Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Дж. Гоф, Бозонно-фермионные белые шумы и процесс отражения, *ТМФ*, 2000, том 124, номер 1, 36–47

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf624>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 06:56:14

БОЗОННО-ФЕРМИОННЫЕ БЕЛЫЕ ШУМЫ И ПРОЦЕСС ОТРАЖЕНИЯ

Процесс отражения использован, чтобы объединить бозонное и фермионное квантовые стохастические исчисления. При этом возникают проблемы при использовании стандартного исчисления Стратоновича. Показано, что исчисление Стратоновича с аналитическим продолжением позволяет описать процесс отражения с помощью бозонного белого шума и построить функционал от фермионного белого шума.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория некоммутативных случайных процессов на бозонном фокковском пространстве, созданная Хадсоном и Партасарати [1], явилась началом нового этапа в исследовании открытых систем, став первой конкретной математической основой для далеко идущего обобщения стандартного стохастического описания классических открытых систем. В рамках этого обобщения можно в явном виде найти унитарные коциклы (т.е. сингулярные возмущения квантовой динамики) для диссипативных эволюций, ассоциированных с произвольным генератором Линдблада [2].

Теория Хадсона и Партасарати создавалась по аналогии со стохастическим исчислением Ито. Хотя такой подход полезен для математических целей, он затемняет некоторые физические аспекты. Исчисление Ито неудобно для стохастических генераторов квантовых потоков, поскольку в нем не выполняются стандартные формулы дифференцирования произведения и сложной функции, а также скрывается физическая симметрия, присущая исследуемой модели, что затрудняет описание генераторов как стохастических производных.

Обычно это исправляется обращением к исчислению Стратоновича. В работах [3–5] теория квантовых белых шумов была развита комбинированием исчислений Ито и Стратоновича, которые, по сути дела, основываются соответственно на виновом и вейлевом упорядочениях. Пределы слабой связи и низкой плотности [6] служат мотивацией для использования некоммутативной версии теорем Вонга–Закаи или Хасьминского. Отличительной чертой новой теории, присутствующей в традиционных подходах лишь неяв-

*Department of Mathematical Physics, National university of Ireland, Maynooth, Ireland. E-mail: jgough@thphys.may.ie

но, является то, что она позволяет сформулировать аналитически продолженное исчисление Стратоновича.

Такое исчисление основывается, грубо говоря, на некоммутативном обобщении того факта, что приращение процесса X_t относительно процесса $Z(t)$ имеет вид

$$X_t d_S Z(t) \equiv X_t (Z(t + \kappa dt) - Z(t - \bar{\kappa} dt)), \quad (1.1)$$

где $\kappa = \gamma/2 + i\sigma$. Если $\sigma = 0$, то мы имеем дело со стандартной теорией Стратоновича. Постоянная γ положительна и играет роль коэффициента диффузии для шума. Ее можно сделать равной единице.

В этой работе мы обсуждаем физическое значение параметра σ и приводим пример процесса отражения [7], для которого преобразование исчисления Ито в исчисление Стратоновича сингулярно при $\sigma = 0$.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ СТРАТОНОВИЧА

В [3] были введены процессы белого шума $a^\sharp(t)$, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$[a(t), a^\dagger(s)] = \kappa \delta_+(t - s) + \bar{\kappa} \delta_-(t - s) =: \Delta_F(t - s). \quad (2.1)$$

Правая часть — это распределение $\Delta_F(t - s)$ на пространстве кусочно-гладких функций [8]. По определению имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\pm(t - s) f(s) ds = f(t^\pm). \quad (2.2)$$

В частности, Δ_F возникает как предел фейнмановского пропагатора для квантов окружающей среды. Расширение на кусочно-гладкие функции (а, скажем, не на шварцевские) позволяет в качестве пробных функций ввести ступенчатые функции, и, следовательно, (2.1) включает всю информацию, содержащуюся в причинных соотношениях.

Пара a_t и $a_t^\dagger$ является сопряженной на бозонном фоксовском пространстве кусочно-гладких пробных функций. Унитарный процесс U_t задан как решение задачи Коши для квантового стохастического дифференциального уравнения (КСДУ) $\dot{U}_t = -i\Upsilon_t U_t$, $U_0 = 1$, в котором стохастический гамильтониан должен быть взят в виде $\Upsilon_t = Ea^\dagger(t)a(t) + Fa^\dagger(t) + F^\dagger a(t) + H$, где E , F и H — ограниченные операторы в фиксированном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0$, E и H — самосопряженные операторы.

ТЕОРЕМА 1. *Процесс U_t удовлетворяет перестановочным соотношениям*

$$\begin{aligned} [a(t), U_s] &= \begin{cases} 0, & t > s, \\ -i\kappa(Ea(t) + F)U_t, & t = s, \\ -i\gamma U_s U_t^\dagger (Ea(t) + F)U_t, & t < s, \end{cases} \\ [a^\dagger(t), U_s] &= \begin{cases} 0, & t > s, \\ i\bar{\kappa}(Ea^\dagger(t) + F^\dagger)U_t, & t = s, \\ i\gamma U_s U_t^\dagger (Ea^\dagger(t) + F^\dagger)U_t, & t < s. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T обозначает временное упорядочение. Процесс U_t может быть записан как

$$T \exp \int_0^t dv \Upsilon_v U_v,$$

и при $t < s$ имеем

$$U_s U_t^\dagger = T \exp \int_t^s dv \Upsilon_v U_v.$$

Можно также записать

$$U_t = 1 - i \int_0^t dv \Upsilon_v U_v.$$

Ясно, что U_s не зависит от $a^\sharp(t)$ при $s < t$. Заметим, что $[a(t), \Upsilon_v] = (Ea(v) + F)[a(t), a^\dagger(u)]$. При $s = t$ имеем

$$[a(t), U_t] = -i \int_0^t dv [a(t), \Upsilon_v] U_v.$$

Отметим, что $[a(t), U_v] = 0$ при $t < u$. Из перестановочных соотношений (2.1) следует, что лишь половина распределения дает вклад из-за ограничения области интегрирования. Следовательно, $[a(t), U_t] = -\kappa(Ea(t) + F)U_t$.

При $t > s$ имеем

$$[a(t), U_s] = -i \int_0^s dv \{ [a(t), \Upsilon_v] U_v + \Upsilon_v [a(t), U_v] \}.$$

В первый член подынтегрального выражения вносят вклад оба δ -распределения из (2.1). Во втором члене мы видим, что область интегрирования в действительности есть интервал (t, s) , поскольку коммутатор $[a(t), U_v]$ обращается в нуль при $u < t$. Следовательно,

$$\begin{aligned} [a(t), U_s] &= -i\gamma(Ea(t) + F)U_t - i \int_t^s dv \Upsilon_v [a(t), U_v] = \\ &= -i\gamma \left\{ 1 - i \int_t^s dv_1 \Upsilon_{v_1} + \right. \\ &\quad \left. + (-i)^2 \int_t^s dv_1 \int_t^{v_1} dv_2 \Upsilon_{v_1} \Upsilon_{v_2} + \dots \right\} (Ea(t) + F)U_t. \end{aligned}$$

Если суммировать ряд, то получим $U_s U_t^\dagger$, что и требовалось.

Для второго набора коммутаторов доказательство аналогично.

Свойства U_t , установленные в теореме 1, подобны свойствам, которыми обладают входные процессы, исследованные Гардином в разделе 5.3 работы [9]. Однако эти входные процессы получены из “горячей ванны”, которая имеет спектр, содержащий все вещественные частоты, и соответствуют первому марковскому приближению. Следовательно, подход Гардинера имеет дело только с вещественными значениями κ .

ТЕОРЕМА 2. КСДУ для процесса U_t можно представить в виде

$$\dot{U}_t = \left(1, \frac{1}{\sqrt{\gamma}}a^\dagger(t)\right) \begin{pmatrix} -i\tilde{H} - \frac{1}{2}L^\dagger L & L \\ -WL^\dagger & W - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{\gamma}}a(t) \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

где

$$W = \frac{1 - i\kappa E}{1 + i\kappa E}, \quad L = -i\sqrt{\gamma}F^\dagger(1 + i\kappa E)^{-1}, \quad \tilde{H} = H + F^\dagger \frac{\sigma - |\kappa|^2 E}{1 + |\kappa|^2 E^2} F. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если выполнить все умножения в уравнении (2.4), то это уравнение станет нормально-упорядоченной формой КСДУ, т.е. со всеми $a^\dagger(t)$ слева и $a(t)$ справа. Нормальное упорядочение делается с учетом одновременного коммутационного соотношения

$$a(t)U_t = U_t a(t) = (1 + i\kappa E)^{-1} \{U_t a(t) - i\kappa F U_t\}.$$

Используя это равенство и его эквивалент для $[a^\dagger(t), U_t]$, получаем (2.4).

Процесс $(X_t)_t$ называется неупреждающим, если $[X_t, a^\dagger(s)] = 0$ при $s > t$. Нормально-упорядоченная форма КСДУ может быть описана как КСДУ Хадсона–Партасарати при следующих условиях:

$$\begin{aligned} X_t \otimes dA_t^0 &\equiv \frac{1}{\gamma}a^\dagger(t)X_t a(t) dt, & X_t \otimes dA_t^\dagger &\equiv \frac{1}{\sqrt{\gamma}}a^\dagger(t)X_t dt, \\ X_t \otimes dA_t &\equiv \frac{1}{\sqrt{\gamma}}X_t a(t) dt, & X_t \otimes dt &= X_t dt, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где A_t^0 – консервативный (калибровочный) процесс, $A_t^\dagger$ и A_t – процессы рождения и уничтожения. Таким образом, КСДУ (2.4) приобретают вид

$$dU_t = (W - 1)U_t \otimes dA_t^0 - WL^\dagger U_t \otimes dA_t^\dagger + LU_t \otimes dA_t - \left(i\tilde{H} + \frac{1}{2}L^\dagger L\right)U_t \otimes dt,$$

который, поскольку оператор W из (2.5), очевидно, унитарный и $\tilde{H}$ самосопряженный, определяет унитарный квантовый стохастический процесс на фоковском пространстве (с $\mathcal{H}_0$ в качестве исходного пространства).

Заметим, что можно обратить $W = W(E)$ и получить равенство

$$E = -\frac{W - 1}{\sigma(W - 1) - \frac{i}{2}\gamma(W + 1)}. \quad (2.7)$$

В частности, если $E = 0$, то $W = 1$. В этой ситуации (восстанавливая σ) имеем уравнение Гейзенберга для $X_t := U_t^\dagger X U_t$, $X \in B(\mathcal{H}_0)$, вида $\dot{X}_t = \dot{U}_t^\dagger X U_t + U_t^\dagger X \dot{U}_t$ или после нормального упорядочения

$$\dot{X}_t = (a^\dagger(t) + i\kappa F_t^\dagger) \frac{1}{i} [X_t, F_t] + \frac{1}{i} [X_t, F_t^\dagger] (a(t) - i\kappa F_t).$$

В частности, если принять, что $[F, F^\dagger] = 1$, то в силу унитарности имеем $[F_t, F_t^\dagger] = 1$ при всех $t > 0$ и, следовательно, $\dot{F}_t = -ia(t) - \kappa F_t$, откуда

$$F_t = F e^{-\kappa t} + i \int_0^t dv e^{-\kappa(t-v)} a_v.$$

В результате, используя (2.1), получаем

$$[F_t, F_s^\dagger] = e^{-\gamma|t-s|} e^{i\sigma(t-s)}. \quad (2.8)$$

Параметр σ представляет собой некоторое частотное слагаемое в автокорреляционной функции для $F_t^\sharp$. Вообще, $\tilde{H} = H + \sigma F^\dagger F$. Поэтому σ – коэффициент сдвига энергии, вызванного радиационным демпфированием системы со стороны шума. С физической точки зрения это причина хорошо известного лэмбовского сдвига.

3. ПРОЦЕСС ОТРАЖЕНИЯ

Если рассматривать только стандартные представления шума Стратоновича, т.е. с $\sigma = 0$, то унитарный оператор W связан с E соотношением

$$E = -\frac{i}{2} \frac{W - 1}{W + 1}.$$

Оно, очевидно, сингулярно при $W = -1$. Это означает, что хотя КСДУ Хадсона–Партасарати с $W = -1$ хорошо определено, для него не существует стандартного представления Стратоновича. Процесс отражения J_t является неупреждающим унитарным процессом, заданным как решение КСДУ

$$dJ_t = -2J_t \otimes dA_t^0, \quad J_0 = 1. \quad (3.1)$$

Процесс отражения J_t был введен в [7] для того, чтобы получить фермионные стохастические переменные из бозонных. Процесс J_t называется также процессом четности. Подробное изложение его значения для суперсимметрии имеется в [10]. Процесс отражения может быть явным образом представлен в виде

$$J_t = e^{i\pi A_t^0} = T e^{-2A_t^0} = \Gamma_+(-\hat{\chi}_{[0,t]} + \hat{\chi}_{(t,\infty)}).$$

Здесь $\Gamma_+(e^{i\Theta}) \equiv e^{iA^0(\Theta)}$ – вторичное квантование некоторого унитарного оператора $V = e^{i\Theta} \in L^2[0, \infty)$. Процесс J_t обладает свойствами $J_t^2 = 1$, $[J_t, J_s] = 0$ и $J_t \Psi = \Psi$, где Ψ – фоковский вакуум.

Стохастические интегралы

$$F_t^\sharp := \int_0^t J_v \otimes dA_v^\sharp$$

являются фермионами, т.е. $\{F_s, F_t^\dagger\} = t \wedge s$. Действительно, Хадсон и Партасарати показали, что dF_t , $dF_t^\dagger$ и dA_t^0 — дифференциалы, которые порождают фермионное исчисление Ито, обобщающее (за счет включения консервативного процесса) исчисление из работы [11].

С нашей точки зрения процесс отражения удовлетворяет КСДУ

$$\dot{J}_t = -2a^\dagger(t)J_t a(t). \quad (3.2)$$

Если $a^\sharp(t)$ удовлетворяет перестановочным соотношениям (2.1), то, поскольку $W = -1$, мы получаем из (2.7), что $E \equiv -1/\sigma$. Следовательно, необходимо принять, что $\sigma \neq 0$. Пусть для простоты $\gamma = 1$. Уравнение (3.2) в форме Стратоновича имеет вид

$$\dot{J}_t = -\frac{i}{\sigma}a^\dagger(t)a(t)J_t. \quad (3.3)$$

ТЕОРЕМА 3. *Процесс отражения удовлетворяет перестановочным соотношениям*

$$\begin{aligned} [a(t), J_s] &= \begin{cases} 0, & t > s, \\ -(1 + i2\sigma)J_t a(t), & t = s, \\ -2J_s a(t), & t < s, \end{cases} \\ [a^\dagger(t), J_s] &= \begin{cases} 0, & t > s, \\ (1 - 2i\sigma)a^\dagger(t)J_t, & t = s, \\ -2J_s a^\dagger(t), & t < s. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Процесс J_t неупреждающий и поэтому коммутирует с последующими $a^\sharp(\cdot)$. При равных временах мы имеем

$$[a(t), J_t] = -2 \int_0^t dv [a(t), a^\dagger(v)J_v a(v)] = -2 \left(\frac{1}{2} + i\sigma \right) J_t a(t).$$

При $t < s$ мы рассуждаем, как при доказательстве теоремы 1. Используя КСДУ (3.3), получаем

$$\begin{aligned} [a(t), J_s] &= -\frac{i}{\sigma} \left[a(t), \int_0^s du \{ [a(t), a^\dagger(u)]a(u)J_u + a^\dagger(u)a(u)[a(t), J_u] \} \right] = \\ &= -\frac{i}{\sigma} \left\{ a(t)J_t + \int_t^s du a^\dagger(u)a(u)[a(t), J_u] \right\} = \\ &= -\frac{i}{\sigma} \left\{ 1 + \left(\frac{-i}{\sigma} \right) \int_t^s du_1 a^\dagger(u_1)a(u_1) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{-i}{\sigma} \right)^2 \int_t^s du_1 \int_t^{u_1} du_2 a^\dagger(u_1)a(u_1)a^\dagger(u_2)a(u_2) + \dots \right\} a(t)J_t = \\ &= -\frac{i}{\sigma} T \exp \left(-\frac{i}{\sigma} \int_t^s du a^\dagger(u)a(u) \right) a(t)J_t \equiv \\ &\equiv -\frac{i}{\sigma} J_s J_t a(t) J_t. \end{aligned}$$

Умножая получившееся равенство $[a(t), J_s] = -iJ_s J_t a(t) J_t / \sigma$ слева на J_t , получаем $J_t a(t) J_t = -2i\sigma a(t)$, и, следовательно, $[a(t), J_s] = -2J_s a(t)$.

Второй набор соотношений выводится аналогично.

СЛЕДСТВИЕ. Шумы $a^\sharp(t)$ и процесс отражения J_t связаны соотношениями

$$\begin{aligned} a^\sharp(t) J_s &= +J_s a^\sharp(t) \quad (t > s), \\ a^\sharp(t) J_s &= -J_s a^\sharp(t) \quad (t < s), \end{aligned}$$

а при равных временах

$$\begin{aligned} a(t) J_t &= -2i\sigma J_t a(t), \\ J_t a^\dagger(t) &= 2i\sigma a^\dagger(t) J_t. \end{aligned} \tag{3.5}$$

4. ФЕРМИОННЫЕ ШУМОВЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

В работе [7] показано, что можно получить фермионные переменные из бозонных. Это возможно на уровне квантового белого шума при условии, что мы используем шумовые поля $a^\sharp(t)$, аналитически продолженные в точку $\kappa = \gamma/2 + i\sigma$ при $\sigma \neq 0$. Пусть

$$f(t) = J_t a(t), \quad f_t^\dagger = a^\dagger(t) J_t. \tag{4.1}$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$f(t) f^\dagger(s) = J_t a(t) a^\dagger(s) J_s = J_t a^\dagger(s) a(t) J_s + \Delta(t-s) J_t J_s.$$

Однако $J_t a^\dagger(s) a(t) J_s = -a^\dagger(s) J_t J_s a(t)$, поскольку в силу (3.5) только одна из двух перестановок приводит к изменению знака. Так как J_t и J_s коммутируют, имеем $f(t) f^\dagger(s) = -f^\dagger(s) f(t) + \Delta_F(t-s) J_t J_s$, но $\Delta_F(t-s) J_t J_s \equiv \Delta_F(t-s) J_t^2 = \Delta_F(t-s)$. Следовательно, шумовые переменные $f^\sharp(t)$ удовлетворяют антиперестановочным соотношениям

$$\{f(t), f^\dagger(s)\} = \Delta_F(t-s). \tag{4.2}$$

В таком представлении становятся очевидными несколько важных свойств шумов. Во-первых, мы замечаем, что причина, по которой бозонный консервативный процесс служит также фермионным, заключается в том, что для шумов справедливо равенство [7]

$$f^\dagger(t) f(t) dt = a^\dagger(t) J_t J_t a(t) dt = a^\dagger(t) a(t) dt. \tag{4.3}$$

Кроме того, обратные соотношения имеют вид

$$a(t) = J_t f(t), \quad a^\dagger(t) = f^\dagger(t) J_t, \tag{4.4}$$

т.е. мы можем выразить бозонные шумы через фермионные.

5. ПЛОТНОСТИ КВАНТОВЫХ ШУМОВ

Чтобы продемонстрировать, как перестановочные соотношения (2.1) возникают на практике, мы исследуем общее описание марковских приближений для нескольких типов квантовых открытых систем [12].

Пусть $\mathcal{H}_S$ – гильбертово пространство некоторой системы S и $\mathcal{H}_R$ – гильбертово пространство резервуара R , содержащего систему S . Предполагается, что $\mathcal{H}_R = \Gamma_-(\mathcal{H}_R^1)$ – бозонное фоковское пространство над одночастичным пространством $(\mathcal{H}_R^1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$. Пусть для каждого натурального n имеем $\mathcal{K}_n \subset H_R^1$, и $\mathbf{g} = (g_n)_n$ – последовательность пробных функций с $g_n \in C(\mathbf{R}, \mathcal{K}_n)$. Обозначим символом $A_R^\sharp(\cdot)$ оператор рождения или уничтожения в $\mathcal{H}_R$. Положим

$$a_n^\sharp(\mathbf{g}, t) := A_R^\sharp(g_n(t))$$

и

$$A_n^\sharp(\mathbf{g}, t) := \int_0^t ds a_n^\sharp(\mathbf{g}, s) = A_R^\sharp\left(\int_0^t ds g_n(s)\right). \quad (5.1)$$

Последний интеграл можно понимать в смысле Бохнера.

Выберем семейство $\mathcal{T}$ последовательностей таких, что для каждого $\mathbf{g}, \mathbf{f} \in \mathcal{T}$ существует интегрируемая функция $G_{\mathbf{g}, \mathbf{f}}$ такая, что

$$\langle g_n(t), f_n(s) \rangle_1 \equiv n G_{\mathbf{g}, \mathbf{f}}(n(t-s)). \quad (5.2)$$

В среднем $\langle \cdot \rangle_0 = \langle \Psi_R, \cdot \Psi_R \rangle$ (или в более общем смысле полуторалинейных форм от коллективных когерентных состояний $\Psi_R(h_n)$ с $\mathbf{h} \in \mathcal{T}$) операторы $A_n^\sharp(\mathbf{g}, t)$ сходятся к квантовым винеровским процессам типа Хадсона–Партасарати с ковариацией

$$[A(\mathbf{g}, t), A^\dagger(\mathbf{f}, s)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t dt' \int_0^s ds' n G_{\mathbf{g}, \mathbf{f}}(n(t' - s')) = t \wedge s \gamma_{\mathbf{g}, \mathbf{f}}, \quad (5.3)$$

где

$$\gamma_{\mathbf{g}, \mathbf{f}} := \int_{-\infty}^{\infty} d\tau G_{\mathbf{g}, \mathbf{f}}(\tau). \quad (5.4)$$

Однако среднее значение $\langle \int_0^t dA(\mathbf{g}, t') A^\dagger(\mathbf{f}, t') \rangle_{\text{Фок}}^+$ получается как предел

$$\begin{aligned} & \left\langle \int_0^t dt' \int_0^{t'} ds' a(g_n(t')) a^\dagger(f_n(s')) \right\rangle_0 = \\ & = \int_0^t dt' \int_0^{t'} ds' n G_{\mathbf{g}, \mathbf{f}}(n(t' - s')) \rightarrow t \kappa_{\mathbf{g}, \mathbf{f}}^+, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где

$$\kappa_{\mathbf{g}, \mathbf{f}}^+ := \int_0^\infty d\tau G_{\mathbf{g}, \mathbf{f}}(\tau). \quad (5.6)$$

Аналогичным образом находим

$$\left\langle \int_0^t A(\mathbf{g}, t') dA^\dagger(\mathbf{f}, t') \right\rangle_{\text{Fock}} \equiv t\kappa_{\mathbf{g}, \mathbf{f}}^-,$$

где

$$\kappa_{\mathbf{g}, \mathbf{f}}^- := \int_{-\infty}^0 d\tau G_{\mathbf{g}, \mathbf{f}}(\tau).$$

Заметим, что $\gamma = \kappa^+ + \kappa^-$.

Вышесказанное обобщается на произвольные повторные интегралы способом, который можно резюмировать, сказав, что операторы $a_n^\sharp(\mathbf{g}, t)$ сходятся к процессам белого шума $a^\sharp(\mathbf{g}, t)$ с перестановочными соотношениями

$$[a(\mathbf{g}, t), a^\dagger(\mathbf{f}, s)] = \kappa_{\mathbf{g}, \mathbf{f}}^+ \delta_+(t - s) + \kappa_{\mathbf{g}, \mathbf{f}}^- \delta_-(t - s), \quad (5.7)$$

где $\delta_\pm$ — функционалы, введенные в (2.2) на пространстве кусочно-гладких пробных функций. Заметим, что все повторные интегралы могут быть представлены как интегралы от кусочно-гладких пробных функций. Пространство кусочно-гладких функций всюду плотно в гильбертовом пространстве квадратично интегрируемых функций и инвариантно относительно проецирований на компакты. Поэтому они образуют допустимое подпространство в смысле Хадсона–Партасарати и рассматриваемые нами КСДУ зависят от выбора допустимых подпространств. Следовательно, в таком пространстве эволюция стабильна. Соотношения (5.7) содержат всю информацию о хаотических разложениях предельных шумовых процессов.

Вышесказанное можно интерпретировать как квантовую функциональную центральную предельную теорему, сердцевиной которой является сохранение при переходе к пределу формы теоремы Вика для нормального упорядочения в отношении к временному упорядочению.

Пример 1. Пределы слабой связи и низкой плотности. Пусть $\mathcal{H}_R^1$ сепарабельно и $S_t = e^{i\Omega t}$ — унитарный оператор в $\mathcal{H}_R^1$, Ω — самосопряженный оператор в $\mathcal{H}_R^1$. Пусть $\mathcal{T}$ — пространство всех последовательностей $\mathbf{g} = (g_n)_n$ таких, что

$$g_n(t) = \sqrt{n} S_{nt} g,$$

где g принадлежит фиксированному подпространству $\mathcal{K}$ пространства $\mathcal{H}_R^1$. Для $\mathbf{g}, \mathbf{f} \in \mathcal{T}$ имеем

$$\langle g_n(t), f_n(s) \rangle_1 = n \langle g, S_{-n(t-s)} f \rangle_1,$$

в силу чего $G_{\mathbf{g}, \mathbf{f}}(\tau) = \langle g, \exp[-i\Omega\tau] f \rangle_1$ и поэтому

$$\kappa_{\mathbf{g}, \mathbf{f}}^+ = \int_0^\infty d\tau \langle g, e^{-i\Omega\tau} f \rangle_1 = (\kappa_{\mathbf{f}, \mathbf{g}}^-)^*.$$

Здесь $\gamma_{\mathbf{f}, \mathbf{g}} = \pi \langle g, \delta(\Omega) f \rangle_1$ и $\mathcal{K}$ — фиксированное подпространство, так что $\langle \cdot, \delta(\Omega) \cdot \rangle_1$ при сужении на $\mathcal{K}$ определяет невырожденную полуторалинейную форму.

Пример 2. Предел сингулярного спаривания. Пусть $\mathcal{H}_R^1 = L^2(\mathbf{R})$ и $\mathcal{T}$ – пространство последовательностей $\mathbf{g} = (g_n)_n$, где $g_n(t) \in L^2(\mathbf{R})$ и

$$g_n(t) : \omega \mapsto g\left(\frac{\omega}{n}\right) e^{i\omega t},$$

g имеет интегрируемое преобразование Фурье. Теперь мы имеем ту же схему, что и прежде, но с

$$G_{\mathbf{g}, \mathbf{f}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega g(\Omega)^* f(\Omega) e^{-i\Omega\tau},$$

откуда

$$\kappa_{\mathbf{g}, \mathbf{f}}^+ = \int_0^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega g(\Omega)^* f(\Omega) e^{-i\Omega\tau}.$$

Комплексное демпфирование. Сингулярный предел является специальным случаем предела слабой связи и предела низкой плотности. Чтобы он был нетривиальным, требуется, чтобы спектр энергии был лебегов и состоял из всех вещественных частот Ω . В силу тождества

$$\int_0^{\infty} d\tau e^{-i\Omega\tau} = \pi\delta(\Omega) - iPV \frac{1}{\Omega}$$

коэффициенты $\kappa_{\mathbf{g}, \mathbf{g}}^{\pm}$ оказываются комплексными, причем

$$\kappa_{\mathbf{g}, \mathbf{g}} := \frac{1}{2} \gamma_{\mathbf{g}, \mathbf{g}} \pm i\sigma_{\mathbf{g}, \mathbf{g}}.$$

Соотношение между слабой связью и пределом сингулярного спаривания обсуждалось в работе [13].

Тот факт, что $\kappa \equiv \gamma/2 + i\sigma$ является, вообще говоря, комплексной величиной, хорошо известен в физической литературе под именем *комплексного демпфирования*. Как мы видели, для взаимодействий эмиссионно-абсорбционного типа, в которых лишь $F^{\sharp}$ не равно нулю в стохастическом гамильтониане Υ_t , вещественная часть γ дает демпфирование и обусловлена теми квантами резервуара, которые находятся на массовой поверхности, а σ выражает радиационный сдвиг энергии, вызванный виртуальными квантами резервуара. Эффект комплексного демпфирования для гармонической функции $F^{\sharp}$ представлен в формуле (2.8). Комплексное демпфирование в равной степени относится и к пределам малой плотности, когда имеет место рассеяние ($E \neq 0$), но нет эмиссии или абсорбции ($F = 0$).

6. ОБСУЖДЕНИЕ

Как было впервые отмечено в работе [3], формализмы Ито и Стратоновича в квантовом стохастическом исчислении можно переформулировать как виково и вейлево упорядочения операторов. В работе [4] это было продемонстрировано в специальном случае

$\kappa = 1/2$ и в общем случае — в работах [14, 15]. Общее рассмотрение базируется на теореме Вика и на замечаниях Хадсона и Стритера [16], относящихся к алгебраическому следствию викового упорядочения в квантовом стохастическом анализе.

Первая трактовка квантовых стохастических явлений, использующая исчисление Стратоновича, была предпринята фон Вальденфельсом [17]. Он исследовал эмиссионно-абсорбционное КСДУ. Затем Гардинер [9] исследовал входные процессы, которые управляют эмиссионно-абсорбционными КСДУ, и разработал подходы Ито и Стратоновича. Он рассматривал, главным образом, уравнения в пределе сингулярного спаривания и вещественной константы κ . Это эквивалентно так называемому первому марковскому приближению.

Явный вид предельного КСДУ для унитарных эволюций, получающихся для эмиссии-абсорбции (предел слабого спаривания) и для рассеяния (предел низкой плотности), известен довольно давно [12]. Такие уравнения включают последовательности пробных функций, которые приводят к комплексным коэффициентам κ и которые, как упомянуто в [3], удобно описывать в терминах белых шумов, удовлетворяющих причинным перестановочным соотношениям типа (2.1).

Чеботарев [18] представил теорию стандартных ($\kappa = 1/2$) процессов Стратоновича, к которой сводится уравнение (2.4), выступающее как соотношение между операторными коэффициентами, полученными в слабом и сильном резольвентном пределах. Здесь проявляется предел сингулярного спаривания, что должно привести к комплексной константе κ . Анализ Чеботарева, однако, не вполне корректен, и его главная теорема не включает комплексное демпфирование. Результаты Чеботарева могут быть верными, только если последовательности пробных функций удовлетворяют дополнительным условиям, в силу которых константа κ оказывается вещественной. Итак, Чеботарев не смог предложить правильное КСДУ Ито для стохастического предела в специальных случаях слабого спаривания или низкой плотности [12]. Главный дефект — это использование леммы 3.1 из [12], в которой делается незаконный предельный переход под знаком интеграла, что приводит только к вещественному коэффициенту демпфирования, как в (5.3), вместо надлежащего комплексного коэффициента, как в (5.5).

Список литературы

- [1] *R. L. Hudson, K. R. Parthasarathy.* Commun. Math. Phys. 1984. V. 93. P. 301–323.
- [2] *G. Lindblad.* Commun. Math. Phys. 1976. V. 48. P. 19–30.
- [3] *Дж. Гоф.* ТМФ. 1997. Т. 111. № 2. С. 218–233.
- [4] *Дж. Гоф.* ТМФ. 1997. Т. 113. № 2. С. 276–284.
- [5] *J. Gough.* Asymptotic Stochastic Transformations for Non-Linear Quantum Dynamical Systems (to appear Rep. Math. Phys.).
- [6] *L. Accardi, J. Gough, Y. G. Lu.* Rep. Math. Phys. 1995. V. 36. № 2/3. P. 155–187.
- [7] *R. L. Hudson, K. R. Parthasarathy.* Commun. Math. Phys. 1986. V. 104. P. 457–470.
- [8] *J. Dieudonné.* Foundations of Modern Analysis. New York: Academic Press International Edition, 1968.
- [9] *C. W. Gardiner.* Quantum Noise. New York: Springer-Verlag, 1991.

- [10] *T. M. W. Eyre*. Quantum Stochastic Calculus and Representations of Lie Super Algebras. Lecture Notes in Mathematics 1692. Berlin: Springer, 1998.
- [11] *D. Applebaum*. Commun. Math. Phys. 1984. V. 96. P. 473–496.
- [12] *L. Accardi, Y. G. Lu, A. Frigerio, R. Alicki*. An invitation to the weak coupling and low density limit. In: Quantum Probability and Related Topics VI. Ed. L. Accardi. Singapore: World Scientific, 1991. P. 3–31.
- [13] *L. Accardi, A. Frigerio, Y. G. Lu*. Acta Appl. Math. 1992. V. 26. P. 197–208.
- [14] *J. Gough*. Asymptotic Stochastic Transformations for Non-linear Quantum Dynamical Systems. (to appear in Rep. Math. Phys.).
- [15] *J. Gough*. Potential Anal. 1999. V. 11. № 3. P. 213–233.
- [16] *R. L. Hudson, R. F. Streater*. Phys. Lett. A. 1981. V. 86. P. 277.
- [17] *W. von Waldenfels*. Ito Solution of the Linear Quantum Stochastic Differential Equation describing Light Emission and Absorption. In: Lect. Notes in Math. V. 1055. Quantum Probability and Applications to the Quantum Theory of Irreversible Processes. Proc. Int. Workshop Held at Villa Mondragone, Italy, Sept. 6–11, 1982. Eds. L. Accardi, A. Frigerio, V. Gorini. Berlin: Springer, 1984. P. 384–411.
- [18] *А. М. Чеботарев*. Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 4. С. 612–622.

Поступила в редакцию 10.XII.1998 г.,
после доработки 8.IV.1999 г.