Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Зотов, А. М. Левин, М. А. Ольшанецкий,
Ю. Б. Черняков, Квадратичные алгебры, связанные
с эллиптическими кривыми, *ТМФ*, 2008, том 156, но-
мер 2, 163–183

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6238>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 12:42:30

© 2008 г.

А. В. Зотов^{*,‡}, А. М. Левин^{†,‡},
М. А. Ольшанецкий^{*}, Ю. Б. Черняков^{*}

КВАДРАТИЧНЫЕ АЛГЕБРЫ, СВЯЗАННЫЕ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ КРИВЫМИ

Построены квадратичные конечномерные пуассоновы алгебры, соответствующие векторному расслоению ранга N и степени один над эллиптической кривой с n отмеченными точками, и их квантовая версия. Алгебры параметризуются модулями кривых. При $N = 2$ и $n = 1$ они совпадают с алгебрами Складина. Доказано, что пуассонова структура совместна со структурой Ли–Пуассона, определенной на прямой сумме n копий $sl(N)$. Происхождение алгебр основано на пуассоновой редукции канонических скобок на аффинном пространстве над кокасательным расслоением к группам автоморфизмов векторных расслоений.

Ключевые слова: пуассонова структура, интегрируемые системы.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе построены квадратичные пуассоновы алгебры (классические алгебры Складина–Фейгина–Одесского), основанные на перестановочных соотношениях с эллиптической $sl(N, \mathbb{C})$ r -матрицей Белавина–Дринфельда [1], и их квантовая версия, соответствующая вертексным эллиптическим матрицам [2]. Эти алгебры параметризованы модулями пространства комплексных структур эллиптических кривых с n отмеченными точками, а в квантовом случае – постоянной Планка, соответствующей кривой. При $N = 2$ и $n = 1$ мы приходим к алгебре Складина [3]. Построенные алгебры являются частным случаем общей конструкции [4], но в отличие от общего случая они конечнопорожденные. Мы описываем явным образом скобки Пуассона между генераторами и соответствующие квадратичные соотношения в квантовом случае в терминах квазипериодических функций на пространстве модулей. С одной стороны, в классическом случае пуассоновы алгебры имеют вид квадратичных алгебр на прямом произведении n копий $GL(N, \mathbb{C})$ с нетривиальным смешиванием компонент. С другой стороны, существует стандартная линейная

^{*}Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: chernyakov@itep.ru, olshanet@itep.ru

[†]Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, Москва, Россия.
E-mail: alevin@wave.sio.rssi.ru

[‡]Max Planck Institute, Bonn, Germany. E-mail: zotov@itep.ru

структура Ли–Пуассона на прямой сумме n копий $GL(N, \mathbb{C})$ -значных групп Ли. Мы доказываем совместность этих двух структур.

Классические алгебры определяют симметрии эллиптических обобщений систем Шлезингера и Гарнье [5], [6].

В разделе 2 выводится с помощью пуассоновой редукции классическая вертексная r -матрица и $GL(N, \mathbb{C})$ -значная матрица Лакса с n простыми полюсами из канонических скобок на некотором обобщении кокасательного расслоения двухпетлевой группы $GL(N, \mathbb{C})$. В разделе 3 мы получаем точный вид скобок и доказываем, что они совместны со скобками Ли–Пуассона. Раздел 4 посвящен квантовому случаю.

2. КЛАССИЧЕСКИЕ КОММУТАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДВУХПЕТЛЕВОЙ ГРУППЫ $GL(N, \mathbb{C})$

2.1. Расслоения степени один над эллиптическими кривыми. Пусть $\Sigma_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ – эллиптическая кривая с модулярным параметром τ , $\text{Im } \tau > 0$. Рассмотрим векторное расслоение E_N ранга N над Σ_τ . Оно описывается своими сечениями $s = (s_1(z, \bar{z}), \dots, s_N(z, \bar{z}))$ с монодромиями

$$s^T(z+1, \bar{z}+1) = Qs^T(z, \bar{z}), \quad s^T(z+\tau, \bar{z}+\bar{\tau}) = \tilde{\Lambda}s^T(z, \bar{z}),$$

где

$$Q = \text{diag}(1, \mathbf{e}_N, \dots, \mathbf{e}_N^{N-1}), \quad \mathbf{e}_N = e^{2\pi i/N}, \quad \tilde{\Lambda} = \mathbf{e}_N^{-(z+\tau/2)} \Lambda, \quad \Lambda = (E_{j,j+1}),$$

где $E_{j,j+1}$ – матрица с единицей на $(j, j+1)$ -ом месте. Поскольку $\det Q = \pm 1$ и $\det \tilde{\Lambda} = \pm \mathbf{e}_1^{-(z+\tau/2)}$, детерминанты матриц сдвига имеют те же квазипериоды, что и тета-функции Якоби. Тета-функции имеют простые полюсы в фундаментальном параллелограмме периодов Σ_τ . Таким образом, векторное расслоение E_N имеет степень один.

Выберем голоморфное сечение $\bar{\partial}s = 0$ в виде

$$s(z) = \left(\theta \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \\ 0 \end{bmatrix} (z; N\tau), \dots, \theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (z; N\tau) \right).$$

Зададим преобразования $s^T \rightarrow f(z, \bar{z})s^T$ гладкими отображениями

$$f: \Sigma_\tau \rightarrow GL(N, \mathbb{C}), \quad f \in \Omega_{C^\infty}^{(0,0)}(\Sigma_\tau, GL(N, \mathbb{C})),$$

с монодромиями

$$f(z+1, \bar{z}+1) = Q^{-1}f(z, \bar{z})Q, \quad f(z+\tau, \bar{z}+\bar{\tau}) = \tilde{\Lambda}^{-1}f(z, \bar{z})\tilde{\Lambda}.$$

Эти преобразования сохраняют степень E_N и поэтому порождают калибровочную группу $\mathcal{G} = \{f(z, \bar{z})\}$ расслоения E_N .

В общем случае операторы

$$d_{\bar{A}} = \bar{\partial} + \bar{A}: \Omega^{(0,0)}(\Sigma_\tau, E_N) \rightarrow \Omega^{(0,1)}(\Sigma_\tau, E_N)$$

определяют комплексную структуру E_N . Сечение голоморфное, если $d_{\bar{A}}(s^T) = 0$. Здесь мы предполагаем, что оператор $\bar{A}$ имеет те же монодромии, что и сечения расслоения E_N :

$$\bar{A}(z+1, \bar{z}+1) = Q^{-1}\bar{A}(z, \bar{z})Q, \quad \bar{A}(z+\tau, \bar{z}+\bar{\tau}) = \tilde{\Lambda}^{-1}\bar{A}(z, \bar{z})\tilde{\Lambda}. \quad (2.1)$$

Две комплексные структуры, определенные связностями $\bar{A}$ и $\bar{A}^f$, называются эквивалентными, если они относятся к калибровочному преобразованию

$$\bar{A}^f = f^{-1}\bar{A}f + f^{-1}\bar{\partial}f, \quad f \in \mathcal{G}. \quad (2.2)$$

Факторпространство порожденных связностей $\mathcal{A} = \{\bar{A}\}$ по действию $\mathcal{G}$ является пространством модулей голоморфных расслоений $\text{Bun}(E_N) = \mathcal{A}/\mathcal{G}$.

Рассмотрим двухпетлевую группу $LL(GL(N, \mathbb{C}))$, представленную пространством сечений $\{g(z, \bar{z})\} = \Omega_{C^\infty}^{(0,0)}(\Sigma_\tau, GL(N, \mathbb{C}))$ с монодромиями

$$g(z+1, \bar{z}+1) = Q^{-1}g(z, \bar{z})Q, \quad g(z+\tau, \bar{z}+\bar{\tau}) = \tilde{\Lambda}^{-1}g(z, \bar{z})\tilde{\Lambda}. \quad (2.3)$$

Двухпетлевая группа $LL(GL(N, \mathbb{C}))$ с этими условиями квазипериодичности является группой автоморфизмов $\text{Aut } E_N$ векторного расслоения E_N степени один.

2.2. Пуассонова структура на $\mathcal{R}$. На пространстве

$$\mathcal{R} = \mathcal{A} \times \Omega_{C^\infty}^{(0,0)}(\Sigma_\tau, GL(N, \mathbb{C})) = \{(\bar{\partial} + \bar{A}, g)\}$$

имеется симплектическая форма

$$\omega = \int_{\Sigma_\tau} K \langle d(\bar{A}g^{-1}) \wedge dg \rangle + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_\tau} K \langle g^{-1}dg \wedge \bar{\partial}(g^{-1}dg) \rangle, \quad (2.4)$$

где $\langle \cdot \rangle$ – след в векторном представлении, K – сечение канонического расслоения над Σ_τ , $K \in \Omega^{(1,0)}(\Sigma_\tau)$; мы выбираем $K = dz$. Пространство $\mathcal{R}$ является аффинным пространством над кокасательным расслоением к двухпетлевой группе $T^*(LL(GL(N, \mathbb{C})))$.

Преобразования (2.2) вместе с преобразованием

$$g \rightarrow f^{-1}gf \quad (2.5)$$

являются каноническими относительно симплектической формы (2.4). Гамильтоновы векторные поля V_ϵ , $\epsilon \in \text{Lie}(\mathcal{G})$, на $\mathcal{R}$ ($V_\epsilon \omega = d\mu^*$) порождены гамильтонианом

$$\mu^*(\epsilon; \bar{A}, g) = \int_{\Sigma_\tau} K \langle \epsilon(g\bar{A}g^{-1} - \bar{\partial}gg^{-1} - \bar{A}) \rangle. \quad (2.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $\Phi \in \Omega_{C^\infty}^{(1,0)}(\Sigma_\tau, \text{End } E_N)$ – поле Хиггса и $g = e^{\hbar K^{-1}\Phi}$, где $\hbar \in \mathbb{C}$. В пределе $\hbar \rightarrow 0$

$$g \sim K^{-1}(\text{Id} + \hbar\Phi + \dots). \quad (2.7)$$

Форма (2.4) в первом порядке становится канонической формой на расслоении Хиггса $\{(d_{\bar{A}}, \Phi)\}$. Симметрии определяют гамильтониан

$$\mu^*(\epsilon; \bar{A}, \Phi) = \int_{\Sigma_\tau} \langle \epsilon(\bar{\partial}\Phi + [\bar{A}, \Phi]) \rangle.$$

Таким образом, $\mathcal{R}$ есть деформация расслоения Хиггса.

Обращение формы (2.4) определяет пуассонову структуру на $\mathcal{R}$. В координатных терминах в базисе (Б.1) $\bar{A} = \sum_{\alpha \in \tilde{\mathbb{Z}}_N^{(2)}} \bar{A}_\alpha T_\alpha$, $g = \sum_{a \in \mathbb{Z}_N^{(2)}} g_a T_a$, и обращение формы (2.4) принимает вид

$$K\{\bar{A}_\alpha(z, \bar{z}), \bar{A}_\beta(w, \bar{w})\} = C_{\alpha+\beta} \bar{A}_{\alpha+\beta} \delta(z-w, \bar{z}-\bar{w}) + \bar{\partial} \delta(z-w, \bar{z}-\bar{w}) \delta_{\alpha,-\beta}, \quad (2.8)$$

$$K\{g_a(z, \bar{z}), \bar{A}_\beta(w, \bar{w})\} = \mathbf{e}_N^{(a \times \beta)} g_{a+\beta}(z, \bar{z}) \delta(z-w, \bar{z}-\bar{w}), \quad (2.9)$$

$$\{g_a(z, \bar{z}), g_b(w, \bar{w})\} = 0. \quad (2.10)$$

Скобки определяют пуассонову алгебру $\mathcal{O}(\mathcal{R})$ с группой симметрии $\mathcal{G}$.

Определим пуассонову подалгебру $\mathbf{P}_{\Sigma_\tau}$ пуассоновой алгебры $\mathcal{O}(\mathcal{R})$. Она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) связность $\bar{A}$ принимает значения в подалгебре $sl(N, \mathbb{C})$, g принимает значение в $GL(N, \mathbb{C})$;
- 2) $\mathbf{P}_{\Sigma_\tau}$ генерируется голоморфными функционалами над $\mathcal{R}$ с пробной функцией, исчезающей в точке $z = 0$.

Подалгебра $\mathbf{P}_{\Sigma_\tau}$ имеет центр $\mathcal{Z}$, порожденный $\det g(z, \bar{z})$. Группа симметрий $\mathcal{G}^s \subset \mathcal{G}$ подалгебры $\mathbf{P}_{\Sigma_\tau}$ порождена гладкими отображениями $f: \Sigma_\tau \rightarrow SL(N, \mathbb{C})$.

2.3. Пуассонова редукция. Наша цель – вычислить пуассонову структуру, редуцированную по действию $\mathcal{G}^s$.

Стандартная пуассонова редукция $\mathbf{P}_{\Sigma_\tau}^{\text{red}}$ подалгебры $\mathbf{P}_{\Sigma_\tau}$ описывается следующим образом. Пусть $\mathbf{P}_{\Sigma_\tau}^{\mathcal{G}^s}$ – инвариантная пуассонова подалгебра, $I^{\mathcal{G}^s} = \{\mu^*(\epsilon)F(\bar{A}, g) \mid F(\bar{A}, g) \in \mathbf{P}_{\Sigma_\tau}^{\mathcal{G}^s}\}$ является идеалом в $\mathbf{P}_{\Sigma_\tau}^{\mathcal{G}^s}$, порожденным функционалом $\mu^*(\epsilon)$ (2.6), где $\epsilon \in \text{Lie}(\mathcal{G}^s)$. Редуцированная пуассонова алгебра $\mathbf{P}_{\Sigma_\tau}^{\text{red}}$ есть фактор-алгебра:

$$\mathbf{P}_{\Sigma_\tau}^{\text{red}} = \mathbf{P}_{\Sigma_\tau}^{\mathcal{G}^s} / I^{\mathcal{G}^s} := \mathbf{P}_{\Sigma_\tau} / \mathcal{G}^s. \quad (2.11)$$

В нашей конструкции используется другой идеал $\mathbf{P}_{\Sigma_\tau}^{\mathcal{G}^s}$, который будет определен ниже.

Прежде всего, вычислим скобки в инвариантной подалгебре $\mathbf{P}_{\Sigma_\tau}^{\mathcal{G}^s}$. Вследствие условия на монодромию (2.1), порожденное поле $\bar{A}$ калибровочно-эквивалентно тривиальному полю $f^{-1}\bar{A}f + f^{-1}\bar{\partial}f = 0$, поэтому

$$\bar{A} = -\bar{\partial}f[\bar{A}]f^{-1}[\bar{A}]. \quad (2.12)$$

Отметим, что монодромии калибровочных матриц (2.3) “предохраняют” от нетривиальных остаточных симметрий. Пусть $f[\bar{A}](z, \bar{z})$ – решение уравнения (2.12). Рассмотрим преобразование g под действием решения (2.12):

$$L[\bar{A}, g](z, \bar{z}) = f[\bar{A}](z, \bar{z})g(z, \bar{z})f^{-1}[\bar{A}](z, \bar{z}). \quad (2.13)$$

Калибровочно-инвариантная подалгебра $\mathbf{P}_{\Sigma_\tau}^{\mathcal{G}^s}$ порождена матрицами L :

$$\mathbf{P}_{\Sigma_\tau}^{\mathcal{G}^s} = \{\Psi(\bar{A}, g) = \Psi(0, L)\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Скобки на $\mathbf{P}_{\Sigma_\tau}^{\mathcal{G}^s}$ принимают форму классических коммутационных соотношений

$$\{L_1(z, \bar{z}), L_2(w, \bar{w})\} = [r(z-w), L_1(z, \bar{z}) \otimes L_2(w, \bar{w})], \quad (2.14)$$

где $L_1(z, \bar{z}) = L(z, \bar{z}) \otimes \text{Id}$, $L_2(w, \bar{w}) = \text{Id} \otimes L(w, \bar{w})$, $r(z, w)$ есть классическая эллиптическая r -матрица Белафина–Дринфельда [1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычисление скобок в $\mathbf{P}_{\Sigma_\tau}^{\mathcal{G}^s}$ сводится к вычислениям скобок Пуассона на поверхности уровня $\bar{A} = 0$, $f = \text{Id}$ между матричными элементами (2.13) с помощью (2.8)–(2.10). Для этого нам нужны только выражения

$$r_{\alpha, \beta}(z, \bar{z}; z', \bar{z}') = \frac{\delta f_\alpha(z, \bar{z})}{\delta \bar{A}_\beta(z', \bar{z}')} \Big|_{\bar{A}=0}. \quad (2.15)$$

Прямые вычисления скобок $\{L, L\}$, представленные в [7], сводятся к искомой r -матричной форме (2.14).

Найдем r -матрицу. Вследствие уравнения (2.12) r есть функция Грина оператора $\bar{\partial}$,

$$\bar{\partial} r_{\alpha, \beta}(z, \bar{z}; z', \bar{z}') = \delta_{\alpha+\beta, 0} \delta(z - z', \bar{z} - \bar{z}'), \quad (2.16)$$

имеющая следующие квазипериоды:

$$\begin{aligned} r(z+1, \bar{z}+1) &= (Q^{-1} \otimes \text{Id}) r(z, \bar{z}) (Q \otimes \text{Id}), \\ r(z+\tau, \bar{z}+\bar{\tau}) &= (\Lambda^{-1} \otimes \text{Id}) r(z, \bar{z}) (\Lambda \otimes \text{Id}). \end{aligned}$$

Из (2.16) следует, что $r_{\alpha, \beta}$ – мероморфная и сингулярная функция на диагонали,

$$\lim_{z' \rightarrow z} r_{\alpha, \beta}(z, z') = \frac{1}{z - z'} T_\alpha \otimes T_\beta \delta_{\alpha+\beta, 0}. \quad (2.17)$$

Учитывая (A.5), (B.5), (B.7), получаем

$$r(z, w) = r(z - w) = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}(z - w) T_{\alpha} \otimes T_{-\alpha}. \quad (2.18)$$

Это и есть классическая r -матрица Белафина–Дринфельда [1]. Эта матрица удовлетворяет классическому уравнению Янга–Бакстера, которое обеспечивает выполнение тождества Якоби для скобок (2.14).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если имеет место (2.7), то только нетривиальные скобки (2.9) допускают форму

$$\{\Phi_{\alpha}(z, \bar{z}), \bar{A}_{\beta}(w, \bar{w})\} = \delta_{\alpha, -\beta} \delta(z - w, \bar{z} - \bar{w}),$$

а (2.14) заменяется на линейные скобки

$$\{L_1(z, \bar{z}), L_2(w, \bar{w})\} = [r(z - w), L(z, \bar{z}) \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes L_2(w, \bar{w})].$$

Зафиксируем дивизор D_n в несовпадающих точках на Σ_τ :

$$D_n = (x_1, \dots, x_n), \quad x_j \neq x_k, \quad x_j \in \Sigma_\tau.$$

Определим подалгебру $\text{Lie}(D_n)(\mathcal{G}^s) \subset \text{Lie}(\mathcal{G}^s)$:

$$\text{Lie}(D_n)(\mathcal{G}^s) = \{\varepsilon \in \text{Lie}(\mathcal{G}^s) \mid \varepsilon(x_j, \bar{x}_j) = 0, x_j \in D_n\}.$$

Рассмотрим идеал $I(D_n)$, порожденный функционалом

$$\mu_{D_n}^*(\varepsilon; \bar{A}, g) = \mu_{D_n}^*(\varepsilon; L) = \int_{\Sigma_\tau} \langle \varepsilon \bar{\partial} L(z, \bar{z}) \rangle, \quad (2.19)$$

где ε принадлежит подалгебре $\text{Lie}(\mathcal{G}^s(D_n))$. Поскольку функционал $\mu_{D_n}^*$ зависит только от L , то $I(D_n) \subset \mathbf{P}_{\Sigma_\tau}^{\mathcal{G}^s}$.

Рассмотрим факторизованную пуассонову алгебру $\mathbf{P}_{\Sigma_\tau}^{\mathcal{G}^s}/I(D_n)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Редуцированная пуассонова алгебра*

$$\mathbf{P}_{\Sigma_\tau, D_n}^{\text{red}} = \mathbf{P}_{\Sigma_\tau}^{\mathcal{G}^s}/I(D_n) \quad (2.20)$$

является финитно порожденной, $\dim \mathbf{P}_{\Sigma_\tau, D_n}^{\text{red}} = nN^2$. Матрица $L(z)$ в классических коммутационных соотношениях (матрица Лакса) принимает вид

$$L = S_0 T_0 + \sum_{j=1}^n (S_0^j E_1(z - x_j) T_0 + \tilde{L}_j), \quad \tilde{L}_j = \sum_{\alpha} S_{\alpha}^j \varphi_{\alpha}(z - x_j) T_{\alpha}, \quad (2.21)$$

где

$$\sum_{j=1}^n S_0^j = 0, \quad (2.22)$$

функции $\varphi_{\alpha}(z - x_j)$ определены в (Б.5), $E_1(z - x_j)$ есть первая функция в базисе Эйзенштейна (А.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проанализируем решения уравнения

$$\mu_{D_n}^*(\varepsilon; L) = \int_{\Sigma_\tau} \langle \varepsilon \bar{\partial} L(z, \bar{z}) \rangle = 0. \quad (2.23)$$

Решения являются мероморфными квазипериодическими отображениями, имеющими простые полюсы в отмеченных точках. Пусть $L(z) = \sum_a L_a(z) T_a$ есть разложение L по базису T_a группы $GL(N, \mathbb{C})$. Из (2.3) следует, что

$$L_a(z + 1) = \mathbf{e}_N^{a_2} L_a(z), \quad L_a(z + \tau) = \mathbf{e}_N^{-a_1} L_a(z), \quad a = (a_1, a_2).$$

Функции $\varphi_a(z - x_j)$ (Б.5) имеют эти монодромии (Б.7) и простые полюсы в x_j . Они определяют n -мерный базис в пространстве квазипериодических функций (Б.13) с полюсами в x_j . Если $a = (0, 0)$, то $L_0(z)$ является двоякопериодической функцией с простыми полюсами в x_j . Базисом в этом пространстве являются единица и функции Эйзенштейна $E_1(z - x_j)$, у которых сумма вычетов равна нулю. Таким образом, пространство имеет размерность n и выполняются соотношения (2.21) и (2.22).

Как мы упоминали выше, $\det g$ порождают функционалы Казимира в $\mathbf{P}_{\Sigma_\tau}^{\text{red}}$. Вследствие этого скобки на $\mathbf{P}_{\Sigma_\tau, D_n}^{\text{red}}$ вырождены. Функции $\det L(z)$ являются производящими функциями для элементов Казимира $C^\mu(j)$. Поскольку $\det L(z)$ является двоякопериодической функцией, он может быть разложен по базису эллиптических функций (А.3):

$$\det L(z) = C^0 + \sum_j^n C^1(j) E_1(z - x_j) + C^2(j) E_2(z - x_j) + \cdots + C^N(j) E_N(z - x_j). \quad (2.24)$$

Вследствие условия

$$\sum_{j=1}^n C^1(j) = 0 \quad (2.25)$$

количество независимых элементов Казимира равно Nn . Симплектический лист общего положения

$$\mathcal{R}_{n,N}^2 = \mathbf{P}_{\Sigma_\tau, D_n}^{\text{red}} / \{(C^\mu(j) = C(j)_{(0)}^\mu), \mu = 1, \dots, N, j = 1, \dots, N\}$$

имеет размерность

$$\dim(\mathcal{R}_{n,N}^2) = nN(N-1). \quad (2.26)$$

Заметим, что эта величина совпадает с суммой размерностей n коприсоединенных орбит $GL(N, \mathbb{C})$ общего положения.

3. СТРУКТУРА РЕДУЦИРОВАННОГО ПУАССОНОВА ПРОСТРАНСТВА

3.1. Точный вид квадратичных скобок. Предложение 2 дает редуцированную пуассонову алгебру $\mathbf{P}_{\Sigma_\tau, D_n}^{\text{red}}$ с генераторами

$$\left\{ S_0, (S_0^j, \mathbf{S}^j = \{S_\alpha^j\}, j = 1, \dots, n) \left| \sum_{j=1}^n S_0^j = 0 \right. \right\}. \quad (3.1)$$

Скобки между генераторами вычислены в [6].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Скобки Пуассона на пространстве $\mathbb{C}^{nN^2}$ в терминах генераторов (3.1) принимают вид¹⁾

$$\{S_0, S_0^j\}_2 = \{S_0^j, S_0^k\}_2 = \{S_\alpha^j, S_\alpha^k\}_2 = 0, \quad (3.2)$$

$$\{S_0, S_\alpha^k\}_2 = \sum_{\gamma \neq \alpha} \mathbf{C}(\alpha, \gamma) \left(S_{\alpha-\gamma}^k S_\gamma^k E_2(\check{\gamma}) - \sum_{j \neq k} S_{-\gamma}^j S_{\alpha+\gamma}^k f_\gamma(x_k - x_j) \right), \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \{S_\alpha^k, S_\beta^k\}_2 = & \mathbf{C}(\alpha, \beta) S_0 S_{\alpha+\beta}^k + \sum_{\gamma \neq \alpha, -\beta} \mathbf{C}(\gamma, \alpha - \beta) S_{\alpha-\gamma}^k S_{\beta+\gamma}^k \mathbf{f}_{\alpha, \beta, \gamma} + \\ & + \mathbf{C}(\alpha, \beta) S_0^k S_{\alpha+\beta}^k (E_1(\check{\alpha} + \check{\beta}) - E_1(\check{\alpha}) - E_1(\check{\beta})) - \\ & - \mathbf{C}(\alpha, \beta) \sum_{j \neq k} [S_0^k S_{\alpha+\beta}^j \varphi_{\alpha+\beta}(x_k - x_j) - S_0^j S_{\alpha+\beta}^k E_1(x_k - x_j)] - \\ & - 2 \sum_{j \neq k} \mathbf{C}(\gamma, \alpha - \beta) S_{\alpha-\gamma}^k S_{\beta+\gamma}^k \varphi_{\beta+\gamma}(x_k - x_j), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где величины $\mathbf{f}_{\alpha, \beta, \gamma}$, $E_2(\check{\alpha})$, $E_1(\check{\alpha})$ определены в (Б.12) и (Б.4). При $j \neq k$

$$\begin{aligned} \{S_\alpha^j, S_\beta^k\}_2 = & \sum_{\gamma \neq \alpha, -\beta} \mathbf{C}(\gamma, \alpha - \beta) S_{\alpha-\gamma}^j S_{\beta+\gamma}^k \varphi_\gamma(x_j - x_k) - \\ & - \mathbf{C}(\alpha, \beta) (S_0^j S_{\alpha+\beta}^k \varphi_\alpha(x_j - x_k) - S_0^k S_{\alpha+\beta}^j \varphi_{-\beta}(x_k - x_j)), \end{aligned} \quad (3.5)$$

¹⁾ Индекс 2 у фигурных скобок $\{\cdot, \cdot\}_2$ означает квадратичные скобки.

$$\{S_0^j, S_\beta^k\}_2 = \begin{cases} 2 \sum_\gamma \mathbf{C}(\gamma, -\beta) S_{-\gamma}^j S_{\beta+\gamma}^k \varphi_\gamma(x_k - x_j), & j \neq k, \\ -2 \sum_{m \neq k} \sum_\gamma \mathbf{C}(\gamma, -\beta) S_{-\gamma}^k S_{\beta+\gamma}^m \varphi_{\beta+\gamma}(x_k - x_m), & j = k. \end{cases} \quad (3.6)$$

Эта алгебра является точной специальной формой общей конструкции квадратичных пуассоновых алгебр [4]. При $n = 1$ эта алгебра была вычислена в [8]; при $n = 1$ и $N = 2$ она является классической алгеброй Складина [3].

3.2. Твистованные расслоения. Нам понадобится эквивалентная форма пуассоновой алгебры на $\mathbb{C}^{nN^2}$. Рассмотрим твистованное расслоение $E'_N = \text{Aut}(E_N) \otimes \mathcal{L}$, где $\mathcal{L}$ – тривиальное линейное расслоение над Σ_τ . Сечения E'_N являются сечениями E_N , умноженными на $\vartheta(z + \eta)/\vartheta(z)$, $\eta \in \Sigma_\tau$. Поэтому функции сдвигов E'_N имеют следующий вид:

$$\text{ad}(Q): z \rightarrow z + 1, \quad e^{-2\pi i \eta} \text{ad}(\tilde{\Lambda}): z \rightarrow z + \tau.$$

Из (Б.6), (Б.8) следует, что решением уравнения (2.23) с этими монодромиями и простыми полюсами дивизора $\tilde{D}_n = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ является

$$L_{\tilde{D}_n}^\eta = \sum_{j=1}^n \left[\tilde{S}_0^j \varphi_\eta(z - \tilde{x}_j) T_0 + \sum_\alpha \tilde{S}_\alpha^j \varphi_{\alpha, \eta}(z - \tilde{x}_j) T_\alpha \right], \quad (3.7)$$

где $\varphi_\eta = \varphi_{0, \eta}$. Соответствующая алгебра $\tilde{\mathbf{P}}_{\Sigma_\tau, \tilde{D}_n}^{\text{red}}$ определена, как и выше, классическими перестановочными соотношениями

$$\{L_{1, \tilde{D}_n}^\eta(z), L_{2, \tilde{D}_n}^\eta(w)\} = [r(z - w), L_{1, \tilde{D}_n}^\eta(z) \otimes L_{2, \tilde{D}_n}^\eta(w)] \quad (3.8)$$

с набором nN^2 генераторов:

$$\tilde{S}^j = \{\tilde{S}_a^j\}, \quad a = (a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_N^{(2)}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Скобки между генераторами могут быть получены из (3.8), как и раньше. Нам не потребуются точные соотношения, потому что мы сразу докажем эквивалентность этих двух алгебр. В разделе 4 рассмотрим только скобки, содержащие $\tilde{S}_0^k$ в правой части (ср. (3.4) и (3.5)),

$$\begin{aligned} \{\tilde{S}_\alpha^k, \tilde{S}_\beta^k\} &= \sum_{\gamma \neq \alpha, -\beta} \mathbf{C}(\gamma, \alpha - \beta) \tilde{S}_{\alpha-\gamma}^k \tilde{S}_{\beta+\gamma}^k \tilde{\mathbf{f}}_{\alpha, \beta, \gamma}^\eta + \\ &+ \mathbf{C}(\alpha, \beta) \tilde{S}_0^k \tilde{S}_{\alpha+\beta}^k (E_1(\check{\alpha} + \check{\beta} + \eta) - E_1(\check{\alpha}) - E_1(\check{\beta}) - E_1(\eta)) - \\ &- \mathbf{C}(\alpha, \beta) \sum_{j \neq k} [\tilde{S}_0^k \tilde{S}_{\alpha+\beta}^j \varphi_{\alpha+\beta, \eta}(x_k - x_j) - \tilde{S}_0^j \tilde{S}_{\alpha+\beta}^k \varphi_\eta(x_k - x_j)] - \\ &- 2 \sum_{j \neq k} \mathbf{C}(\gamma, \alpha - \beta) \tilde{S}_{\alpha-\gamma}^k \tilde{S}_{\beta+\gamma}^k \varphi_{\beta+\gamma, \eta}(x_k - x_j), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}_{\alpha, \beta, \gamma}^\eta &= E_1(\check{\gamma}) - E_1(\check{\alpha} - \check{\beta} - \check{\gamma}) + E_1(\check{\alpha} - \check{\gamma} + \eta) - E_1(\check{\beta} + \check{\gamma} + \eta), \\ \{\tilde{S}_\alpha^j, \tilde{S}_\beta^k\} &= \sum_{\gamma \neq \alpha, -\beta} \mathbf{C}(\gamma, \alpha - \beta) \tilde{S}_{\alpha-\gamma}^j \tilde{S}_{\beta+\gamma}^k \varphi_{\gamma, \eta}(x_j - x_k) - \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$- \mathbf{C}(\alpha, \beta)(\tilde{S}_0^j \tilde{S}_{\alpha+\beta}^k \varphi_{\alpha, \eta}(x_j - x_k) - \tilde{S}_0^k \tilde{S}_{\alpha+\beta}^j \varphi_{-\beta, \eta}(x_k - x_j)). \quad (3.11)$$

Докажем эквивалентность, положив $\tilde{x}_i = 0$ для некоторого i .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Зафиксируем два индекса $1 \leq i, k \leq n$, $i \neq k$. Определим $x_k = -\eta$ и $x_j = \tilde{x}_j$ при $j \neq k$. Тогда пуассоновы алгебры $\mathbf{P}_{\Sigma_\tau, D_n}^{\text{red}}$ и $\mathbf{P}_{\Sigma_\tau, \tilde{D}_n}^{\text{red}}$ изоморфны. Соответствующие канонические преобразования имеют вид*

$$\begin{aligned} S_0 &= \tilde{S}_0^i + \sum_{j \neq i} \frac{1}{\varphi_\eta(\tilde{x}_j)} (E_1(\tilde{x}_j) + E_1(\eta)) \tilde{S}_0^j, \\ S_0^k &= - \sum_{j \neq i} \frac{\tilde{S}_0^j}{\varphi_\eta(\tilde{x}_j)}, \quad S_\alpha^k = \frac{\tilde{S}_\alpha^i}{\varphi_\alpha(\eta)} + \sum_{j \neq i} \frac{\varphi_{-\alpha}(\tilde{x}_j) \tilde{S}_\alpha^j}{\varphi_\eta(\tilde{x}_j) \varphi_\alpha(\eta)}, \\ S_0^{j \neq k} &= \frac{\tilde{S}_0^j}{\varphi_\eta(\tilde{x}_j)}, \quad S_\alpha^{j \neq k} = \frac{\tilde{S}_\alpha^j}{\varphi_\eta(\tilde{x}_j)}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор Лакса $L_{\tilde{D}_n}^\eta$ (3.7) после деления на $\varphi_\eta(z)$ приобретает те же монодромии, что и матрица L (2.21). Рассмотрим вычеты и постоянные члены этих операторов. Имеем

$$\frac{L_{\tilde{D}_n}^\eta}{\varphi_\eta(z)} = \tilde{S}_0^i T_0 + \sum_{j \neq i} \left[\tilde{S}_0^j \frac{\varphi_\eta(z - \tilde{x}_j)}{\varphi_\eta(z)} T_0 + \sum_\alpha \left(\tilde{S}_\alpha^j \frac{\varphi_{\alpha, \eta}(z - \tilde{x}_j)}{\varphi_\eta(z)} + \tilde{S}_\alpha^i \frac{\varphi_{\alpha, \eta}(z)}{\varphi_\eta(z)} \right) T_\alpha \right]. \quad (3.13)$$

Применяя соотношения (Б.9), (Б.10) и (Б.11), мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{L_{\tilde{D}_n}^\eta}{\varphi_\eta(z)} &= \left(\tilde{S}_0^i + \sum_{j \neq i} \frac{1}{\varphi_\eta(\tilde{x}_j)} (E_1(\tilde{x}_j) + E_1(\eta)) \tilde{S}_0^j \right) T_0 - \\ &- E_1(z + \eta) \sum_{j \neq i} \frac{\tilde{S}_0^j}{\varphi_\eta(\tilde{x}_j)} \cdot T_0 + \sum_{j \neq i} E_1(z - \tilde{x}_j) \cdot \frac{\tilde{S}_0^j}{\varphi_\eta(\tilde{x}_j)} T_0 + \\ &+ \sum_{\alpha, j \neq i} \varphi_\alpha(z - \tilde{x}_j) \frac{\tilde{S}_\alpha^j}{\varphi_\eta(\tilde{x}_j)} \cdot T_\alpha + \\ &+ \sum_{\alpha, j \neq i} \varphi_\alpha(z + \eta) \cdot \left(\frac{\varphi_{-\alpha}(\tilde{x}_j) \tilde{S}_\alpha^j}{\varphi_\eta(\tilde{x}_j) \varphi_\alpha(\eta)} + \frac{\tilde{S}_\alpha^i}{\varphi_\alpha(\eta)} \right) T_\alpha. \end{aligned}$$

Заметим, что в этом случае возникает новый полюс в точке $x_b = -\eta$. Сравнивая с (2.21), мы приходим к уравнению (3.12).

3.3. Бигамильтонова структура. Введем в пространстве $\mathbb{C}^{nN^2}$ линейные скобки Ли–Пуассона. Для этого рассмотрим n копий $gl(N, \mathbb{C})$: $\mathfrak{g}^* = gl(N, \mathbb{C}) \oplus \dots \oplus gl(N, \mathbb{C})$ со скобками²⁾

$$\{S_\alpha^j, S_\beta^k\}_1 = C(\alpha, \beta) S_{\alpha+\beta}^j \delta^{jk}. \quad (3.14)$$

²⁾Индекс 1 у скобок $\{\cdot, \cdot\}_1$ означает линейные скобки.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Скобки Ли–Пуассона имеют r -матричную форму

$$\{\tilde{L}_1(z), \tilde{L}_2(w)\} = [r(z-w), \tilde{L}_1(z) + \tilde{L}_2(w)],$$

где r -матрица та же, что и для квадратичных скобок (2.14), $\tilde{L} = \sum_{j=1}^n \tilde{L}_j(z)$ (2.21).

Две пуассоновы структуры называются *совместными* (образуют *пуассонову пару*), если их линейные комбинации также являются пуассоновыми структурами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Линейные (3.14) и квадратичные (3.2)–(3.6) скобки Пуассона на пространстве $\mathbb{C}^{nN^2}$ совместны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем точку $x_k \in \tilde{D}_n$ и заменим $\tilde{S}_0^k$ на $\tilde{S}_0^k + \lambda$, где $\lambda \in \mathbb{C}$ – число. Поэтому $\tilde{S}_0^k + \lambda$ коммутирует относительно скобки Пуассона со всеми элементами квадратичной пуассоновой алгебры. Подставим эту новую переменную в (3.9) и (3.11). Замена переменных не нарушает тождества Якоби, и, таким образом, мы приходим к следующей пуассоновой структуре:

$$\{\tilde{S}, \tilde{S}\}_\lambda := \{\tilde{S}, \tilde{S}\}_2 + \lambda\{\tilde{S}, \tilde{S}\}_1.$$

Рассмотрим члены, относящиеся к линейным скобкам,

$$\begin{aligned} \{\tilde{S}_\alpha^k, \tilde{S}_\beta^k\}_1 &= F_1 \tilde{S}_{\alpha+\beta}^j + F_2 \tilde{S}_{\alpha+\beta}^k, & \{\tilde{S}_\alpha^k, \tilde{S}_\beta^j\}_1 &= G_2 \tilde{S}_{\alpha+\beta}^j, \\ \{\tilde{S}_\alpha^j, \tilde{S}_\beta^j\}_1 &= \tilde{G}_2 \tilde{S}_{\alpha+\beta}^j, & \{\tilde{S}_\alpha^j, \tilde{S}_\beta^j\}_1 &= H_2 \tilde{S}_{\alpha+\beta}^j, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где, с точностью до общего множителя $C(\alpha, \beta)$, коэффициенты имеют форму

$$\begin{aligned} F_1 &= \varphi_{\alpha+\beta, \eta}(x_{kj}), & F_2 &= -E_1(\check{\alpha}) - E_1(\check{\beta}) - E_1(\eta) + E_1(\check{\alpha} + \check{\beta} + \eta), \\ G_2 &= -\varphi_\alpha(x_{kj}), & \tilde{G}_2 &= -\varphi_\beta(x_{kj}), & H_2 &= \varphi_{0, -\eta}(x_{kj}), \end{aligned} \quad (3.16)$$

$x_{kj} = x_k - x_j$. Следующая лемма завершает доказательство предложения.

ЛЕММА. *Линейная пуассонова алгебра (3.15) эквивалентна прямой сумме алгебр Ли–Пуассона на $\bigoplus_{l=1}^n gl(N, \mathbb{C})$:*

$$\{t_\alpha^j, t_\beta^k\} = C(\alpha, \beta) t_{\alpha+\beta}^j \delta^{jk}. \quad (3.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим

$$\tilde{S}_\alpha^k = a_\alpha t_\alpha^k + b_\alpha t_\alpha^j, \quad \tilde{S}_\alpha^j = H_2 t_\alpha^j.$$

Скобки (3.15) эквивалентны (3.17) при

$$a_\alpha a_\beta = a_{\alpha+\beta} F_2, \quad b_\alpha = G_2, \quad b_\alpha b_\beta = F_1 H_2 + b_{\alpha+\beta} F_2. \quad (3.18)$$

Решим эти уравнения. Решение первого уравнения, которое может быть найдено из (A.10), имеет следующий вид: $a_\alpha = -\varphi_\alpha(\eta)$. Далее докажем, что $b_\alpha = G_2 = -\varphi_\alpha(x_{kj})$ удовлетворяет последнему соотношению в (3.18). При $b_\alpha = -\varphi_\alpha(x_{kj})$ оно будет иметь следующий вид:

$$\varphi_\alpha(x_{kj}) \varphi_\beta(x_{kj}) = \varphi_{\alpha+\beta, \eta}(x_{kj}) \varphi_{0, -\eta}(x_{kj}) +$$

$$+ \varphi_{\alpha+\beta}(x_{kj}) (E_1(\check{\alpha}) + E_1(\check{\beta}) + E_1(\eta) - E_1(\check{\alpha} + \check{\beta} + \eta)).$$

Из соотношения (A.9) следует, что

$$\varphi_{\alpha+\beta,\eta}(x_{kj})\varphi_{0,-\eta}(x_{kj}) = \varphi_{\alpha+\beta}(x_{kj}) (E_1(\check{\alpha} + \check{\beta} + \eta) + E_1(-\eta) + E_1(x_{kj}) - E_1(\check{\alpha} + \check{\beta} + x_{kj})),$$

поэтому последнее соотношение в (3.18) является тождеством. Таким образом, мы приходим к (3.17).

4. КВАНТОВАЯ АЛГЕБРА

4.1. Общий случай. В этом разделе мы рассматриваем квантование квадратичной пуассоновой алгебры для случая $n > 1$. Пусть квантовая R -матрица имеет следующий вид:

$$R(z, w) = \sum_{a \in \mathbb{Z}_N^{(2)}} \varphi_a^{\hbar}(z - w) T_a \otimes T_{-a}, \quad (4.1)$$

где $\varphi_a^{\hbar}(z) \equiv \varphi_{\hbar,a}(z)$. Заметим, что в отличие от классической r -матрицы здесь появляется добавочный член $\varphi_0^{\hbar}(z - w)\sigma_0 \otimes \sigma_0$. Квантовая R -матрица удовлетворяет квантовому уравнению Янга–Бакстера

$$R_{12}(z - w)R_{13}(z)R_{23}(w) = R_{23}(w)R_{13}(z)R_{12}(z - w). \quad (4.2)$$

С помощью квантового уравнения Янга–Бакстера ассоциативная алгебра определяется следующим образом:

$$R(z - w)L_1^{\hbar}(z)L_2^{\hbar}(w) = L_2^{\hbar}(w)L_1^{\hbar}(z)R(z - w). \quad (4.3)$$

Оператор Лакса в (4.3) имеет следующие монодромии относительно $\hbar$:

$$L^{\hbar+\tau}(z) = \mathbf{e}_N(-z)L^{\hbar}(z), \quad L^{\hbar+1}(z) = L^{\hbar}(z). \quad (4.4)$$

Поэтому мы должны предположить, что переменные S зависят от $\hbar$ и x_j . Новые переменные и оператор Лакса в (4.3) будут иметь вид

$$S_{\text{new}}^j = \widehat{S}_0^j \varphi_0^{\hbar}(x_j),$$

$$\begin{aligned} L^{\hbar}(z) &= \sum_{j=1}^n \left(\widehat{S}_0^j \varphi_0^{\hbar}(x_j) \varphi_0^{\hbar}(z - x_j) T_0 + \sum_{\alpha} \widehat{S}_{\alpha}^j \varphi_{\alpha}^{\hbar}(x_j) \varphi_{\alpha}^{\hbar}(z - x_j) T_{\alpha} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{a \in \mathbb{Z}_N^{(2)}} \widehat{S}_a^j \varphi_a^{\hbar}(x_j) \varphi_a^{\hbar}(z - x_j) T_a. \end{aligned} \quad (4.5)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Соотношения в ассоциативной алгебре принимают следующий вид:

$$\sum_c f^{\hbar}(a, b, c) \cdot \widehat{S}_{b+c}^j \widehat{S}_{a-c}^j \varphi_{b+c}^{\hbar}(x_j) \varphi_{a-c}^{\hbar}(x_j) \mathbf{e}_N \left(\frac{c \times (a - b)}{2} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_c \sum_{k \neq j} \varphi_{a-c}^{\hbar}(x_j - x_k) \varphi_{b+c}^{\hbar}(x_j) \varphi_{a-c}^{\hbar}(x_k) \times \\
& \times \left(\widehat{S}_{b+c}^j \widehat{S}_{a-c}^k \mathbf{e}_N \left(\frac{c \times (a-b)}{2} \right) - \widehat{S}_{a-c}^k \widehat{S}_{b+c}^j \mathbf{e}_N \left(\frac{c \times (a-b)}{2} \right) \right) = 0, \quad (4.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_c \varphi_c^{\hbar}(x_j - x_k) \varphi_{b+c}^{\hbar}(x_k) \varphi_{a-c}^{\hbar}(x_j) \times \\
& \times \left(\widehat{S}_{a-c}^j \widehat{S}_{b+c}^k \mathbf{e}_N \left(-\frac{c \times (a-b)}{2} \right) - \widehat{S}_{b+c}^k \widehat{S}_{a-c}^j \mathbf{e}_N \left(\frac{c \times (a-b)}{2} \right) \right) = 0, \quad (4.7)
\end{aligned}$$

где $k \neq j$,

$$f^{\hbar}(a, b, c) = E_1(c + \hbar) - E_1(a - b - c + \hbar) + E_1(a - c + \hbar) - E_1(b + c + \hbar),$$

$$a, b, c \in \mathbb{Z}_N^{(2)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим некоторый матричный элемент $T_a \otimes T_b$. Подставляя (4.5) и (4.1) в (4.3), получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j,k} \sum_{c,a,b} \varphi_c^{\hbar}(z - w) \varphi_a^{\hbar}(z - x_j) \varphi_b^{\hbar}(w - x_k) \cdot \widehat{S}_a^j \widehat{S}_b^k \varphi_b^{\hbar}(x_k) \varphi_a^{\hbar}(x_j) \cdot T_c T_a \otimes T_{-c} T_b = \\
& = \sum_{j,k} \sum_{c,a,b} \varphi_c^{\hbar}(z - w) \varphi_a^{\hbar}(z - x_j) \varphi_b^{\hbar}(w - x_k) \times \\
& \times \widehat{S}_b^k \widehat{S}_a^j \varphi_b^{\hbar}(x_k) \varphi_a^{\hbar}(x_j) \cdot T_a T_c \otimes T_b T_{-c}. \quad (4.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j,k} \sum_{c,a,b} \varphi_c^{\hbar}(z - w) \varphi_a^{\hbar}(z - x_j) \varphi_b^{\hbar}(w - x_k) \times \\
& \times \widehat{S}_a^j \widehat{S}_b^k \varphi_b^{\hbar}(x_k) \varphi_a^{\hbar}(x_j) \mathbf{e}_N \left(-\frac{c \times (a-b)}{2} \right) \cdot T_{c+a} \otimes T_{-c+b} = \\
& = \sum_{j,k} \sum_{c,a,b} \varphi_c^{\hbar}(z - w) \varphi_a^{\hbar}(z - x_j) \varphi_b^{\hbar}(w - x_k) \times \\
& \times \widehat{S}_b^k \widehat{S}_a^j \varphi_b^{\hbar}(x_k) \varphi_a^{\hbar}(x_j) \mathbf{e}_N \left(\frac{c \times (a-b)}{2} \right) \cdot T_{a+c} \otimes T_{b-c}. \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Функции в левой и в правой частях выражений эквивалентны, так как их полюсы и квазипериоды совпадают. После замены переменных $a \rightarrow a - c$, $b \rightarrow b + c$ коэффициенты при матричном элементе $T_a \otimes T_b$ принимают вид

$$\begin{aligned}
& \sum_c \varphi_c^{\hbar}(z - w) \varphi_{a-c}^{\hbar}(z - x_j) \varphi_{b+c}^{\hbar}(w - x_k) \varphi_{b+c}^{\hbar}(x_k) \varphi_{a-c}^{\hbar}(x_j) \times \\
& \times \left(\widehat{S}_{a-c}^j \widehat{S}_{b+c}^k \mathbf{e}_N \left(-\frac{c \times (a-b)}{2} \right) - \widehat{S}_{b+c}^k \widehat{S}_{a-c}^j \mathbf{e}_N \left(\frac{c \times (a-b)}{2} \right) \right) = 0. \quad (4.10)
\end{aligned}$$

Рассмотрим два типа этих выражений:

$$\begin{aligned}
 & \sum_c \varphi_c^{\hbar}(z-w) \varphi_{a-c}^{\hbar}(z-x_j) \varphi_{b+c}^{\hbar}(w-x_k) \varphi_{b+c}^{\hbar}(x_k) \varphi_{a-c}^{\hbar}(x_j) \times \\
 & \quad \times \left(\widehat{S}_{a-c}^j \widehat{S}_{b+c}^k \mathbf{e}_N \left(-\frac{c \times (a-b)}{2} \right) - \right. \\
 & \quad \left. - \widehat{S}_{b+c}^k \widehat{S}_{a-c}^j \mathbf{e}_N \left(\frac{c \times (a-b)}{2} \right) \right) = 0, \quad k \neq j, \\
 & \sum_c (\varphi_c^{\hbar}(z-w) \varphi_{a-c}^{\hbar}(z-x_j) \varphi_{b+c}^{\hbar}(w-x_j) - \\
 & \quad - \varphi_{a-b-c}^{\hbar}(z-w) \varphi_{a-c}^{\hbar}(z-x_j) \varphi_{b+c}^{\hbar}(w-x_k)) \times \\
 & \quad \times \widehat{S}_{a-c}^j \widehat{S}_{b+c}^k \varphi_{b+c}^{\hbar}(x_k) \varphi_{a-c}^{\hbar}(x_j) \mathbf{e}_N \left(-\frac{c \times (a-b)}{2} \right) = 0, \quad k = j.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Второе выражение получаем после замены $c \rightarrow a - b - c$. В пределе при $z \rightarrow x_j$, $w \rightarrow x_j$ и $z \rightarrow x_j$, $w \rightarrow x_k$, как и в разделе 3, мы получаем коэффициенты, которые равны нулю. Таким образом, предложение доказано.

4.2. Квадратичная алгебра в случае $GL(2, \mathbb{C})$. Рассмотрим случай $N = 2$ более подробно. В этом случае квантовая R -матрица имеет вид

$$R(z, w) = \sum_{a=0}^3 \varphi_a^{\hbar}(z-w) \sigma_a \otimes \sigma_a, \tag{4.12}$$

где вместо T_a мы используем базис сигма-матриц.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Соотношения в ассоциативной алгебре принимают следующий вид: при $k = j$*

$$\begin{aligned}
 [\widehat{S}_{\alpha}^j, \widehat{S}_{\beta}^j]_- &= i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} c_1^1(j, j; \alpha, \beta, \gamma) [\widehat{S}_{\gamma}^j, \widehat{S}_0^j]_{++} \\
 &+ \sum_{k \neq j} i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{1}{k_{\alpha}} (\varphi_{\gamma}^{\hbar}(x_{jk}) c_1^2(j, k; \alpha, \beta, \gamma) [\widehat{S}_{\gamma}^k, \widehat{S}_0^j]_{+-} \\
 &- \varphi_0^{\hbar}(x_{jk}) c_1^3(j, k; \alpha, \beta, \gamma) [\widehat{S}_{\gamma}^j, \widehat{S}_0^k]_{+}),
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
 c_1^1(j, j; \alpha, \beta, \gamma) &= \frac{\varphi_{\gamma}^{\hbar}(x_j) \varphi_0^{\hbar}(x_j)}{\varphi_{\alpha}^{\hbar}(x_j) \varphi_{\beta}^{\hbar}(x_j)}, & c_1^2(j, k; \alpha, \beta, \gamma) &= \frac{\varphi_{\gamma}^{\hbar}(x_k) \varphi_0^{\hbar}(x_j)}{\varphi_{\alpha}^{\hbar}(x_j) \varphi_{\beta}^{\hbar}(x_j)}, \\
 c_1^3(j, k; \alpha, \beta, \gamma) &= \frac{\varphi_{\gamma}^{\hbar}(x_j) \varphi_0^{\hbar}(x_k)}{\varphi_{\alpha}^{\hbar}(x_j) \varphi_{\beta}^{\hbar}(x_j)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\widehat{S}_{\alpha}^j, \widehat{S}_0^j]_- &= i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{J_{\beta} - J_{\gamma}}{J_{\alpha}} c_2^1(j, j; \alpha, \beta, \gamma) [\widehat{S}_{\beta}^j, \widehat{S}_{\gamma}^j]_{++} \\
 &+ \sum_{k \neq j} i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{1}{k_{\alpha} J_{\alpha}} (c_2^2(j, k; \alpha, \beta, \gamma) D(\alpha, \beta) [\widehat{S}_{\gamma}^j, \widehat{S}_{\beta}^k]_{+-} \\
 &- c_2^3(j, k; \alpha, \beta, \gamma) D(\alpha, \gamma) [\widehat{S}_{\gamma}^k, \widehat{S}_{\beta}^j]_{+}),
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
c_2^1(j, j; \alpha, \beta, \gamma) &= \frac{\varphi_\gamma^h(x_j) \varphi_\beta^h(x_j)}{\varphi_\alpha^h(x_j) \varphi_0^h(x_j)}, & c_2^2(j, k; \alpha, \beta, \gamma) &= \frac{\varphi_\gamma^h(x_j) \varphi_\beta^h(x_k)}{\varphi_\alpha^h(x_j) \varphi_0^h(x_j)}, \\
c_2^3(j, k; \alpha, \beta, \gamma) &= \frac{\varphi_\gamma^h(x_k) \varphi_\beta^h(x_j)}{\varphi_\alpha^h(x_j) \varphi_0^h(x_j)}, \\
D(\alpha, \beta) &= \left(k_\alpha(k_\alpha - k_\beta - \ln' \varphi_\alpha^h(x_{jk})) + \ln' \frac{\varphi_\alpha^h(x_{jk})}{\varphi_0^h(x_{jk})} (\partial_z - E_1(\hbar)) \right) \varphi_\beta^h(x_{jk}), \\
\ln' \varphi_u^h(x) &= \frac{\partial_u(\varphi_u^h(x))}{\varphi_u^h(x)},
\end{aligned}$$

при $k \neq j$:

$$\begin{aligned}
[\widehat{S}_\alpha^j, \widehat{S}_\beta^k]_- &= i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{1}{k_\gamma} (\varphi_\beta(x_{jk}) c_3^1(j, k; \alpha, \beta, \gamma) [\widehat{S}_\gamma^j, \widehat{S}_0^k]_+ - \\
&\quad - \varphi_\alpha(x_{jk}) c_3^2(j, k; \alpha, \beta, \gamma) [\widehat{S}_\gamma^k, \widehat{S}_0^j]_+), \tag{4.15}
\end{aligned}$$

$$c_3^1(j, k; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{\varphi_\gamma^h(x_j) \varphi_0^h(x_k)}{\varphi_\alpha^h(x_j) \varphi_\beta^h(x_k)}, \quad c_3^2(j, k; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{\varphi_\gamma^h(x_k) \varphi_0^h(x_j)}{\varphi_\alpha^h(x_j) \varphi_\beta^h(x_k)},$$

$$\begin{aligned}
[\widehat{S}_\alpha^j, \widehat{S}_0^k]_- &= i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{1}{k_\alpha} (\varphi_\beta(x_{jk}) c_4^1(j, k; \alpha, \beta, \gamma) [\widehat{S}_\gamma^j, \widehat{S}_\beta^k]_+ - \\
&\quad - \varphi_\alpha(x_{jk}) c_4^2(j, k; \alpha, \beta, \gamma) [\widehat{S}_\gamma^k, \widehat{S}_\beta^j]_+), \tag{4.16}
\end{aligned}$$

$$c_4^1(j, k; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{\varphi_\gamma^h(x_j) \varphi_\beta^h(x_k)}{\varphi_\alpha^h(x_j) \varphi_0^h(x_k)}, \quad c_4^2(j, k; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{\varphi_\gamma^h(x_k) \varphi_\beta^h(x_j)}{\varphi_\alpha^h(x_j) \varphi_0^h(x_k)},$$

где $k_\gamma = E_1(\check{\gamma} + \hbar) - E_1(\check{\gamma}) - E_1(\hbar)$, $J_\gamma = E_2(\check{\gamma} + \hbar) - E_2(\hbar)$, $x_{jk} = x_j - x_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим (4.5) в (4.3) при $N = 2$ и проверим “баланс” коэффициентов двух типов матричных элементов $\sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta$ и $\sigma_\alpha \otimes \sigma_0$ левой и правой частей равенства. Зафиксируем эти элементы и сравним коэффициенты в соответствующих полюсах. Получим следующие выражения для скобок:

$$\begin{aligned}
[\widehat{S}_\alpha^j, \widehat{S}_\beta^j]_- &= i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\varphi_\gamma^h(x_j) \varphi_\beta^h(x_j)}{\varphi_\alpha^h(x_j) \varphi_0^h(x_j)} [\widehat{S}_\gamma^j, \widehat{S}_0^j]_+ + \sum_{k \neq j} \frac{\varphi_\gamma^h(x_{jk})}{f^h(\alpha, \beta, 0)} \cdot \frac{\varphi_\alpha^h(x_j) \varphi_\beta^h(x_k)}{\varphi_\alpha^h(x_j) \varphi_\beta^h(x_j)} [\widehat{S}_\alpha^j, \widehat{S}_\beta^k]_- - \\
&\quad - \frac{\varphi_\alpha^h(x_{jk})}{f^h(\alpha, \beta, 0)} \cdot \frac{\varphi_\alpha^h(x_k) \varphi_\beta^h(x_j)}{\varphi_\alpha^h(x_j) \varphi_\beta^h(x_j)} [\widehat{S}_\alpha^k, \widehat{S}_\beta^j]_- + \\
&\quad + i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\varphi_0^h(x_{jk})}{f^h(\alpha, \beta, 0)} \cdot \frac{\varphi_\gamma^h(x_k) \varphi_0^h(x_j)}{\varphi_\alpha^h(x_j) \varphi_\beta^h(x_j)} [\widehat{S}_\gamma^j, \widehat{S}_0^k]_+ - \\
&\quad - i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\varphi_\gamma^h(x_{jk})}{f^h(\alpha, \beta, 0)} \cdot \frac{\varphi_\gamma^h(x_j) \varphi_0^h(x_k)}{\varphi_\alpha^h(x_j) \varphi_\beta^h(x_j)} [\widehat{S}_\gamma^k, \widehat{S}_0^j]_+, \tag{4.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\widehat{S}_\alpha^j, \widehat{S}_0^j]_- &= i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{J_\beta - J_\gamma}{J_\alpha} \cdot \frac{\varphi_\gamma^h(x_j) \varphi_\beta^h(x_j)}{\varphi_\alpha^h(x_j) \varphi_0^h(x_j)} [\widehat{S}_\beta^j, \widehat{S}_\gamma^j]_+ + \\
&\quad + \sum_{k \neq j} \frac{\varphi_0^h(x_{jk})}{J_\alpha} \cdot \frac{\varphi_0^h(x_k)}{\varphi_0^h(x_j)} [\widehat{S}_\alpha^j, \widehat{S}_0^k]_- + \frac{\varphi_\alpha^h(x_{jk})}{J_\alpha} \cdot \frac{\varphi_\alpha^h(x_k)}{\varphi_\alpha^h(x_j)} [\widehat{S}_\alpha^k, \widehat{S}_0^j]_- +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\varphi_{\gamma}^{\hbar}(x_{jk})}{J_{\alpha}} \cdot \frac{\varphi_{\gamma}^{\hbar}(x_k)\varphi_{\beta}^{\hbar}(x_j)}{\varphi_{\alpha}^{\hbar}(x_j)\varphi_0^{\hbar}(x_j)} [\widehat{S}_{\beta}^j, \widehat{S}_{\gamma}^j]_{+} + \\
 & + i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\varphi_{\beta}^{\hbar}(x_{jk})}{J_{\alpha}} \cdot \frac{\varphi_{\gamma}^{\hbar}(x_j)\varphi_{\beta}^{\hbar}(x_k)}{\varphi_{\alpha}^{\hbar}(x_j)\varphi_0^{\hbar}(x_j)} [\widehat{S}_{\gamma}^j, \widehat{S}_{\beta}^j]_{+}
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

при $k \neq j$,

$$\begin{aligned}
 [\widehat{S}_{\alpha}^j, \widehat{S}_{\beta}^k]_{-} &= \frac{\varphi_{\gamma}^{\hbar}(x_{jk})}{\varphi_0^{\hbar}(x_{jk})} \cdot \frac{\varphi_{\alpha}^{\hbar}(x_k)\varphi_{\beta}^{\hbar}(x_j)}{\varphi_{\alpha}^{\hbar}(x_j)\varphi_{\beta}^{\hbar}(x_k)} [\widehat{S}_{\alpha}^k, \widehat{S}_{\beta}^j]_{-} + \\
 & + i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\varphi_{\alpha}^{\hbar}(x_{jk})}{\varphi_0^{\hbar}(x_{jk})} \cdot \frac{\varphi_{\gamma}^{\hbar}(x_k)\varphi_0^{\hbar}(x_j)}{\varphi_{\alpha}^{\hbar}(x_j)\varphi_{\beta}^{\hbar}(x_k)} [\widehat{S}_{\gamma}^k, \widehat{S}_0^j]_{+} - \\
 & - i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\varphi_{\beta}^{\hbar}(x_{jk})}{\varphi_0^{\hbar}(x_{jk})} \cdot \frac{\varphi_{\gamma}^{\hbar}(x_j)\varphi_0^{\hbar}(x_k)}{\varphi_{\alpha}^{\hbar}(x_j)\varphi_{\beta}^{\hbar}(x_k)} [\widehat{S}_{\gamma}^j, \widehat{S}_0^k]_{+},
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
 [\widehat{S}_{\alpha}^j, \widehat{S}_0^k]_{-} &= \frac{\varphi_{\alpha}^{\hbar}(x_{jk})}{\varphi_0^{\hbar}(x_{jk})} \cdot \frac{\varphi_{\alpha}^{\hbar}(x_k)\varphi_0^{\hbar}(x_j)}{\varphi_{\alpha}^{\hbar}(x_j)\varphi_0^{\hbar}(x_k)} [\widehat{S}_{\alpha}^k, \widehat{S}_0^j]_{-} + \\
 & + i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\varphi_{\gamma}^{\hbar}(x_{jk})}{\varphi_0^{\hbar}(x_{jk})} \cdot \frac{\varphi_{\beta}^{\hbar}(x_j)\varphi_{\gamma}^{\hbar}(x_k)}{\varphi_{\alpha}^{\hbar}(x_j)\varphi_0^{\hbar}(x_k)} [\widehat{S}_{\beta}^j, \widehat{S}_{\gamma}^k]_{+} - \\
 & - i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\varphi_{\beta}^{\hbar}(x_{jk})}{\varphi_0^{\hbar}(x_{jk})} \cdot \frac{\varphi_{\beta}^{\hbar}(x_k)\varphi_{\gamma}^{\hbar}(x_j)}{\varphi_{\alpha}^{\hbar}(x_j)\varphi_0^{\hbar}(x_k)} [\widehat{S}_{\beta}^k, \widehat{S}_{\gamma}^j]_{+}
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

при $k = j$.

Выразим все коммутаторы через антикоммутаторы. Фактически мы имеем для скобок $[\widehat{S}_{\alpha}^j, \widehat{S}_{\beta}^k]_{-}$, $[\widehat{S}_{\alpha}^j, \widehat{S}_0^k]_{-}$ два добавочных уравнения ($j \leftrightarrow k$). Решая систему из шести уравнений, получаем соотношения (4.13)–(4.16).

4.3. Квантовый детерминант. Докажем для группы $GL(2, \mathbb{C})$, что квантовый детерминант порождает центральные элементы перестановочной алгебры

$$R_{12}(z_1, z_2)L_1(z_1)L_2(z_2) = L_2(z_2)L_1(z_1)R_{12}(z_1, z_2). \tag{4.21}$$

Рассмотрим случай классической алгебры (3.1)–(3.6). Чтобы доказать, что $\det L(z)$ в случае $GL(N, \mathbb{C})$ порождает функции Казимира пуассоновой структуры (3.1)–(3.6), рассмотрим каждую часть равенства

$$\begin{aligned}
 & \{L_1(z) \dots L_N(z), L_{N+1}(w)\} = \\
 & = [L_1(z) \dots L_N(z)L_{N+1}(w), r_{1,N+1}(z, w) + \dots + r_{N,N+1}(z, w)],
 \end{aligned}$$

где L_i и r_{ik} , $L_i \in \text{End } V_i$, $r_{ik} \in \text{End}(V_i \otimes V_k)$, как линейные операторы действуют на $\bigotimes_{i=1}^{N+1} V_i$, $V_i \cong \mathbb{C}^N$ – векторные пространства. Детерминант $\det L(z)$, очевидно, появляется на подпространстве $[\bigwedge_{i=1}^N V_i] \otimes V_{N+1}$. Правая часть равенства на этом подпространстве сводится к следующему выражению:

$$[\det L(z) \cdot L_{N+1}(w), \text{Tr}_1 r_{1,N+1}(z, w) + \text{Tr}_N r_{N,N+1}(z, w)].$$

Здесь следы Tr_i взяты над компонентами $\text{End } V_i$. Все они исчезают для r -матрицы (2.18). На этом заканчивается доказательство для случая классической алгебры.

В квантовом случае детерминант заменяется квантовым детерминантом

$$\det = \text{tr}(P^- \widehat{L}(z, \hbar) \otimes \widehat{L}(z + 2\hbar, \hbar)),$$

где P^- – проекция на антисимметрическую часть тензорного произведения

$$P^- a \otimes b = \frac{1}{2}(a \otimes b - b \otimes a).$$

Здесь мы рассмотрим только случай (2×2) -матрицы. R -матрица

$$R_{12}(z, w) = \sum_{a=0}^3 \varphi_a^\eta(z - w) \sigma_a \otimes \sigma_a$$

удовлетворяет следующим важным соотношениям:

$$R_{12}(z, z + 2\hbar) = 4 \frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(2\hbar)} P^-, \quad P^- = \frac{1}{4} \left(1 \otimes 1 - \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_\alpha \otimes \sigma_\alpha \right).$$

Рассмотрим произведение $L_1(z_1)L_2(z_2)L_3(w) \in V^{\otimes 3}$. Из уравнения Янга–Бакстера следует, что $R_{12}R_{13}R_{23}L_1L_2L_3 = L_3L_2L_1R_{12}R_{13}R_{23}$. Положим $z_2 = z_1 + 2\hbar$, тогда $P_{12}^-R_{13}R_{23}L_1L_2L_3 = L_3L_2L_1P_{12}^-R_{13}R_{23}$. Наиболее важно утверждение, что $P_{12}^-R_{13}R_{23} \sim P_{12}^- \otimes 1_3$, которое следует из прямых вычислений. Для упрощения можно использовать следующие тождества для $\alpha, \beta, \gamma \sim 1, 2, 3$ с точностью до циклических перестановок:

$$-\varphi_0^\hbar(x)\varphi_\gamma(x-2\hbar) + \varphi_\gamma^\hbar(x)\varphi_0(x-2\hbar) + \varphi_\beta^\hbar(x)\varphi_\alpha(x-2\hbar) + \varphi_\alpha^\hbar(x)\varphi_\beta(x-2\hbar) = 0. \quad (4.22)$$

Учитывая, что $\text{Tr}_{12}(P_{12}^-L_1L_2) = \text{Tr}_{12}(P_{12}^-L_2L_1)$, мы приходим к окончательному результату:

$$[\text{Tr}_{12}(P_{12}^-L_1(z-2\hbar)L_2(z)), L_3(w)] = 0.$$

4.4. Неоднородная алгебра и уравнение отражения. Рассмотрим случай ранга $N = 2$ с четырьмя отмеченными точками $n = 4$. Пусть сначала отмеченные точки находятся в точке $z = 0$ и в полупериодах Σ_τ

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\tau}{2} = \omega_2, \quad x_2 = \frac{1+\tau}{2} = \omega_1 + \omega_2, \quad x_3 = \frac{1}{2} = \omega_1.$$

Предположим, что

$$S_\alpha^j = \delta_\alpha^j \tilde{\nu}_\alpha, \quad j = 1, 2, 3, \quad (4.23)$$

где $S_\alpha^0 = S_\alpha$ произвольны. Такой выбор основан на редукции $L(z)L(-z) = \det L(z) \cdot I$.

Пусть R^- – квантовая вертексная R -матрица, которая возникает в XYZ-модели. Введем также R^+ -матрицу

$$R^\pm(z, w) = \sum_{a=0}^3 \varphi_a^{\hbar/2}(z \pm w) \sigma_a \otimes \sigma_a. \quad (4.24)$$

Определим квантовый оператор Лакса

$$\widehat{L}(z) = \widehat{S}_0 \phi^\hbar(z) \sigma_0 + \sum_{\alpha} (\widehat{S}_\alpha \varphi_\alpha^\hbar(z) + \tilde{\nu}_\alpha \varphi_\alpha^\hbar(z - \omega_\alpha)) \sigma_\alpha. \quad (4.25)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Оператор Лакса (4.25) удовлетворяет квантовому уравнению отражения

$$R^-(z, w) \widehat{L}_1(z) R^+(z, w) \widehat{L}_2(w) = \widehat{L}_2(w) R^+(z, w) \widehat{L}_1(z) R^-(z, w), \quad (4.26)$$

если его компоненты S_a порождают ассоциативную алгебру с соотношениями

$$[\tilde{\nu}_\alpha, \tilde{\nu}_\beta] = 0, \quad [\tilde{\nu}_\alpha, \widehat{S}_a] = 0, \quad (4.27)$$

$$i[\widehat{S}_0, \widehat{S}_\alpha]_+ = [\widehat{S}_\beta, \widehat{S}_\gamma], \quad (4.28)$$

$$[\widehat{S}_\gamma, \widehat{S}_0] = i \frac{K_\beta - K_\alpha}{K_\gamma} [\widehat{S}_\alpha, \widehat{S}_\beta]_+ - 2i \frac{1}{K_\gamma} (\tilde{\nu}_\alpha \rho_\alpha \widehat{S}_\beta - \tilde{\nu}_\beta \rho_\beta \widehat{S}_\alpha), \quad (4.29)$$

где

$$K_\alpha = E_1(\hbar + \check{\alpha}) - E_1(\hbar) - E_1(\check{\alpha}), \quad \rho_\alpha = -\exp(-2\pi i \check{\alpha} \partial_\tau \check{\alpha}) \phi(\check{\alpha} + \hbar, -\check{\alpha}).$$

Доказательство основано на прямом вычислении левой и правой частей (4.26) (см. подробнее в [9]). Если в соотношениях (4.27)–(4.29) все $\nu_\alpha = 0$, то ассоциативная алгебра совпадает с алгеброй Складина. Поэтому алгебра, определяемая соотношениями (4.27)–(4.29), является трехпараметрической деформацией алгебры Складина.

Элементы

$$C_1 = \widehat{S}_0^2 + \sum_\alpha \widehat{S}_\alpha^2, \quad C_2 = \sum_\alpha \widehat{S}_\alpha^2 K_\alpha (K_\alpha - K_\beta - K_\gamma) + 2\tilde{\nu}_\alpha \rho_\alpha K_\alpha \widehat{S}_\alpha$$

принадлежат центру обобщенной алгебры Складина (4.27), (4.28). Они являются коэффициентами в разложении квантового детерминанта

$$\det_{\hbar} = \text{tr}(P^- \widehat{L}(z, \hbar) \otimes \widehat{L}(z + 2\hbar, \hbar)).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Эллиптические функции

Положим $q = e^{2\pi i \tau}$, где τ – модулярный параметр эллиптической кривой E_τ .

Базисным элементом является тета-функция:

$$\vartheta(z | \tau) = q^{1/8} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \mathbf{e} \left(\frac{1}{2} n(n+1)\tau + nz \right), \quad \mathbf{e}(x) = e^{2\pi i x}.$$

Введем функции Эйзенштейна

$$E_1(z | \tau) = \partial_z \ln \vartheta(z | \tau), \quad E_1(z | \tau) \sim \frac{1}{z} - 2\eta_1 z, \quad (A.1)$$

где

$$\eta_1(\tau) = \frac{24}{2\pi i} \frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)}, \quad \eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n>0} (1 - q^n),$$

– функция Дедекинда и

$$E_2(z | \tau) = -\partial_z E_1(z | \tau) = \partial_z^2 \ln \vartheta(z | \tau), \quad E_2(z | \tau) \sim \frac{1}{z^2} + 2\eta_1. \quad (A.2)$$

Справедливы следующие соотношения на функции Вейерштрасса:

$$\zeta(z, \tau) = E_1(z, \tau) + 2\eta_1(\tau)z, \quad \wp(z, \tau) = E_2(z, \tau) - 2\eta_1(\tau).$$

Введем высшие функции Эйзенштейна

$$E_j(z) = \frac{(-1)^j}{(j-1)!} \partial^{(j-2)} E_2(z), \quad j > 2. \quad (\text{A.3})$$

Пусть

$$\phi(u, z) = \frac{\vartheta(u+z)\vartheta'(0)}{\vartheta(u)\vartheta(z)}. \quad (\text{A.4})$$

Тогда $\phi(u, z) = \phi(z, u)$, $\phi(-u, -z) = -\phi(u, z)$. Функция ϕ имеет полюс в точке $z = 0$ и

$$\phi(u, z) = \frac{1}{z} + E_1(u) + \frac{z}{2}(E_1^2(u) - \wp(u)) + \dots, \quad (\text{A.5})$$

$$\partial_u \phi(u, z) = \phi(u, z)(E_1(u+z) - E_1(u)), \quad (\text{A.6})$$

$$\partial_z \phi(u, z) = \phi(u, z)(E_1(u+z) - E_1(z)), \quad (\text{A.7})$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \ln \partial_u \phi(u, z) = -E_2(u).$$

Функция ϕ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\partial_\tau \phi(u, w) - \frac{1}{2\pi i} \partial_u \partial_w \phi(u, w) = 0.$$

Квазипериоды для введенных функций определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \vartheta(z+1) &= -\vartheta(z), & \vartheta(z+\tau) &= -q^{-1/2} e^{-2\pi i z} \vartheta(z), \\ E_1(z+1) &= E_1(z), & E_1(z+\tau) &= E_1(z) - 2\pi i, \\ E_2(z+1) &= E_2(z), & E_2(z+\tau) &= E_2(z), \\ \phi(u, z+1) &= \phi(u, z), & \phi(u, z+\tau) &= e^{-2\pi i u} \phi(u, z), \end{aligned}$$

$$\partial_u \phi(u, z+1) = \partial_u \phi(u, z), \quad \partial_u \phi(u, z+\tau) = e^{-2\pi i u} \partial_u \phi(u, z) - 2\pi i \phi(u, z).$$

Справедливо тождество Фэя:

$$\phi(u_1, z_1) \phi(u_2, z_2) - \phi(u_1 + u_2, z_1) \phi(u_2, z_2 - z_1) - \phi(u_1 + u_2, z_2) \phi(u_1, z_1 - z_2) = 0. \quad (\text{A.8})$$

Из (A.7) и (A.8) получаем:

$$\phi(u_1, z) \phi(u_2, z) = \phi(u_1 + u_2, z) (E_1(u_1) + E_1(u_2) - E_1(u_1 + u_2 + z) + E_1(z)). \quad (\text{A.9})$$

Частными случаями тождества (A.8) являются следующие функциональные уравнения:

$$\begin{aligned} \phi(u, z) \partial_v \phi(v, z) - \phi(v, z) \partial_u \phi(u, z) &= (E_2(v) - E_2(u)) \phi(u + v, z), \\ \phi(u, z_1) \phi(-u, z_2) &= \phi(u, z_1 - z_2) (-E_1(z_1) + E_1(z_2) - \\ &\quad - E_1(u) + E_1(u + z_1 - z_2)) = \\ &= \phi(u, z_1 - z_2) (-E_1(z_1) + E_1(z_2) + \partial_u \phi(u, z_2 - z_1)), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\phi(u, z)\phi(-u, z) = E_2(z) - E_2(u),$$

$$\begin{aligned} \phi(v, z-w)\phi(u_1-v, z)\phi(u_2+v, w) - \phi(u_1-u_2-v, z-w)\phi(u_2+v, z)\phi(u_1-v, w) = \\ = \phi(u_1, z)\phi(u_2, w)f(u_1, u_2, v), \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

где

$$f(u_1, u_2, v) = E_1(v) - E_1(u_1 - u_2 - v) + E_1(u_1 - v) - E_1(u_2 + v). \quad (\text{A.12})$$

Функцию (A.12) можно переписать в виде

$$f(u_1, u_2, v) = -\frac{\vartheta'(0)\vartheta(u_1)\vartheta(u_2)\vartheta(u_2 - u_1 + 2v)}{\vartheta(u_1 - v)\vartheta(u_2 + v)\vartheta(u_2 - u_1 + v)\vartheta(v)}.$$

Используя (A.1), (A.2), (A.5) можно получить из (A.11) некоторые важные специальные случаи. В первом случае при $v = u_1$ (или $v = -u_2$) получим тождество Фэя (A.8). Во втором случае при $u_1 = 0$ (или $u_2 = u$) имеем

$$\begin{aligned} \phi(v, z-w)\phi(-v, z)\phi(u+v, w) - \phi(-u-v, z-w)\phi(u+v, z)\phi(-v, w) = \\ = \phi(u_1, z)(E_2(u+v) - E_2(v)). \end{aligned}$$

Если $u_2 \rightarrow -v$, то соотношение (A.11) при $u_1 = \alpha$, $u_2 = \beta$ в первом нетривиальном порядке принимает вид

$$\begin{aligned} \phi(-\beta, z-w)E_1(w)\phi(\alpha+\beta, z) - \phi(\alpha, z-w)E_1(z)\phi(\alpha+\beta, w) = \\ = \phi(\alpha, z)\phi(\beta, w)(E_1(\alpha) + E_1(\beta) - E_1(\alpha+\beta)). \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Алгебра Ли $sl(N, \mathbb{C})$ и эллиптические функции

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_N(z) &= e^{2\pi iz/N}, \\ Q &= \text{diag}(\mathbf{e}_N(1), \dots, \mathbf{e}_N(m), \dots, 1), \\ \Lambda &= \delta_{j, j+1}, \quad j = 1, \dots, N \pmod{N}. \end{aligned}$$

Пусть

$$\mathbb{Z}_N^{(2)} = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}), \quad \widetilde{\mathbb{Z}}_N^{(2)} = \mathbb{Z}_N^{(2)} \setminus (0, 0),$$

– двумерные решетки порядка N^2 и $N^2 - 1$ соответственно. Матрицы $Q^{a_1} \Lambda^{a_2}$, $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_N^{(2)}$, индуцируют базис в группе $GL(N, \mathbb{C})$, а $Q^{\alpha_1} \Lambda^{\alpha_2}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \widetilde{\mathbb{Z}}_N^{(2)}$, индуцируют базис в алгебре Ли $sl(N, \mathbb{C})$. Подробнее рассмотрим представление $\mathbb{Z}_N^{(2)}$ в $GL(N, \mathbb{C})$:

$$a \rightarrow T_a = \frac{N}{2\pi i} \mathbf{e}_N \left(\frac{a_1 a_2}{2} \right) Q^{a_1} \Lambda^{a_2}, \quad (\text{B.1})$$

$$T_a T_b = \frac{N}{2\pi i} \mathbf{e}_N \left(-\frac{a \times b}{2} \right) T_{a+b}, \quad a \times b = a_1 b_2 - a_2 b_1, \quad (\text{B.2})$$

где $N\mathbf{e}_N(-a \times b/2)/(2\pi i)$ – нетривиальный 2-коцикл в $H^2(\mathbb{Z}_N^{(2)}, \mathbb{Z}_{2N})$. Матрицы T_α , $\alpha \in \tilde{\mathbb{Z}}_N^{(2)}$, индуцируют базис в $sl(N, \mathbb{C})$. Из (Б.2) следует, что

$$[T_\alpha, T_\beta] = \mathbf{C}(\alpha, \beta)T_{\alpha+\beta}, \quad (\text{Б.3})$$

где $\mathbf{C}(\alpha, \beta) = (N/\pi) \sin(\pi(\alpha \times \beta)/N)$ – структурные константы в $sl(N, \mathbb{C})$.

При $N = 2$ базис T_α пропорционален базису матриц Паули:

$$T_{(1,0)} = \frac{1}{\pi i} \sigma_3, \quad T_{(0,1)} = \frac{1}{\pi i} \sigma_1, \quad T_{(1,1)} = \frac{1}{\pi i} \sigma_2.$$

Коалгебра Ли $\mathfrak{g}^* = sl(N, \mathbb{C})$ имеет дуальный базис

$$\mathfrak{g}^* = \left\{ \mathbf{S} = \sum_{\tilde{\mathbb{Z}}_N^{(2)}} S_\gamma t^\gamma \right\}, \quad t^\gamma = \frac{2\pi i}{N^2} T_{-\gamma}, \quad \langle T_\alpha t^\beta \rangle = \delta_\alpha^{-\beta}.$$

Из (Б.3) следует, что $\mathfrak{g}^*$ является многообразием Пуассона, оснащенным скобками

$$\{S_\alpha, S_\beta\} = \mathbf{C}(\alpha, \beta)S_{\alpha+\beta}.$$

Коприсоединенное действие в этих базисах имеет вид

$$\text{ad}_{T_\alpha}^* t^\beta = \mathbf{C}(\alpha, \beta)t^{\alpha+\beta}.$$

Пусть $\check{\gamma} = (\gamma_1 + \gamma_2\tau)/N$. Введем константы на $\tilde{\mathbb{Z}}^{(2)}$:

$$\vartheta(\check{\gamma}) = \vartheta\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2\tau}{N}\right), \quad E_1(\check{\gamma}) = E_1\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2\tau}{N}\right), \quad E_2(\check{\gamma}) = E_2\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2\tau}{N}\right) \quad (\text{Б.4})$$

и функции

$$\begin{aligned} \phi_\gamma(z) &= \phi(\check{\gamma}, z), \\ \varphi_\gamma(z) &= \mathbf{e}_N(\gamma_2 z) \phi_\gamma(z), \end{aligned} \quad (\text{Б.5})$$

$$\varphi_{\gamma,\eta}(z) = \mathbf{e}_N(\gamma_2 z) \phi\left(\eta + \frac{\gamma_1 + \gamma_2\tau}{N}, z\right). \quad (\text{Б.6})$$

Эти функции имеют следующие квазипериоды:

$$\varphi_\gamma(z+1) = \mathbf{e}_N(\gamma_2) \varphi_\gamma(z), \quad \varphi_\gamma(z+\tau) = \mathbf{e}_N(-\gamma_1) \varphi_\gamma(z), \quad (\text{Б.7})$$

$$\varphi_{\gamma,\eta}(z+1) = \mathbf{e}_N(\gamma_2) \varphi_{\gamma,\eta}(z), \quad \varphi_{\gamma,\eta}(z+\tau) = \mathbf{e}_N(-\gamma_1 - \eta) \varphi_{\gamma,\eta}(z). \quad (\text{Б.8})$$

Важные соотношения для этих функций имеют вид

$$\frac{\varphi_\eta(z_1 - z_2)}{\varphi_\eta(z_1)} = \frac{1}{\varphi_\eta(z_2)} (E_1(z_2) + E_1(\eta) + E_1(z_1 - z_2) - E_1(z_1 + \eta)), \quad (\text{Б.9})$$

$$\frac{\varphi_{\alpha,\eta}(z_1 - z_2)}{\varphi_\eta(z_1)} = \frac{1}{\varphi_\eta(z_2)} \varphi_\alpha(z_1 - z_2) + \frac{\varphi_{-\alpha}(z_2)}{\varphi_\eta(z_2) \varphi_\alpha(\eta)} \varphi_\alpha(z_1 + \eta), \quad (\text{Б.10})$$

$$\frac{\varphi_{\alpha,\eta}(z)}{\varphi_\eta(z)} = \frac{\varphi_\alpha(z + \eta)}{\varphi_\alpha(\eta)}. \quad (\text{Б.11})$$

Другое важное соотношение в случае $N = 2$:

$$k_\gamma f^{\hbar}(\gamma, \alpha, 0) = J_\gamma = E_2(\gamma + \hbar) - E_2(\hbar),$$

где

$$k_\gamma = E_1(\gamma + \hbar) - E_1(\gamma) - E_1(\hbar).$$

Дадим короткие пояснения к этой формуле. Из (A.11), (A.12) имеем:

$$(E_1(\gamma + \hbar) - E_1(\gamma) - E_1(\hbar))(E_1(\alpha + \hbar) + E_1(-\beta + \hbar) - E_1(\gamma + \hbar) - E_1(\hbar)) = E_2(\gamma + \hbar) - E_2(\hbar),$$

где $\alpha - \beta = \gamma$. Функции в правой и в левой частях имеют совпадающие полюсы ($\hbar = 0$, $\hbar = -\gamma$) и нули ($\hbar = -\gamma/2$), поэтому эти функции эквивалентны.

Определим функцию

$$f_\gamma(z) = \mathbf{e}_N(\gamma_2 z) \partial_u \phi(u, z) \Big|_{u=\check{\gamma}} = \varphi_\gamma(z)(E_1(\check{\gamma} + z) - E_1(\check{\gamma})).$$

Из (A.6) следует, что

$$\begin{aligned} f_\gamma(z) &= \varphi_\gamma(z)(E_1(\check{\gamma} + z) - E_1(\check{\gamma})), \\ f(\alpha, \beta, \gamma) &= E_1(\check{\gamma}) - E_1(\check{\alpha} - \check{\beta} - \check{\gamma}) + E_1(\check{\alpha} - \check{\gamma}) - E_1(\check{\beta} - \check{\gamma}) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

(см. (A.12)).

Из (A.4) вытекает, что

$$\begin{aligned} \varphi_\gamma(z+1) &= \mathbf{e}_N(\gamma_2) \varphi_\gamma(z), & \varphi_\gamma(z+\tau) &= \mathbf{e}_N(-\gamma_1) \varphi_\gamma(z), \\ f_\gamma(z+1) &= \mathbf{e}_N(\gamma_2) f_\gamma(z), & f_\gamma(z+\tau) &= \mathbf{e}_N(-\gamma_1) f_\gamma(z) - 2\pi i \varphi_\gamma(z). \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Модификацией (A.11) является соотношение

$$\varphi_\gamma(z - x_j) \varphi_{-\gamma}(z - x_k) = \varphi_\gamma(x_k - x_j)(E_1(z - x_k) - E_1(z - x_j)) - f_\gamma(x_k - x_j).$$

Благодарности. А. Левин и А. Зотов благодарны за гостеприимство Институту Макса Планка в Бонне, где эта работа была подготовлена. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 06-02-17381, № 06-01-92054-КЕ) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-8065.2006.2). Работа А. Зотова была также поддержана фондом “Династия”.

Список литературы

- [1] А. А. Белавин, В. Г. Дринфельд, *Функц. анализ и его прил.*, **16:3** (1982), 1–29.
- [2] А. Белавин, *Функц. анализ и его прил.*, **14:4** (1980), 18–26.
- [3] Е. Склянин, *Функц. анализ и его прил.*, **16:4** (1982), 27–34.
- [4] А. В. Одесский, Б. Л. Фейгин, *Функц. анализ и его прил.*, **23:3** (1989), 45–54.
- [5] K. Takasaki, *Lett. Math. Phys.*, **44:2** (1998), 143–156; [arXiv: hep-th/9711058](#).
- [6] Yu. Chernyakov, A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, *J. Phys. A*, **39:39** (2006), 12083–12101; [arXiv: nlin.SI/0602043](#).
- [7] H. Braden, V. Dolgushev, M. Olshanetsky, A. Zotov, *J. Phys. A*, **36:25** (2003), 6979–7000.
- [8] B. Khesin, A. Levin, M. Olshanetsky, *Comm. Math. Phys.*, **250:3** (2004), 581–612.
- [9] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, *Comm. Math. Phys.*, **268:1** (2006), 67–103; [arXiv: math.QA/0508058](#).