Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Л. Рубин, Дифференциальное уравнение для функционального интеграла, *ТМФ*, 2008, том 156, номер 2, 184–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6239>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 17:03:05

© 2008 г.

П. Л. Рубин*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА

Предложен новый подход к вычислению функциональных интегралов в тех случаях, когда функционал, подлежащий усреднению (интегрированию), зависит от функций более чем одной переменной. Метод аналогичен тому, который использовал Фейнман в одномерном случае (квантовая механика). Рассмотрено интегрирование функционалов, зависящих от функций двух переменных и обладающих симметрией относительно поворотов вокруг некоторой точки плоскости. Предполагается, что функциональный интеграл берется по функциям, заданным в конечной области пространства (в круге радиуса r). Получено дифференциальное уравнение, описывающее изменение функционала по мере возрастания радиуса r .

Ключевые слова: функциональный интеграл, граничные условия.

1. ВВЕДЕНИЕ

Концепция интегрирования, согласно которой в роли переменной интегрирования выступает функция из некоторого функционального пространства, а объектом интегрирования является функционал, зависящий от этой функции, имеет уже достаточно долгую историю. Упомянем работу Орнштейна и Цернике [1] (хотя в ней явно понятие функционального интеграла еще не вводится), винеровский функциональный интеграл [2], работы Фейнмана, применившего функциональный интеграл в квантовой механике и квантовой теории поля [3]. В одномерном случае, когда функционал зависит от функции одной переменной, вычисление соответствующего функционального интеграла сводится к решению дифференциального уравнения в частных производных. В квантовой механике – это уравнение Шредингера.

В многомерном случае, когда функционал зависит от функции нескольких переменных, использовался другой метод вычисления интеграла. Он основан на том, что в случае свободных полей энергия системы является квадратичным функционалом переменных полей. При этом интеграл вычисляется достаточно просто. Аналогичная ситуация возникает и в статистической физике, когда энергию флуктуаций можно считать квадратичным функционалом флуктуирующих полей [4]. В тех случаях,

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: rubin@sci.lebedev.ru

когда квадратичное приближение недостаточно (взаимодействующие поля, окрестность точки фазового перехода второго рода), использовался ряд теории возмущений, члены которого могут быть наглядно представлены с помощью фейнмановских диаграмм [4].

В настоящей работе рассматривается интеграл по функциям двух переменных. Разумеется, трехмерное и четырехмерное пространства важнее для приложений. Однако новый подход к задаче удобнее сначала рассмотреть в более простой ситуации. Этот подход применим к ограниченному, но все же довольно широкому классу функционалов, инвариантных относительно поворотов вокруг некоторой точки пространства. К их числу относится, в частности, корреляционная функция тепловых флуктуаций некоторого скалярного поля, характеризующего изотропную среду при отсутствии внешних полей. Для интеграла выводится дифференциальное уравнение в частных производных. Метод вывода уравнения в принципе близок к методу, использованному Фейнманом в квантовой механике [3], где функции, являющиеся “переменными интегрирования”, заданы на конечном интервале времени и их значения на границах этого интервала фиксированы. Однако увеличение размерности пространства, на котором заданы эти функции, делает вывод более сложным.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Функциональный интеграл, который в первую очередь будет рассмотрен в настоящей работе, возник в задаче о критических флуктуациях. Пусть f – скалярная величина, характеризующая некоторое локальное свойство рассматриваемого вещества. Предполагается, что $\langle f \rangle = 0$. Угловые скобки означают термодинамическое усреднение, которое сводится к функциональному интегрированию. Если среда однородна, изотропна и не подвержена действию внешних полей, то корреляционная функция $C(x_1, x_2) = \langle f(x_1)f(x_2) \rangle$ инвариантна относительно вращений вокруг точек x_1 или x_2 , хотя усредняемое выражение подобной симметрией не обладает. Однако результат интегрирования не изменится, если предварительно усреднению подвергнуть исходный функционал, т.е. принять, что

$$C(x_1, x_2) = \left\langle \frac{1}{2\pi} \oint f(0)f(R, \varphi) d\varphi \right\rangle.$$

Начало системы полярных координат может быть помещено в одну из двух рассматриваемых точек (для определенности – в точку x_1), тогда (R, φ) – координаты точки x_2 , $R = |x_1 - x_2|$. Теперь уже не только результат интегрирования, но и само интегрируемое выражение инвариантны относительно поворотов вокруг начала координат.

Корреляционную функцию можно записать следующим образом (см. [5], § 147):

$$C(x_1, x_2) = \int f(x_1)f(x_2)e^{-E(f)} Df = \int \left(\frac{1}{2\pi} \oint f(0)f(R, \varphi) d\varphi \right) e^{-E(f)} Df. \quad (1)$$

Функционал $E(f)$ имеет вид

$$E(f) = \int \left(\frac{a}{2} (\nabla f(x))^2 + U[f(x)] \right) dx, \quad (2)$$

где a – постоянная величина, а функция $U[f]$ предполагается ограниченной снизу, четной и достаточно быстро возрастающей при увеличении $|f|$. В задаче о критических флуктуациях в изотропной среде и при отсутствии внешнего поля обычно полагают (см. [5], § 147)

$$U[f] = bf^2 + gf^4,$$

где b и g – постоянные величины, $g > 0$ ¹⁾.

Теперь постановка задачи будет несколько изменена в связи с предлагаемым способом вычисления интеграла. Пусть функции, по которым производится интегрирование (усреднение), имеют ограниченный носитель и сосредоточены внутри круга радиуса r (круг обозначим K_r , а ограничивающую его окружность – O_r). В задаче о флуктуациях такая ситуация возникает, если образец ограничен и занимает круг K_r . Начало координат по-прежнему находится в точке x_1 . Будем считать, что там же находится и центр круга K_r . Координаты точки обозначим ρ и φ (окружность $\rho = r$ – это граница K_r). Нормировка интеграла определяется так, чтобы среднее значение константы равнялось самой константе: $\langle 1 \rangle_{K_r} = 1$. Символ $\langle \dots \rangle_{K_r}$ означает усреднение, выполненное по функциям с носителем внутри K_r . Аналогичные обозначения будут применяться и в дальнейшем: нижний индекс у правой угловой скобки будет обозначать область, где сосредоточены носители функций, по которым выполняется усреднение (функциональное интегрирование).

Как и в одномерном случае (см. [3]) будем считать, что значение функции $f(\rho, \varphi)$, играющей роль переменной интегрирования, фиксировано на границе круга O_r :

$$f(r, \varphi) = u(\varphi),$$

где $u(\varphi)$ – некоторая заданная функция. Функциональный интеграл также обозначим C , но аргументы C изменятся (теперь в общем случае C представляет собой функционал):

$$C(R, r, u) = \int \left(\frac{1}{2\pi} \oint f(0) f(R, \varphi) d\varphi \right) e^{-E(f) \hat{\delta}[r, f(r, \varphi) - u(\varphi)]} Df, \quad (3)$$

где $\hat{\delta}[r, f(r, \varphi) - u(\varphi)]$ – функциональный аналог δ -функции, означающий, что на окружности O_r функция $f(r, \varphi) = u(\varphi)$. Радиус круга будет считаться переменным, и корреляционная функция $C(x_1, x_2)$ (см. (1)) должна получиться при переходе в равенстве (3) к пределу при $r \rightarrow \infty$. При этом результат не должен зависеть от величины u на границе круга K_r (см. сноску 1).

3. ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Дальнейшие рассуждения в значительной мере повторяют использованный Фейнманом [3] вывод уравнения, но с учетом изменения размерности пространства. Цель этих рассуждений – получить уравнение (7), описывающее изменение некоторого функционала $\phi(r, u)$ по мере возрастания радиуса r . При увеличении радиуса круга

¹⁾ Ситуация после достижения точки фазового перехода, т.е. сосуществование двух фаз, здесь не рассматривается. Но сколь угодно близкий подход к точке фазового перехода допускается.

от r до $r + \varepsilon$ функция в кольце между кругами указанных радиусов записывается в виде (ср. [3])

$$f(\rho, \varphi) = \frac{\rho - r}{\varepsilon} w(\varphi) + u(\varphi),$$

где величина $u(\varphi)$ фиксирована, а по ρ и $w(\varphi)$ надо выполнить интегрирование. Упомянутое кольцо обозначим δK (радиусы кругов, ограничивающих кольцо, в этом обозначении явно не указываются).

Рассмотрим приращение функционала

$$\begin{aligned} \Delta C &= C(R, r + \varepsilon, u) - C(R, r, u) = \\ &= \oint \frac{\delta C(R, r, u)}{\delta u(\varphi)} \langle w(\varphi) \rangle_{\delta K} d\varphi + \frac{1}{2} \oint \frac{\delta^2 C(R, r, u)}{\delta u(\varphi_1) \delta u(\varphi_2)} \langle w(\varphi_1) w(\varphi_2) \rangle_{\delta K} d\varphi_1 d\varphi_2 + \dots \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства обращается в нуль вследствие предполагаемой четности $U[f]$ (см. выше), так что

$$\begin{aligned} \Delta C &= C(R, r + \varepsilon, u) - C(R, r, u) = \\ &= \frac{1}{2} \oint \frac{\delta^2 C(R, r, u)}{\delta u(\varphi_1) \delta u(\varphi_2)} \langle w(\varphi_1) w(\varphi_2) \rangle_{\delta K} d\varphi_1 d\varphi_2 + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Из (1) и (2) следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ в кольце δK основной вклад в интеграл вносят только малые значения w , $|w| \rightarrow 0$. Поэтому с точностью до членов 1-го порядка по ε величину $U[f]$ можно заменить на $U[u]$. После такой замены интеграл по w становится гауссовым. Вычислим этот интеграл, заменяя φ на новую переменную $l = \rho\varphi$ и полагая $w(\varphi) = v(l)$.

Поскольку теперь величину $U[f]$ при интегрировании по f можно считать постоянной, функционал $E(f)$ (см. (2)) при интегрировании по кольцу δK можно записать следующим образом:

$$\int_{\delta K} \frac{a}{2} (\nabla f)^2 d\rho dl = \frac{a}{2} \oint dl \left(\frac{v(l)^2}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{3} v(l) v''(l) \right).$$

В правой части этого равенства выполнено интегрирование по частям с учетом того, что область интегрирования (окружность) замкнута. Величина $\langle w(\varphi_1) w(\varphi_2) \rangle_{\delta K}$ вычисляется стандартным образом (см. [4]):

$$\langle w(\varphi_1) w(\varphi_2) \rangle_{\delta K} = \langle v(l_1) v(l_2) \rangle_{\delta K} = \frac{\sqrt{3}}{a} \exp \left[-\frac{\sqrt{3} |l_1 - l_2|}{\varepsilon} \right].$$

Теперь уже с помощью (4) несложно получить эволюционное уравнение для $C(R, r, u)$

$$\frac{\partial C(R, r, u)}{\partial r} = \frac{1}{2r} \oint \frac{\delta^2 C(R, r, u)}{\delta u(\varphi)^2} d\varphi - r C(R, r, u) \oint U[u(\varphi)] d\varphi. \quad (5)$$

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Цель дальнейших рассуждений – упростить решаемую задачу. Будем считать “граничные” функции u постоянными. Тогда $C(R, r, u)$ становится не функционалом, а функцией. Рассмотрим связь между производными функционала и функции,

получающейся из него в результате сделанного упрощения. Функционал n -й степени имеет вид

$$\phi_n(u) = \underbrace{\oint \dots \oint}_n G(\varphi_1, \dots, \varphi_n) u(\varphi_1) \dots u(\varphi_n) d\varphi_1 \dots d\varphi_n.$$

Если $G(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \text{const}$, то этот функционал инвариантен относительно вращений системы координат на любой угол

$$\phi_n(u) = G \left(\oint u(\varphi) d\varphi \right)^n. \quad (6)$$

Отметим, что формула (6) дает не самый общий вид функционала, инвариантного при вращениях. Но если он является таким при некотором r , то согласно (5), он останется таким же и при возрастании r^2 .

Пусть $F_n(u)$ – функция, которая получается из этого функционала при замене функции $u(\varphi)$ на постоянную величину u , $F_n(u) = G(2\pi u)^n$, при этом

$$\oint d\varphi \frac{\delta^2 \phi_n(u)}{\delta u(\varphi)^2} \Big|_{u=\text{const}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 F_n(u)}{\partial u^2}.$$

Поскольку это равенство справедливо при любом n , оно должно быть верным и в общем случае:

$$\oint d\varphi \frac{\delta^2 \phi(u)}{\delta u(\varphi)^2} \Big|_{u=\text{const}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 F(u)}{\partial u^2},$$

и, в частности, для

$$F(R, r, u) = C(R, r, u) \Big|_{u=\text{const}}.$$

С учетом сказанного выше уравнение (5) для рассматриваемого функционала принимает вид

$$\frac{\partial F(r, u)}{\partial r} - \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial^2 F(r, u)}{\partial u^2} + 2\pi r U(u) F(r, u) = 0. \quad (7)$$

Вывод этого “эволюционного” по r уравнения и являлся целью настоящей работы.

Благодарности. Автор благодарит Р. А. Минлоса, С. А. Пирогова и И. В. Тютина за обсуждение работы.

Список литературы

- [1] L. S. Ornstein, F. Zernike, *Proc. Kon. Akad. Wet.*, **17** (1914), 793.
- [2] М. Кац, *Вероятность и смежные вопросы в физике*, Мир, М., 1965.
- [3] Р. Фейнман, А. Хибс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям*, Мир, М., 1968.
- [4] В. Н. Попов, *Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике*, Атомиздат, М., 1976.
- [5] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. 5: Статистическая физика. Часть 1*, Физматлит, М., 2001.

Поступила в редакцию 8.05.2007,
после доработки 8.10.2007

²Уравнение (5) остается справедливым для любого функционала вида (3), если усредняемый функционал зависит только от значений функций f в круге K_r .