \binom{n-1}{m-1} (f, -Sf),$$

где $\binom{n-1}{m-1} = \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}$ – биномиальный коэффициент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычисления показывают, что для функции $h: \varepsilon_n \rightarrow \mathbb{R}$ с конечным носителем

$$(h, -Sh) = 2\rho(1-\rho) \sum_{x \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{A \in \varepsilon_n, \\ A \cap \{x, x+e\} = \emptyset}} (h_{A \cup \{x\}} - h_{A \cup \{x+e\}})^2,$$

где e – единичный вектор пространства. Зафиксируем симметричную функцию $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ с конечным носителем. Пусть для B из ε_m

$$\rho_m(B) = \sum_{\substack{A \supset B, \\ |A|=n}} f_A^2.$$

Положим $g = \sqrt{\rho_m(B)}$ и запишем для $w = x$ или $w = x + e$, $e = \pm 1$, выражение

$$g^2(B \cup \{w\}) = \sum_{\substack{\Lambda \in \varepsilon_{n-m}, \\ \Lambda \cap (B \cup \{x+e\} \cup \{x\}) = \emptyset}} f_{\Lambda \cup B \cup \{w\}}^2 + F(B \cup \{x\} \cup \{x+e\})^2,$$

где

$$F(B \cup \{x\} \cup \{x+e\})^2 = \sum_{\substack{\Lambda \in \varepsilon_{n-m-1}, \\ \Lambda \cap (B \cup \{x+e\} \cup \{x\}) = \emptyset}} f_{\Lambda \cup \{B \cup \{x\} \cup \{x+e\}}^2.$$

В силу обратного неравенства треугольника $(\|a\|_2 - \|b\|_2)^2 \leq \|a - b\|_2^2$ имеем

$$g^2(B \cup \{x\}) - g^2(B \cup \{x+e\}) \leq \sum_{\substack{\Lambda \in \varepsilon_{n-m}, \\ \Lambda \cap (B \cup \{x+e\} \cup \{x\}) = \emptyset}} [f_{\Lambda \cup \{B \cup \{x+e\}\}} - f_{\Lambda \cup \{B \cup \{x\}\}}]^2.$$

В частности,

$$(g, -Sg) \leq C \sum_{x \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{B \in \varepsilon_{m-1}, \\ B \cap \{x, x+e\} = \emptyset}} \sum_{\substack{\Lambda \in \varepsilon_{n-m}, \\ \Lambda \cap (B \cup \{x, x+e\}) = \emptyset}} (f_{\Lambda \cup \{x\} \cup B} - f_{\Lambda \cup B \cup \{x+e\}})^2$$

для некоторой конечной постоянной C . Слагаемые зависят только от $A = B \cup \Lambda$. Поскольку $|\{B \subset A: |B| = m-1\}| = \binom{n-1}{m-1}$, имеем

$$(g, -Sg) \leq C \cdot \binom{n-1}{m-1} (f, -Sf)$$

для некоторой конечной постоянной C .

Следующая лемма доказана в работе [14]. Обозначим через W_l характеристическую функцию множества $\{(x_1, \dots, x_n) : |x_i - x_j| \geq l, i, j = 1, 2, \dots, n\}$.

ЛЕММА 4.2. Для $n \geq 2$ и локальной функции f на ε_n справедлива оценка

$$\|f(1 - W_l)\|_0^2 \leq C(l)n\|f\|_1^2,$$

где $C(l)$ зависит только от l .

Теперь мы подошли к соотношению вида Дирихле между процессами с запретом и случайными блужданиями. Предположим, что f является функцией на $\mathbb{Z}^n$ и положим $Tf(x_1, x_2, \dots, x_n) = E_{(x_1, \dots, x_n)}f(X_\tau)$, где

$$\tau = \inf\{t : x_t^i \neq x_t^j, i, j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.1. Для любой симметричной функции f на $\mathbb{Z}^n$, обращающейся в нуль на ε_{n1}^c (где ε_{n1}^c – множество, дополнительное к ε_{n1}), и для $F = Tf$ найдется такая постоянная C , что

$$C(F, (\lambda - \Delta)F) \leq (f, (\lambda - L)f) \leq (F, (\lambda - \Delta)F).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению

$$(F, -\Delta F) = \frac{1}{2} \sum_{X, Y : |X - Y| = 1} [F(X) - F(Y)]^2.$$

Оценка сверху получается немедленно, поскольку L обращает в нуль слагаемые вида Дирихле, в которых X или Y принадлежит ε_{n1}^c . Теперь получим оценку снизу. Сначала разделим дополнение множества ε_{n1} на два множества $\varepsilon_{n2} = \{x_i = x_j = x, |x_k - x| \geq l, |x_k - x_s| \geq l, k, s \neq i, j\}$ и $\varepsilon_{n3} = \mathbb{Z}^n \setminus (\varepsilon_{n1} \cup \varepsilon_{n2})$. Разложим X и Y на множества ε_{n1} , ε_{n2} , ε_{n3} , тогда

$$(F, -\Delta F) = \sum_{\alpha, \beta = 1, 2, 3} \phi_{\alpha, \beta}, \quad \phi_{\alpha, \beta} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{X \in \varepsilon_{n\alpha}, Y \in \varepsilon_{n\beta} : \\ |X - Y| = 1}} [F(X) - F(Y)]^2.$$

Если X и Y удовлетворяют основному условию, то

$$\phi_{1,1} = \frac{1}{2} \sum_{|X - Y| = 1} [f(X) - f(Y)]^2 \leq (f, -Sf).$$

Можно оценить слагаемые, в которых X или Y принадлежит ε_{n3} :

$$|\phi_{1,3} + \phi_{2,3} + \phi_{3,3}| \leq C \sum_{X \in \varepsilon_{n3}} (1 - W_l)F^2(X),$$

где C – некоторая постоянная. Пользуясь определением F , можно проверить, что

$$\sum_{X \in \varepsilon_{n3}} (1 - W_l)F^2(X) \leq C \sum_{X \in \varepsilon_{n3}} (1 - W_l)f^2(X).$$

Последнее слагаемое ограничено величиной $C(\lambda)n(f, (\lambda - L)f)$ из леммы 4.2. Таким образом, имеем

$$|\phi_{1,3} + \phi_{2,3} + \phi_{3,3}| \leq C(\lambda)n(f, (\lambda - L)f).$$

Теперь найдем границу для $\phi_{1,2}$, например, в случае $X = (x_1, x_2, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$, $Y = (x_1, x_2, \dots, x_j, x_j, \dots, x_n)$; при этом $|x_k - x_j| \geq l$ для всех $k \neq j$ по определению ε_{n2} . Имеем $F(Y) = E_Y f(X_\tau)$, и мы всегда можем найти путь от X_τ к X из ε_{n1} . Согласно неравенству Шварца

$$\sum_{X_\tau \in \varepsilon_{n1}} |f(X_\tau) - f(X)| \leq C(f, -Sf),$$

поэтому $|\phi_{1,2}| \leq C(f, (-S)f)$.

Чтобы найти границу для $\phi_{2,2}$, рассмотрим $F(X) - F(Y) = E_X f(X_\tau) - E_Y f(Y_\tau)$. Используя неравенство Йенсена и рассуждения, аналогичные проведенным выше при оценке $\phi_{1,2}$, получим $|\phi_{2,2}| \leq C(f, -Sf)$. ■

Как двойственное к теореме 4.1 утверждение имеем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4.2. *Для любой симметричной функции f на $\mathbb{Z}^n$, обращающейся в нуль на ε_{n1}^c , и для $F = Tf$ существуют такие постоянные C_1 и C_2 , что*

$$C_1(F, (\lambda - \Delta)^{-1}F) \leq (f, (\lambda - L)^{-1}f) \leq C_2(F, (\lambda - \Delta)^{-1}F).$$

5. ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА ДИСПЕРСИИ

Получим некоторые оценки дисперсии времени пребывания для простого процесса с запретом.

ТЕОРЕМА 5.1. *Для простого асимметричного процесса с запретом на $\mathbb{Z}$ со средней частотой $m \neq 0$ и $\rho = 1/2$, дисперсия σ_t^2 времени пребывания ограничена величиной $O(t^{3/2})$.*

Для доказательства теоремы сначала докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 5.1. *Предположим, что $V(t)$ – неубывающая функция, $\beta > 0$ и существуют $C_1 < \infty$ и $\lambda_0 > 0$ такие, что при $0 < \lambda < \lambda_0$*

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} V(t) dt \leq C_1 \lambda^{-(1+\beta)}.$$

Тогда существует постоянная $C_2 < \infty$ такая, что $V(t) \leq C_2 t^\beta$ для всех $t > t_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $V(t)$ монотонно не убывает, для $t > \lambda_0^{-1}$ имеем

$$e^{-1}V(t) = \int_1^\infty e^{-s}V(t) ds \leq \int_0^\infty e^{-s}V(ts) ds \leq C_1 t^\beta. \quad \blacksquare$$

Поэтому остается рассмотреть норму $\|\cdot\|_{-1,\lambda}$ функции $\eta(0) - \rho$.

ЛЕММА 5.2. *Для простого процесса с запретом на $\mathbb{Z}$ при $\rho = 1/2$ и $m \neq 0$ справедлива оценка*

$$\|\eta(0) - \rho\|_{-1,\lambda} \leq C \lambda^{-1/2},$$

где C – некоторая постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала введем фурье-образ функции. Пусть ψ – локальная функция на $\mathbb{Z}^n$, тогда ее фурье-образ есть

$$\widehat{\psi}(s_1, s_2, \dots, s_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i(x_1 s_1 + \dots + x_n s_n)} \psi(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где $s_1, s_2, \dots, s_n \in [0, 1]$. После кропотливых вычислений получаем

$$\widehat{\Delta\psi}(s_1, s_2, \dots, s_n) = -\left[\sum_{j=1}^n \theta(s_j)\right] \widehat{\psi}(s_1, s_2, \dots, s_n),$$

где $\theta(u) = \sum_{z \in \mathbb{Z}} s(z) \sin^2(\pi uz)$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{1,\lambda}^2 &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{(s_1, s_2, \dots, s_n) \in (0,1)^n} \left(\lambda + \sum_{j=1}^n \theta(s_j)\right) |\widehat{\psi}(s_1, s_2, \dots, s_n)|^2 ds_1 ds_2 \dots ds_n, \\ \|\psi\|_{-1,\lambda}^2 &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{(s_1, s_2, \dots, s_n) \in (0,1)^n} \frac{|\widehat{\psi}(s_1, s_2, \dots, s_n)|^2}{\left(\lambda + \sum_{j=1}^n \theta(s_j)\right)} ds_1 ds_2 \dots ds_n. \end{aligned}$$

Для функции степени два имеем

$$\begin{aligned} \widehat{A\phi}(s, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{(x,y) \in \mathbb{Z}^2} e^{2\pi i(xs+yt)} (A\phi)(x, y) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \widehat{\phi}(s+t) [2a_1 \sin(2\pi s) + 2a_1 \sin(2\pi t)]. \end{aligned}$$

Кроме того, фурье-образ индикаторной функции равен $\widehat{1}_{\{0\}}(s) = 1/\sqrt{2}$, и мы получаем

$$\begin{aligned} (\widehat{1}_{\{0\}} + \widehat{A\phi}, (\lambda - S)^{-1}(\widehat{1}_{\{0\}} + \widehat{A\phi})) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{(s,t) \in [0,1]^2} \frac{|\widehat{1}_{\{0\}}(s) + \widehat{A\phi}(s, t)|^2}{\lambda + \theta(s) + \theta(t)} ds dt = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{(s,t) \in [0,1]^2} \frac{|\widehat{1}_{\{0\}}(s) + \widehat{A\phi}(s, t)|^2}{\lambda + 2 \sin^2(\pi s) + 2 \sin^2(\pi t)} ds dt = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{(s,t) \in [0,1]^2} \frac{|(2a_1 \sin(2\pi s) + 2a_1 \sin(2\pi t))\widehat{\phi}(s+t) + 1|^2}{2(\lambda + 2 \sin^2(\pi s) + 2 \sin^2(\pi t))} ds dt. \end{aligned}$$

Подстановка этого выражения в неравенство в лемме 2.1 дает

$$\begin{aligned} \|\eta(0) - \rho\|_{-1,\lambda} &\leq \inf_{\phi} \{2(1_{\{0\}} + A\phi, (\lambda - S)^{-1}(1_{\{0\}} + A\phi)) + (\phi, (\lambda - S)\phi)\} \leq \\ &\leq \inf_{\phi \in C_1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{[0,1]} (\lambda + 2 \sin^2(\pi s)) |\widehat{\phi}(s)|^2 ds + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi} \int_{(s,t) \in [0,1]^2} \frac{|(2a_1 \sin(2\pi s) + 2a_1 \sin(2\pi t))\widehat{\phi}(s+t) + 1|^2}{2(\lambda + 2 \sin^2(\pi s) + 2 \sin^2(\pi t))} ds dt \right\}. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных $s, t \mapsto u, v$ так, что $s = (u+v)/2$, $t = (u-v)/2$, тогда область $[0, 1]^2$ перейдет в квадрат D с вершинами $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$. Пусть

$$\begin{aligned} \gamma(u, v) &= 4 \sin^2 \frac{\pi u}{2} \cos^2 \frac{\pi v}{2} + 4 \sin^2 \frac{\pi v}{2} \cos^2 \frac{\pi u}{2}, \\ \delta(u, v) &= 4a_1 \sin(\pi u) \cos(\pi v). \end{aligned}$$

Выражение под знаком точной нижней грани в правой части последнего равенства может быть записано как

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{[0,1]} (\lambda + 2 \sin^2(\pi u)) |\widehat{\phi}(u)|^2 du + \frac{1}{8\pi^2} \int_D \frac{\delta^2(u, v)}{\lambda + \gamma(u, v)} |\widehat{\phi}(u)|^2 du dv + \\ & + \frac{1}{8\pi^2} \int_D \frac{1}{\lambda + \gamma(u, v)} du dv + \frac{1}{8\pi^2} \int_D \frac{2\delta(u, v)}{\lambda + \gamma(u, v)} \widehat{\phi}(u) du dv. \end{aligned}$$

Заменяя переменные и используя определенную симметрию (замечая, что равенство $\widehat{\phi}(u+1) = \widehat{\phi}(u)$ справедливо как при $0 \leq u \leq 1$, $u \leq v \leq 1$, так и при $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq u$), нетрудно видеть, что сумма трех последних интегралов может быть преобразована к следующему выражению:

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_0^1 F_\lambda^1(u) |\widehat{\phi}(u)|^2 du + \frac{1}{8\pi^2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\lambda + \gamma(u, v)} du dv + \frac{1}{8\pi^2} \int_0^1 F_\lambda^2(u) \widehat{\phi}(u) du,$$

где

$$F_\lambda^1 = \int_0^1 \frac{\delta^2(u, v)}{\lambda + \gamma(u, v)} dv, \quad F_\lambda^2 = \int_0^1 \frac{2\delta}{\lambda + \gamma(u, v)} dv.$$

Записав оценки в более удобной для нас форме, получаем, что

$$\begin{aligned} \|\eta(0) - \rho\|_{-1, \lambda}^2 & \leq \frac{1}{8\pi^2} \int_0^1 F_\lambda^1(u) \left(\frac{F_\lambda^2(u)}{2F_\lambda^1(u) + 8\pi(\lambda + 2 \sin^2(\pi u))} \right)^2 du + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (\lambda + 2 \sin^2(\pi u)) \left(\frac{F_\lambda^2(u)}{2F_\lambda^1(u) + 8\pi(\lambda + 2 \sin^2(\pi u))} \right)^2 du + \\ & + \frac{1}{8\pi^2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\lambda + \gamma(u, v)} du dv - \\ & - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^1 \frac{F_\lambda^2(u)}{2F_\lambda^1(u) + 8\pi(\lambda + 2 \sin^2(\pi u))} du. \end{aligned}$$

Теперь оценим $F_\lambda^1(u)$ и $F_\lambda^2(u)$ при $u \leq 1/2\pi$ и $\lambda < 1$. Поскольку $\cos x$ убывает и $\pi x/2 \leq \sin x \leq x$ при $0 \leq x \leq \pi/2$, имеем

$$\begin{aligned} F_\lambda^1(u) & = \int_0^1 \frac{\delta^2(u, v)}{\lambda + \gamma(u, v)} dv = \int_0^1 \frac{16a_1^2 \sin^2(\pi u) \cos^2(\pi v) dv}{\lambda + 4 \sin^2 \frac{\pi u}{2} \cos^2 \frac{\pi v}{2} + 4 \sin^2 \frac{\pi v}{2} \cos^2 \frac{\pi u}{2}} \geq \\ & \geq \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{16a_1^2 \sin^2(\pi u) \cos^2(\pi v) dv}{\lambda + 4 \sin^2 \frac{\pi u}{2} \cos^2 \frac{\pi v}{2} + 4 \sin^2 \frac{\pi v}{2} \cos^2 \frac{\pi u}{2}} \geq \frac{8a_1^2 u^2}{\lambda + \pi^2 u^2 + \pi^2/16}. \end{aligned}$$

Также мы имеем

$$F_\lambda^1(u) \leq \int_0^1 \frac{16a_1^2(\pi u)^2 dv}{\lambda + 4 \sin^2 \frac{\pi u}{2} \cos^2 \frac{\pi v}{2} + 4 \sin^2 \frac{\pi v}{2} \cos^2 \frac{\pi u}{2}} \leq \frac{16}{\lambda} a_1^2 u^2 \pi^2.$$

Для $F_\lambda^2(u)$ получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} F_\lambda^2(u) & = \int_0^1 \frac{8a_1 \sin(\pi u) \cos(\pi v) dv}{\lambda + 4 \sin^2 \frac{\pi u}{2} \cos^2 \frac{\pi v}{2} + 4 \sin^2 \frac{\pi v}{2} \cos^2 \frac{\pi u}{2}} \leq \\ & \leq 4 \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{8a_1 \sin(\pi u) \cos(\pi v) dv}{\lambda + 4 \sin^2 \frac{\pi u}{2} \cos^2 \frac{\pi v}{2} + 4 \sin^2 \frac{\pi v}{2} \cos^2 \frac{\pi u}{2}} \leq C \frac{u}{\lambda + 2u^2} \end{aligned}$$

для некоторой положительной постоянной C . Подставив оценки F_λ^1 и F_λ^2 в предыдущее выражение, после элементарных вычислений получаем, что норма $\|\eta(0) - \rho\|_{-1,\lambda}^2$ ограничена величиной $O(\lambda^{-1/2})$.

Благодарности. Работа частично поддержана Natural Science Foundation of China (грант № 10531070).

Список литературы

- [1] C. Kipnis, S. R. S. Varadhan, *Comm. Math. Phys.*, **104**:1 (1986), 1–19.
- [2] S. Sethuraman, *Ann. Probab.*, **28**:1 (2000), 277–302.
- [3] C. Landim, S. Olla, S. R. S. Varadhan, *Bull. Braz. Math. Soc.*, **31**:3 (2000), 241–275.
- [4] T. Seppäläinen, S. Sethuraman, *Ann. Probab.*, **31**:1 (2003), 148–169.
- [5] S. Sethuraman, S. R. S. Varadhan, H. T. Yau, *Comm. Pure. Appl. Math.*, **53**:8 (2000), 972–1006.
- [6] S. R. S. Varadhan, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, **31**:1 (1995), 273–285.
- [7] E. Saada, *Ann. Probab.*, **15**:1 (1987), 375–381.
- [8] F. Rezakhanlou, *Comm. Math. Phys.*, **165**:1 (1994), 1–32.
- [9] T. M. Liggett, *Stochastic Interacting Systems: Contact, Voter and Exclusion Processes*, Grundlehren Math. Wiss., **324**, Springer, New York, 1999.
- [10] C. Landim, J. Quastel, M. Salmhofer et al., *Comm. Math. Phys.*, **244**:3 (2004), 455–481.
- [11] C. Kipnis, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, **23**:1 (1987), 21–35.
- [12] C. Bernardin, *Ann. Probab.*, **32**:1B (2004), 855–879.
- [13] S. Sethuraman, *Ann. Probab.*, **31**:1 (2003), 35–62.
- [14] C. Landim, H. T. Yau, *Probab. Theory Related Fields*, **108**:3 (1997), 321–356.

Поступила в редакцию 14.05.2007