Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Магазев, И. В. Широков, Ю. А. Юревич, Интегрируемые магнитные геодезические потоки на группах Ли, *ТМФ*, 2008, том 156, номер 2, 189–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6240>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 17:54:50

© 2008 г. А. А. Магазёв*, И. В. Широков*, Ю. А. Юревич†

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МАГНИТНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОТОКИ НА ГРУППАХ ЛИ

Рассмотрены правоинвариантные магнитные геодезические потоки на многообразиях групп Ли, ассоциированные с 2-коциклами соответствующих алгебр Ли. Исследована алгебра интегралов движения магнитных геодезических потоков, а также сформулировано необходимое и достаточное условие их интегрируемости в квадратурах. Приведены канонические формы 2-коциклов всех четырехмерных алгебр Ли и выделены интегрируемые случаи.

Ключевые слова: группа Ли, алгебра Ли, коцикл, магнитный геодезический поток, интеграл движения, скобка Пуассона.

1. ВВЕДЕНИЕ

Интегрирование геодезических потоков на римановых и псевдоримановых многообразиях – раздел современной математики и механики, имеющий длительную историю. Однако несмотря на то что многие важные и фундаментальные факты в данной области были получены классиками еще в прошлом веке, данное направление не теряет своей актуальности и продолжает развиваться и по сей день. Действительно, о повышенном внимании специалистов к данной области можно судить по сравнительно большому числу публикаций, появившихся в последнее время (см., к примеру, [1] и цитируемую там литературу). Особый интерес при этом представляют новые примеры интегрируемых геодезических потоков, а также классы многообразий или метрик, допускающих подобные потоки.

Помимо классических геодезических потоков, описывающих движение свободной частицы в римановом (псевдоримановом) пространстве, в последнее время возрос интерес исследователей и к так называемым *магнитным геодезическим потокам*, которые можно трактовать как уравнения движения частицы на римановом (псевдоримановом) многообразии в присутствии внешнего магнитного (электромагнитного) поля. В этой связи следует отметить два основных подхода, использующихся для

*Иртышский филиал ФГОУ ВПО Новосибирская государственная академия водного транспорта, Омск, Россия. E-mail: magazev@mail.ru, iv_shirokov@mail.ru

†Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, Омск, Россия.
E-mail: yury@yurevich.ru

описания геодезического движения во внешнем поле. В первом подходе, принятом в основном в теоретической физике, электромагнитное поле описывается с помощью *векторного потенциала*, представляющего собой некоторую 1-форму A на многообразии, внешний дифференциал которой есть тензор Фарадея электромагнитного поля $F = dA$. В этом случае уравнения геодезического движения изменяются путем введения новых импульсов P_i , которые связаны со старыми импульсами следующим образом: $P_i = p_i + eA_i$. Во втором подходе, который является более геометризованным, а потому, несомненно, более изящным, электромагнитное поле на многообразии M “включается” с помощью деформации канонической скобки Пуассона или, что то же самое, с помощью деформации естественной симплектической формы ω кокасательного расслоения T^*M : $\omega \rightarrow \omega + e\pi^*(F)$, где F – замкнутая 2-форма на M , а π – естественная проекция $T^*M \rightarrow M$ [2]. Очевидно, что второй способ описания имеет более общий характер, хотя, как следует из леммы Пуанкаре, локально оба подхода являются эквивалентными.

Настоящая статья посвящена проблеме интегрирования магнитных геодезических потоков на многообразиях групп Ли с правоинвариантными псевдоримановыми метриками. Несмотря на то что мы исследуем частный случай однородных пространств (группы Ли), тем не менее класс интегрируемых магнитных геодезических потоков на них оказывается весьма широким. Действительно, в настоящей работе рассматриваются *произвольные* замкнутые правоинвариантные 2-формы на группах Ли, ассоциированные с соответствующими пространствами 2-коциклов алгебр Ли. Частным случаем предлагаемой нами теории являются магнитные геодезические потоки, связанные с тривиальными 2-коциклами, ограничение которых на орбиты коприсоединенного действия представляет собой хорошо известные формы Кириллова. До настоящего времени в большинстве работ по данной тематике рассматривались именно такие случаи (см., к примеру, [3]–[5]), хотя нетривиальные коциклы представляют с точки зрения интегрирования гораздо больший интерес. В частности, как будет показано в настоящей статье, для произвольной алгебры и некоторого 2-коцикла на ней можно ввести так называемый *когомологический индекс*, обобщающий понятие обычного индекса алгебры Ли и позволяющий сформулировать критерий интегрируемости магнитных геодезических потоков в квадратурах. На основе данного критерия мы выделяем все интегрируемые случаи среди четырехмерных групп Ли, а также приводим канонические формы соответствующих 2-коциклов.

2. МАГНИТНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОТОКИ НА ГРУППАХ ЛИ С ПРАВОИНВАРИАНТНЫМИ МЕТРИКАМИ

Пусть G – связная вещественная n -мерная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Обозначим через ρ^L левое регулярное представление алгебры $\mathfrak{g}$, действующее на функциях из $C^\infty(G)$. Ввиду того что генераторы левого регулярного представления группы G представляют собой правоинвариантные векторные поля, действие оператора представления ρ^L можно представить в виде

$$\rho^L(X)\varphi(g) = \eta_X(\varphi), \quad \varphi \in C^\infty(G),$$

где $\eta_X \equiv -(R_g)_*X$ – правоинвариантное векторное поле в направлении вектора $X \in \mathfrak{g}$.

Обозначим через $\mathbf{C}^2(\mathfrak{g}; C^\infty(G))$ линейное пространство 2-коцепей над модулем $C^\infty(G)$, т.е. пространство билинейных кососимметрических функций на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ со значениями в $C^\infty(G)$. Произвольной 2-коцепи $\mathbf{F} \in \mathbf{C}^2(\mathfrak{g}; C^\infty(G))$ взаимно однозначно соответствует дифференциальная 2-форма $F \in \Omega^2(G)$ на группе G , действующая на произвольных касательных векторах $\mu, \nu \in T_g G$ по формуле

$$F(\mu, \nu) = \mathbf{F}((R_{g^{-1}})_*\mu, (R_{g^{-1}})_*\nu)(g). \quad (1)$$

Рассмотрим замкнутую форму F такую, что $dF = 0$. В этом случае соответствующая 2-коцепь $\mathbf{F}$ удовлетворяет условию

$$\sum_{[XYZ]} \eta_X(\mathbf{F}(Y, Z)) + \mathbf{F}(X, [Y, Z]) = 0, \quad (2)$$

где суммирование осуществляется по всем циклическим перестановкам произвольных векторов $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Полученное условие более компактно записывается в терминах *кограничного оператора* $\delta: \mathbf{C}^k(\mathfrak{g}; C^\infty(G)) \rightarrow \mathbf{C}^{k+1}(\mathfrak{g}; C^\infty(G))$, для которого $\delta^2 = 0$ [6]. Действительно, можно показать, что равенство (2) в этом случае эквивалентно условию $\delta\mathbf{F} = 0$, а 2-коцепь $\mathbf{F}$ представляет собой так называемый 2-коцикл. Множество всех 2-коциклов над модулем $C^\infty(G)$ является подпространством в $\mathbf{C}^2(\mathfrak{g}; C^\infty(G))$ и обозначается через $\mathbf{Z}^2(\mathfrak{g}; C^\infty(G))$. Далее мы будем рассматривать только замкнутые 2-формы.

Зафиксируем некоторый базис $\{e_A\}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и соответствующий дуальный базис $\{e^A\}$ в коалгебре $\mathfrak{g}^*$: $\langle e^A, e_B \rangle = \delta_B^A$, $A, B = 1, \dots, n$. В выбранном базисе 2-коцикл $\mathbf{F}$ запишется в виде

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \mathbf{F}_{AB}(g) e^A \wedge e^B, \quad \mathbf{F}_{AB}(g) \equiv \mathbf{F}(e_A, e_B),$$

а условие коцикличности (2) – в виде

$$\sum_{[ABC]} \eta_A(\mathbf{F}_{BC}) + C_{AB}^D \mathbf{F}_{CD} = 0. \quad (3)$$

Здесь $\eta_A = -(R_g)_*e_A$ – базисные правоинвариантные векторные поля на G , C_{AB}^D – структурные константы алгебры Ли в заданном базисе. Пусть $\{x^i \mid i = 1, \dots, n\}$ – координаты элемента $g \in G$, тогда в этих координатах компоненты 2-формы F , соответствующей 2-коциклу $\mathbf{F}$, имеют вид

$$F_{ij}(x) = \mathbf{F}_{AB}(x) \sigma_i^A(x) \sigma_j^B(x), \quad (4)$$

где $\sigma_i^A(x)$ – компоненты базисной правоинвариантной 1-формы $\sigma^A(g) = -R_g^*e^A$.

Рассмотрим невырожденную квадратичную форму $\mathbf{G}$ на алгебре $\mathfrak{g}$, задающую псевдориманову метрику на группе G в единице. Действуя правыми сдвигами на форму $\mathbf{G}$, получим правоинвариантную метрику $\mathbf{G}_g^R = R_g^* \mathbf{G}$ на группе в произвольной точке $g \in G$:

$$\mathbf{G}_g^R(\mu, \nu) = \mathbf{G}((R_{g^{-1}})_*\mu, (R_{g^{-1}})_*\nu), \quad \mu, \nu \in T_g G. \quad (5)$$

В координатах компоненты правоинвариантной метрики легко выписываются через базисные правоинвариантные 1-формы $\sigma^A(x)$:

$$g_{ij}(x) = \mathbf{G}_{AB} \sigma_i^A(x) \sigma_j^B(x),$$

где $\mathbf{G}_{AB} = \mathbf{G}(e_A, e_B)$ – компоненты формы $\mathbf{G}$ в фиксированном базисе. Далее всюду в качестве метрики на многообразии группы Ли G (в общем случае псевдоримановой) мы будем рассматривать правоинвариантную метрику вида (5).

На кокасательном расслоении T^*G существует естественная симплектическая структура

$$\omega = dp_i \wedge dx^i, \quad (6)$$

определяющая на T^*G структуру симплектического многообразия. Произведем деформацию симплектической формы ω , отвечающую включению внешнего электромагнитного поля, описываемого замкнутой 2-формой (4):

$$\omega \rightarrow \Omega = \omega + e\pi^*(F). \quad (7)$$

Здесь π – естественная проекция $T^*G \rightarrow G$, а $e \in \mathbb{R}$ – некоторый вещественный параметр (заряд). Форма Ω в силу условия $dF = 0$ является замкнутой, а поэтому определяет в T^*G новую симплектическую структуру. Поставим в соответствие произвольной функции $\varphi \in C^\infty(T^*G)$ векторное поле $\mathcal{H}_\varphi$:

$$d\varphi(\zeta) = \Omega(\zeta, \mathcal{H}_\varphi), \quad \zeta \in T(T^*G),$$

и рассмотрим в пространстве функций $C^\infty(T^*G)$ скобку Пуассона, задаваемую с помощью структуры Ω по формуле

$$\{\varphi, \psi\} = -\Omega(\mathcal{H}_\varphi, \mathcal{H}_\psi). \quad (8)$$

В локальных координатах базисные скобки для (8) имеют вид

$$\{x^i, x^j\} = 0, \quad \{p_i, x^j\} = \delta_i^j, \quad \{p_i, p_j\} = e F_{ij}(x) \quad (9)$$

и, как легко видеть, являются деформациями соответствующих базисных скобок для обычной канонической скобки Пуассона, отвечающей стандартной форме ω .

Рассмотрим следующую функцию на кокасательном расслоении T^*G (гамильтониан):

$$H(x, p) = \frac{1}{2}|p|^2 = \frac{1}{2}g^{ij}(x)p_ip_j, \quad p \in T^*G. \quad (10)$$

Гамильтонова система с гамильтонианом (10) на симплектическом многообразии (T^*G, Ω) называется *магнитным геодезическим потоком на группе Ли, заданным формой F* , и в локальных координатах имеет вид

$$\frac{dx^i}{dt} = \{H, x^i\}, \quad \frac{dp_i}{dt} = \{H, p_i\}. \quad (11)$$

Функции из $C^\infty(T^*G)$, инвариантные относительно гамильтонового потока (11), называются *интегралами движения* магнитного геодезического потока. Очевидно, что таковой является любая функция $I(x, p)$, коммутирующая с гамильтонианом:

$$\frac{dI}{dt} = \{H, I\} = 0.$$

3. ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ПРАВОИНВАРИАНТНОГО ТЕНЗОРА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

В общем случае деформация симплектической структуры, отвечающая включению внешнего электромагнитного поля, может существенно изменить алгебру интегралов движения исходного геодезического потока. Понятно, что анализ общей ситуации является достаточно непростой задачей, так как в подавляющем большинстве случаев свойство интегрируемости исходного потока может теряться. Поэтому в настоящей работе мы ограничимся рассмотрением ситуации, когда включение поля оставляет количество исходных симметрий задачи неизменным.

Действие группы Ли G на себе правыми сдвигами индуцирует соответствующее действие группы на кокасательном расслоении $G: T^*G \rightarrow T^*G$, сохраняющее естественную симплектическую структуру (6). Тем не менее, в случае формы Ω , являющейся результатом деформации стандартной формы ω , действие группы G , вообще говоря, уже не является симплектическим. В этой связи рассмотрим правоинвариантную 2-форму F , т.е. $R_g^*F = F$. Легко показать, что в этом случае соответствующий 2-коцикл должен быть инвариантным относительно правого регулярного представления,

$$T_g^R \mathbf{F}(\cdot, \cdot) = \mathbf{F}(\cdot, \cdot), \quad g \in G, \quad (12)$$

и тем самым полностью определяться своим значением в единице группы. Множество всех 2-коциклов, удовлетворяющих условию (12), образует подпространство в $\mathbf{Z}^2(\mathfrak{g}; C^\infty(G))$, изоморфное пространству $\mathbf{Z}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ всех 2-коциклов над тривиальным модулем $\mathbb{R}$. В этом случае компоненты 2-коцикла $\mathbf{F}$ являются постоянными функциями, что позволяет значительно упростить условие коцикличности (3):

$$\sum_{[ABC]} C_{AB}^D \mathbf{F}_{CD} = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) является алгебраическим линейным однородным уравнением на компоненты 2-коцикла $\mathbf{F}$. Одним из решений этого уравнения является так называемый *тривиальный 2-коцикл* вида $\mathbf{F}_\lambda = \delta\lambda$, где $\lambda \in \mathfrak{g}^*$. Подобные 2-коциклы образуют подпространство $\mathbf{B}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R}) \subset \mathbf{Z}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ 2-кограниц алгебры $\mathfrak{g}$. Тривиальные 2-коциклы являются наиболее изученными примерами форм, описывающих электромагнитные поля на римановых G -пространствах [3]–[5], и с точки зрения интегрируемости представляют собой достаточно тривиальный случай. Действительно, как будет показано ниже, алгебра интегралов движения магнитных геодезических потоков, соответствующих тривиальным 2-коциклам, фактически изоморфна алгебре интегралов $\mathfrak{g}$ исходного геодезического потока в отсутствие поля.

Зададимся таким вопросом: чему равен векторный потенциал A , соответствующий тензору электромагнитного поля $F = dA$? На языке коцепей данный вопрос сводится к нахождению такой 1-коцепи $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^1(\mathfrak{g}; C^\infty(G))$, что $\delta\mathbf{A} = \mathbf{F}$, или, в более подробном виде,

$$\eta_X(\mathbf{A}(Y)) - \eta_Y(\mathbf{A}(X)) - \mathbf{A}([X, Y]) = \mathbf{F}(X, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (14)$$

Пусть $\mathbf{F} = \delta\lambda$ – тривиальный 2-коцикл. Очевидно, что общее решение уравнения (14) в этом случае будет иметь вид $\mathbf{A} = -\lambda + \delta\varphi$, где φ – произвольная функция из $C^\infty(G)$ (0-коцепь), а $\delta\varphi(X) \equiv \eta_X(\varphi)$. Далее будем считать, что 2-коцикл $\mathbf{F}$ в общем случае не тривиален.

Рассмотрим пространство $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{t}$, где $\dim \mathfrak{t} = 1$ и $\mathfrak{t}$ представляет собой центр алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$. Пусть Z – ненулевой элемент из $\mathfrak{t}$. Операция коммутирования в алгебре $\tilde{\mathfrak{g}}$ может быть задана с помощью коцикла $\mathbf{F}$ в виде

$$[X, Y]_{\mathbf{F}} = [X, Y] + \mathbf{F}(X, Y)Z \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (15)$$

Пусть $\tilde{G}$ – связная группа Ли с алгеброй Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$, являющаяся центральным расширением группы G с помощью замкнутого одномерного центра T . Рассмотрим функциональное пространство

$$\text{Ind}_{\mathbb{R}}^\infty(\tilde{G}) = \{\varphi \in C^\infty(\tilde{G}) \mid \varphi(t^{-1}\tilde{g}) = U(t)\varphi(\tilde{g}), \quad t \in T, \quad \tilde{g} \in \tilde{G}\}, \quad (16)$$

где $U(t)$ – одномерное непрерывное представление группы T . Определение (16) можно также записать в инфинитезимальной форме

$$\text{Ind}_{\mathbb{R}}^\infty(\tilde{G}) = \{\varphi \in C^\infty(\tilde{G}) \mid \tilde{\eta}_0(\varphi) = \varphi\}. \quad (17)$$

Здесь символом $\tilde{\eta}_0$ мы обозначили правоинвариантное векторное поле на группе $\tilde{G}$ в направлении вектора $\partial_t U|_{t=0} \in \mathfrak{t}$. Отметим, что $\text{Ind}_{\mathbb{R}}^\infty(\tilde{G})$ можно интерпретировать также как пространство гладких сечений векторного $\tilde{G}$ -расслоения с базой G и слоем $\mathbb{R}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Общее решение уравнения (14) имеет вид*

$$\mathbf{A}(X) = U^{-1}\tilde{\eta}_X(U)|_G + \delta\varphi(X), \quad (18)$$

где $\tilde{\eta}_X$ – правоинвариантное векторное поле на группе $\tilde{G}$ в направлении вектора $X \in \mathfrak{g}$, а φ – произвольная функция из $C^\infty(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фактически необходимо показать, что функция $U^{-1}\tilde{\eta}_X(U)|_G$ представляет собой частное решение уравнения (14), так как слагаемое $\delta\varphi$ является общим решением соответствующего однородного уравнения $\delta\mathbf{A} = 0$.

Введем обозначение $\mathbf{A}_1(X) \equiv U^{-1}\tilde{\eta}_X(U)|_G$ и для начала убедимся, что данная функция определена корректно на G . Действительно, так как $\text{Ind}_{\mathbb{R}}^\infty(\tilde{G})$ – пространство, инвариантное относительно левого регулярного представления группы $\tilde{G}$, действие произвольного правоинвариантного векторного поля $\tilde{\eta}_X$ на функцию $U(t)$, где $X \in \mathfrak{g}$, согласовано с определением (16), откуда

$$\tilde{\eta}_X(U) = U[U^{-1}\tilde{\eta}_X(U)], \quad (19)$$

где $U^{-1}\tilde{\eta}_X(U)$ – функция, не зависящая от точек слоя T , т.е. функция, постоянная на каждом классе смежности $G \simeq \tilde{G}/T$.

Далее, рассмотрим следующее операторное тождество, отражающее коммутационные соотношения алгебры Ли $\mathfrak{g}^R(\tilde{G})$ правоинвариантных векторных полей на группе $\tilde{G}$:

$$\tilde{\eta}_X \tilde{\eta}_Y - \tilde{\eta}_Y \tilde{\eta}_X = \tilde{\eta}_{[X,Y]} + \mathbf{F}(X,Y) \tilde{\eta}_0, \quad X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (20)$$

Поддействуем обеими частями этого тождества на функцию $U(t)$. Тогда, учитывая равенство (19), после домножения слева на функцию U^{-1} получаем

$$\tilde{\eta}_X(U^{-1} \tilde{\eta}_Y(U)) - \tilde{\eta}_Y(U^{-1} \tilde{\eta}_X(U)) = U^{-1} \tilde{\eta}_{[X,Y]}(U) + \mathbf{F}(X,Y). \quad (21)$$

Проектируя (21) на $G \simeq \tilde{G}/T$ и замечая, что $\tilde{\eta}_X|_G = \eta_X$, получаем окончательное равенство, выполняющееся тождественно для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$:

$$\eta_X(\mathbf{A}_1(Y)) - \eta_Y(\mathbf{A}_1(X)) = \mathbf{A}_1([X,Y]) + \mathbf{F}(X,Y),$$

где $\mathbf{A}_1(X) \equiv U^{-1} \tilde{\eta}_X(U)|_G$.

Таким образом, в формулировке доказанного утверждения мы приводим явную конструкцию 1-коцикла $\mathbf{A}$, соответствующая дифференциальная форма A которого есть векторный потенциал правоинвариантного тензора Фарадея (4). Сделаем, однако, следующее замечание. Так как в рамках данной работы мы не касаемся вопросов глобального характера, связанных с топологическими характеристиками группового многообразия G , формула (18) представляет собой лишь локальную конструкцию. Для изучения глобальных свойств 1-формы A требуется отдельное исследование, сводящееся к изучению второй группы когомологий $H^2(G) \simeq \mathbf{H}^2(\mathfrak{g}; C^\infty(G))$.

В заключение данного раздела приведем явные формулы для компонент коцепи $\mathbf{A}$ и соответствующего вектор-потенциала A . Для этого представим произвольный элемент группы $\tilde{G}$ в виде $\tilde{g} = s(g)t$, где $t \in T$, а $s(g)$ – гладкое локальное сечение $s: G \rightarrow \tilde{G}$ главного расслоения $(\tilde{G}, G, \tilde{\pi}, T)$, $\tilde{\pi} \circ s = \text{id}$. Пусть $\{x^0\}$ – локальные координаты в слое T , а $\{x^i \mid i = 1, \dots, n\}$ – координаты элемента g группы G . Тогда в этих координатах правоинвариантные векторные поля на группе $\tilde{G}$ имеют вид

$$\tilde{\eta}_0(x, x^0) = -\partial_{x^0}, \quad \tilde{\eta}_A(x, x^0) = \eta_A^i(x) \partial_{x^i} + \tilde{\eta}_A^0(x) \partial_{x^0}. \quad (22)$$

Выбирая представление группы T в виде $U(x^0) = e^{-x^0}$ и используя формулы (18) и (22), окончательно получаем

$$\mathbf{A}_A(x) = -\tilde{\eta}_A^0(x) + \eta_A(\varphi), \quad A_i(x) = -\tilde{\eta}_A^0(x) \sigma_i^A(x) + \nabla_i \varphi(x). \quad (23)$$

4. АЛГЕБРА ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ МАГНИТНОГО ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ПОТОКА

Перейдем к исследованию алгебры интегралов движения магнитного геодезического потока на группе G . Известно, что интегралами движения геодезического потока с произвольной правоинвариантной метрикой в отсутствие поля являются левоинвариантные функции вида

$$\xi_X^{\text{cl}}(x, p) \equiv p(\xi_X) = X^A \xi_A^i(x) p_i,$$

где $\xi_X = (L_g)_*X$ – левоинвариантное векторное поле на G в направлении вектора $X \in \mathfrak{g}$. Таким образом, алгебра интегралов движения геодезического потока с правоинвариантной метрикой (5) изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G . Несколько иная картина, однако, возникает в случае включения внешнего поля, задаваемого правоинвариантной формой (1). Легко видеть, что левоинвариантные функции $\xi_X^{\text{cl}}(x, p)$ перестают в этом случае быть интегралами движения магнитного потока (11). Действительно, функция $\zeta(x, p) \in C^\infty(T^*G)$ тогда и только тогда является интегралом движения геодезического потока с произвольной правоинвариантной метрикой, когда она коммутирует с произвольной правоинвариантной функцией $\eta_X^{\text{cl}}(x, p) \equiv p(\eta_X)$. Тем не менее

$$\{\eta_X^{\text{cl}}(x, p), \xi_Y^{\text{cl}}(x, p)\} = eF(\eta_X, \xi_Y),$$

и в общем случае это не равно нулю. Другими словами, действие группы на симплектическом многообразии T^*G с формой Ω не является *гамильтоновым*.

Рассмотрим деформацию произвольной левоинвариантной функции с помощью некоторой 1-коцепи $\mathbf{f} \in \mathbf{C}^1(\mathfrak{g}, C^\infty(G))$:

$$\xi_X^{\text{cl}}(x, p) \rightarrow \zeta_X(x, p) = \xi_X^{\text{cl}}(x, p) + e\mathbf{f}(X), \quad X \in \mathfrak{g}.$$

Легко показать, что, для того чтобы функции $\zeta_X(x, p)$ являлись интегралами движения магнитного геодезического потока (11), необходимо и достаточно потребовать выполнения равенства

$$\eta_X(\mathbf{f}(Y)) + F(\eta_X, \xi_Y) = 0, \quad (24)$$

представляющего собой дифференциальное уравнение первого порядка на функцию $\mathbf{f}(Y)$. Обозначим через $\tilde{\xi}_Y$ левоинвариантное векторное поле на центральном расширении $\tilde{G}$ группы G в направлении $Y \in \mathfrak{g}$, а через $U(t)$ – одномерное представление группы T в $\mathbb{R}$. Тогда верно следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для произвольного вектора $Y \in \mathfrak{g}$ существует 1-коцепь $\mathbf{f}(Y) \in \mathbf{C}^1(\mathfrak{g}, C^\infty(G))$, являющаяся решением уравнения (24) и имеющая вид

$$\mathbf{f}(Y) = U^{-1}(\tilde{\xi}_Y + \tilde{\eta}_{\text{Ad}_g Y})U|_G. \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Корректность определения функции $\mathbf{f}(Y)$ легко доказывается аналогично тому, как это делалось при доказательстве утверждения 1. Поэтому осталось проверить, что $\mathbf{f}(Y)$ удовлетворяет уравнению (24) для произвольного $Y \in \mathfrak{g}$.

Так как лево- и правоинвариантные векторные поля коммутируют на любой группе Ли, имеем операторное тождество

$$\tilde{\eta}_X \tilde{\xi}_Y - \tilde{\xi}_Y \tilde{\eta}_X = 0, \quad (26)$$

которое справедливо для произвольных $X, Y \in \mathfrak{g}$. Используя данное тождество, можно показать, что выполнено равенство

$$\tilde{\eta}_X(U^{-1}\tilde{\xi}_Y(U)) = \tilde{\xi}_Y(U^{-1}\tilde{\eta}_X(U)),$$

или, после проекции на G , равенство

$$\eta_X(U^{-1}\tilde{\xi}_Y(U)|_G) = (\xi_Y \mathbf{A}_1)(X). \quad (27)$$

Здесь, следуя предыдущему разделу, мы ввели обозначение $\mathbf{A}_1(X) \equiv U^{-1}\tilde{\eta}_X(U)|_G$.

Рассмотрим действие правоинвариантного векторного поля η_X на функцию (25). С учетом (27) будем иметь

$$\begin{aligned} \eta_X(\mathbf{f}(Y)) &= \eta_X(U^{-1}\tilde{\xi}_Y(U)|_G + \mathbf{A}_1(\text{Ad}_g Y)) = (\xi_Y \mathbf{A}_1)(X) + \eta_X(\mathbf{A}_1(\text{Ad}_g Y)) = \\ &= -(\eta_{\text{Ad}_g Y} \mathbf{A}_1)(X) + (\eta_X \mathbf{A}_1)(\text{Ad}_g Y) - \mathbf{A}_1([X, \text{Ad}_g Y]) = \delta \mathbf{A}_1(X, \text{Ad}_g Y). \end{aligned}$$

В данной цепочке равенств мы использовали соотношения $\eta_X(\text{Ad}_g Y) = -[X, \text{Ad}_g Y]$, а также $\eta_{\text{Ad}_g X} = -\xi_X$. Для завершения доказательства осталось отметить тот факт, что $\delta \mathbf{A}_1 = \mathbf{F}$, откуда

$$\eta_X(\mathbf{f}(Y)) = \delta \mathbf{A}_1(X, \text{Ad}_g Y) = \mathbf{F}(X, \text{Ad}_g Y) = -F(\eta_X, \xi_Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Полезно выписать явные выражения для компонент 1-коцепи $\mathbf{f}$ в локальных координатах. Для этого заметим, что левоинвариантные векторные поля на группе $\tilde{G}$ в координатах (x^0, x^i) записываются в виде

$$\tilde{\xi}_0(x, x^0) = \partial_{x^0}, \quad \tilde{\xi}_A(x, x^0) = \xi_A^i(x) \partial_{x^i} + \tilde{\xi}_A^0(x) \partial_{x^0},$$

откуда, используя (23), получаем для (25) локальную формулу

$$\mathbf{f}_A(x) = -\tilde{\xi}_A^0(x) - (\text{Ad}_g)_A^B \tilde{\eta}_B^0(x). \quad (28)$$

Выведем теперь коммутационные соотношения для алгебры интегралов движения ζ_X магнитного геодезического потока. Для этого выпишем коммутатор двух произвольных интегралов движения:

$$\{\zeta_X, \zeta_Y\} = \xi_{[X, Y]}^{\text{cl}} + eF(\xi_X, \xi_Y) + e\xi_X(\mathbf{f}(Y)) - e\xi_Y(\mathbf{f}(X)). \quad (29)$$

Следствием тождества Якоби для скобки Пуассона является тот факт, что правая часть выражения (29) представляет собой снова функцию интегралов движения магнитного потока. Действительно, запишем коммутационные соотношения алгебры Ли $\mathfrak{g}^L(\tilde{G})$ левоинвариантных векторных полей группы $\tilde{G}$:

$$[\tilde{\xi}_X, \tilde{\xi}_Y] = \tilde{\xi}_{[X, Y]} + \mathbf{F}(X, Y)\tilde{\xi}_0. \quad (30)$$

Действуя обеими частями этого равенства на функцию представления $U(t)$ и производя операции, подобные преобразованиям из доказательства утверждения 1, получаем

$$\xi_X(U^{-1}\tilde{\xi}_Y(U)|_G) - \xi_Y(U^{-1}\tilde{\xi}_X(U)|_G) = U^{-1}\tilde{\xi}_{[X, Y]}(U)|_G - \mathbf{F}(X, Y). \quad (31)$$

Далее, полагая $\mathbf{A}_1(X) \equiv U^{-1}\tilde{\eta}_X(U)|_G$, имеем следующую цепочку равенств:

$$\xi_X(\mathbf{A}_1(\text{Ad}_g Y)) - \xi_Y(\mathbf{A}_1(\text{Ad}_g X)) =$$

$$\begin{aligned}
&= -(\eta_{\text{Ad}_g X} \mathbf{A}_1)(\text{Ad}_g Y) + \mathbf{A}_1([\text{Ad}_g X, \text{Ad}_g Y]) + \\
&\quad + (\eta_{\text{Ad}_g Y} \mathbf{A}_1)(\text{Ad}_g X) - \mathbf{A}_1([\text{Ad}_g Y, \text{Ad}_g X]) = \\
&= -\mathbf{F}(\text{Ad}_g X, \text{Ad}_g Y) + \mathbf{A}_1(\text{Ad}_g [X, Y]).
\end{aligned} \tag{32}$$

Используя соотношения (31), (32) и учитывая, что $F(\xi_X, \xi_Y) = \mathbf{F}(\text{Ad}_g X, \text{Ad}_g Y)$, равенство (29) можно преобразовать к окончательному виду

$$\{\zeta_X, \zeta_Y\} = \zeta_{[X, Y]} - e\mathbf{F}(X, Y). \tag{33}$$

Полученное выражение и представляет собой искомые коммутационные соотношения алгебры интегралов движения магнитного геодезического потока (11). Сравнивая (33) с соотношениями (30), легко видеть, что данная алгебра изоморфна алгебре Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ группы $\tilde{G}$.

Интересно в качестве частной ситуации рассмотреть случай, когда 2-коцикл $\mathbf{F}$ тривиален, т.е. $\mathbf{F} = \delta\lambda$, где $\lambda \in \mathfrak{g}^*$. Тогда коммутационные соотношения (33) принимают вид

$$\{\zeta_X, \zeta_Y\} = \zeta_{[X, Y]} - e\langle \lambda, [X, Y] \rangle. \tag{34}$$

Произведем сдвиг $\zeta_X \rightarrow \zeta_X - e\langle \lambda, X \rangle$ на аддитивную постоянную, переопределяющий функцию ζ_X , и перепишем (34) в новых обозначениях:

$$\{\tilde{\zeta}_X, \tilde{\zeta}_Y\} = \tilde{\zeta}_{[X, Y]}.$$

В этом случае говорят, что алгебра Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ является *расщепимым расширением* алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а соответствующее сечение $r: \mathfrak{g} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$ такое, что $r(X) = X - e\langle \lambda, X \rangle$, задает изоморфизм алгебр $r(\tilde{\mathfrak{g}}) \cong \mathfrak{g}$ [6].

5. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ МАГНИТНОГО ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ПОТОКА В КВАДРАТУРАХ

В предыдущем разделе мы рассмотрели вопрос о наличии у магнитного геодезического потока с правоинвариантной метрикой и тензором электромагнитного поля (4) соответствующей алгебры интегралов движения, в общем случае изоморфной алгебре $\tilde{\mathfrak{g}}$. В настоящем разделе мы приведем критерий интегрируемости подобных систем в квадратурах. Отметим, что изложение данного раздела существенным образом будет опираться на результаты работы [7].

Выберем на группе $\tilde{G}$ правоинвариантную квадратичную форму $\mathbf{B}$, действующую на кокасательных векторах $\sigma, \tau \in T^*\tilde{G}$ по следующему правилу:

$$\mathbf{B}(\sigma, \tau) = (\pi^* \mathbf{G}^{-1})(R_{\tilde{g}^{-1}}^* \sigma, R_{\tilde{g}^{-1}}^* \tau), \quad \tilde{g} \in \tilde{G}. \tag{35}$$

Используя естественную симплектическую структуру на кокасательном расслоении $T^*\tilde{G}$,

$$\tilde{\omega} = dp_0 \wedge dx^0 + dp_i \wedge dx^i,$$

ассоциируем с формой (35) функцию $\tilde{H}(x, \tilde{p}) = \mathbf{B}(\tilde{p}, \tilde{p})/2$. Так как равенство (35) не зависит от точек слоя $T \simeq \tilde{G}/G$, переменная x^0 для гамильтоновой системы, соответствующей гамильтониану $\tilde{H}(x, \tilde{p})$, является циклической. Зафиксируем значение

соответствующего интеграла движения $p_0 = -e$. В этом случае указанная гамильтонова система естественным образом распадается на следующие две подсистемы:

$$\frac{dx^0}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}(x, \tilde{p})}{\partial p_0}, \quad p_0 = -e; \quad (36)$$

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}(x, \tilde{p})}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}(x, \tilde{p})}{\partial x^i}. \quad (37)$$

Произведем в подсистеме (37) замену переменной $p_i \rightarrow p_i + eA_i(x)$, где $A_i(x)$ – вектор-потенциал правоинвариантного тензора Фарадея $F_{ij}(x)$. Нетрудно показать, что в результате такого преобразования подсистема (37) примет вид магнитного геодезического потока на группе G ,

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H(x, p)}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H(x, p)}{\partial x^i} - F_{ij}(x) \frac{\partial H(x, p)}{\partial p_j}, \quad (38)$$

полностью эквивалентного системе (11). Здесь $H(x, p) \equiv \tilde{H}(x, p - eA)$. Таким образом, уравнения магнитного геодезического потока на группе G относительно правоинвариантной метрики (5) являются составной частью гамильтоновой системы (36), (37) на центральном расширении $\tilde{G}$. Следовательно, вопрос об интегрируемости геодезического потока (11) полностью сводится к вопросу интегрируемости уравнений (36), (37).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Произвольный правоинвариантный магнитный геодезический поток (11) на группе G интегрируем в квадратурах тогда и только тогда, когда интегрируема в квадратурах правоинвариантная гамильтонова система (36), (37) на центральном расширении $\tilde{G}$ группы G .*

В работе [7] был построен конструктивный алгоритм интегрирования в квадратурах G -инвариантных гамильтоновых потоков на однородных пространствах, а также получены соответствующие необходимые и достаточные условия интегрируемости. Произвольная группа Ли G может рассматриваться как однородное пространство (например, относительно правых сдвигов $R_g: G \rightarrow G$) с тривиальной группой стационарности $H = \{e\}$. Поэтому мы воспользуемся результатами указанной работы и изложим здесь лишь ключевые соображения, которые позволят нам сформулировать соответствующий критерий для магнитных геодезических потоков.

Гамильтоново действие произвольной группы G на кокасательном расслоении T^*G с естественной симплектической структурой $\omega = dp \wedge dx$ позволяет ввести *левое отображение момента* $f^L: T^*G \rightarrow \mathfrak{g}^*$, задаваемое соотношениями

$$f^L(X) = \xi_X^{\text{cl}}(x, p), \quad f_A^L = X^A \xi_A^i(x) p_i, \quad X \in \mathfrak{g}, \quad f^L \in \mathfrak{g}^*. \quad (39)$$

Отображение (39) является пуассоновым отображением алгебры $C^\infty(T^*G)$ в алгебру $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ со скобкой Пуассона–Ли

$$\{\varphi, \psi\}^{\text{Lie}} \equiv \langle f, [\nabla \varphi(f), \nabla \psi(f)] \rangle, \quad (40)$$

где $\varphi, \psi \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ и $f \in \mathfrak{g}^*$. Ввиду вырожденности скобки (40) в пространстве $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ могут существовать *функции Казимира* $K(f)$, коммутирующие с любой функцией на $\mathfrak{g}^*$, т.е. такие, что

$$\{K(f), \varphi\}^{\text{Lie}} = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty(\mathfrak{g}^*).$$

Отметим, что число $\text{ind } \mathfrak{g}$ независимых функций Казимира называется *индексом* алгебры $\mathfrak{g}$ и инвариантным образом определяется как размерность аннулятора $\mathfrak{g}^\lambda$ коектора общего положения:

$$\text{ind } \mathfrak{g} \equiv \inf_{\lambda \in \mathfrak{g}^*} \dim \mathfrak{g}^\lambda, \quad \mathfrak{g}^\lambda = \{X \in \mathfrak{g} \mid \langle \lambda, [X, \mathfrak{g}] \rangle = 0\}.$$

Свойство *эквивариантности* отображения момента (39) позволяет сопоставить каждой функции Казимира $K(f) \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ функцию $K^L(x, p) \equiv K \circ f^L$ из $C^\infty(T^*G)$, коммутирующую с произвольной левоинвариантной функцией на T^*G . Легко видеть, что все функции $K^L(x, p)$ лежат в центре обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ и являются интегралами движения правоинвариантного гамильтонова потока на группе G . Аналогично отображению (39) можно ввести *правое* отображение момента $f^R: T^*G \rightarrow \mathfrak{g}^*$ по формуле

$$f^R(X) = \eta_X^{\text{cl}}(x, p), \quad f_A^R = X^A \eta_A^i(x) p_i, \quad X \in \mathfrak{g}, \quad f^R \in \mathfrak{g}^*. \quad (41)$$

Обозначим через $\Omega^L \subset \mathfrak{g}^*$ и $\Omega^R \subset \mathfrak{g}^*$ симплектические листы относительно левого и правого отображений соответственно. Функции Казимира $K^R(x, p) \equiv K \circ f^R$ равны функциям $K^L(x, p)$, а поэтому центры пуассоновых алгебр лево- и правоинвариантных функций из $C^\infty(T^*G)$ совпадают. Отсюда следует, что $\Omega^R = \Omega^L \equiv \Omega$.

Гамильтониан правоинвариантного потока на группе G является квадратичной комбинацией правоинвариантных функций $H = H'(\eta^{\text{cl}}(x, p))$. Можно показать, что при правом отображении момента f^R подобный поток переходит в гамильтонову систему с гамильтонианом $H'(f^R)$ относительно скобки (40). Ввиду существования в $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ функций Казимира данную гамильтонову систему можно ограничить на соответствующий симплектический лист Ω , размерность которого определяется индексом алгебры $\mathfrak{g}$:

$$\dim \Omega = \dim \mathfrak{g} / \mathfrak{g}^\lambda = \dim \mathfrak{g} - \text{ind } \mathfrak{g}.$$

Пользуясь этим фактом, можно сформулировать следующий критерий интегрируемости, являющийся частным случаем подобного критерия для произвольного однородного пространства, полученного в [7].

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Произвольный правоинвариантный гамильтонов поток на группе G редуцируется к $\dim \Omega$ -мерной гамильтоновой системе и, в частности, интегрируется в квадратурах тогда и только тогда, когда*

$$\frac{1}{2} \dim \Omega = \frac{\dim \mathfrak{g} - \text{ind } \mathfrak{g}}{2} < 2. \quad (42)$$

Вернемся теперь к исследованию интегрируемости правоинвариантного магнитного геодезического потока (11). Сформулированное нами утверждение 3 фактически сводит данную проблему к нахождению условий интегрируемости произвольных правоинвариантных гамильтоновых систем на центральном расширении $\tilde{G}$ группы G , что в свою очередь приводит нас к проверке условия

$$\frac{\dim \tilde{\mathfrak{g}} - \operatorname{ind} \tilde{\mathfrak{g}}}{2} < 2. \quad (43)$$

В этой связи попытаемся сформулировать данное условие в терминах самой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и соответствующего фактор-коцикла $\mathbf{F} \in \mathbf{Z}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$.

Прежде всего очевидно, что $\dim \tilde{\mathfrak{g}} = \dim \mathfrak{g} + 1$. Далее, зафиксируем в дуальном пространстве $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ ковектор общего положения $\lambda + \varepsilon$, где $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ и $\varepsilon \in \mathfrak{t}^*$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\varepsilon(e_0) = 1$, где e_0 – базисный вектор одномерной алгебры $\mathfrak{t}$. Используя структуру (15) коммутационных соотношений алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$, легко заметить, что одномерный центр $\mathfrak{t}$ полностью лежит в $\tilde{\mathfrak{g}}^{\lambda+\varepsilon}$, следовательно, как линейное пространство, данный аннулятор можно разложить, в прямую сумму подпространств $\tilde{\mathfrak{g}}^{\lambda+\varepsilon} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_{\mathbf{F}}$, где

$$\mathfrak{g}_{\mathbf{F}} \equiv \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathbf{F}(X, \mathfrak{g}) = 0\}. \quad (44)$$

Отсюда, в частности, следует, что $\dim \tilde{\mathfrak{g}}^{\lambda+\varepsilon} = \dim \mathfrak{g}_{\mathbf{F}} + 1$. Нетрудно также показать, что подпространство $\mathfrak{g}_{\mathbf{F}}$ является подалгеброй в $\mathfrak{g}$ и в случае $\mathbf{F} = \delta\lambda \in \mathbf{B}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ совпадает с обычным аннулятором $\mathfrak{g}^{\lambda}$ ковектора λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $[\mathbf{F}] \in \mathbf{H}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ – кохомологический класс некоторого 2-коцикла $\mathbf{F} \in \mathbf{Z}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$. Индексом алгебры $\mathfrak{g}$ класса кохомологий $[\mathbf{F}]$ (или просто кохомологическим индексом) будем называть число

$$\operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g} = \inf_{\mathbf{F} \in [\mathbf{F}]} \dim \mathfrak{g}_{\mathbf{F}}. \quad (45)$$

Данное определение обобщает понятие обычного индекса ($\operatorname{ind} \mathfrak{g}$) алгебры $\mathfrak{g}$ и совпадает с ним в частном случае, когда 2-коцикл $\mathbf{F}$ тривиален, т.е. $\mathbf{F} \in [0]$. Используя данное определение, а также неравенство (43), мы теперь легко можем сформулировать критерий интегрируемости в терминах кохомологий алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

ТЕОРЕМА 1. Произвольный правоинвариантный магнитный геодезический поток (11) на группе G , задаваемый 2-коциклом $\mathbf{F} \in \mathbf{Z}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$, интегрируется в квадратурах тогда и только тогда, когда

$$\frac{\dim \mathfrak{g} - \operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g}}{2} < 2. \quad (46)$$

Для полупростых алгебр Ли справедлива теорема Уайтхеда, согласно которой $\mathbf{H}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R}) = 0$ (см., например, [6]). В этом случае любой 2-коцикл $\mathbf{F}$ полупростой алгебры $\mathfrak{g}$ тривиален, откуда $\operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g} = \operatorname{ind} \mathfrak{g}$. Следовательно, свойство интегрируемости геодезических потоков для полупростых групп Ли сохраняется при “включении” внешних электромагнитных полей. Очевидно, что данное утверждение остается справедливым также и в случае произвольной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с нулевой группой 2-кохомологий.

Приведем нетривиальный пример, иллюстрирующий эффективность предложенного критерия интегрируемости. Рассмотрим разрешимую четырехмерную группу Ли G , алгебра $\mathfrak{g}$ которой имеет следующие ненулевые коммутационные соотношения:

$$[e_1, e_4] = e_4, \quad [e_2, e_4] = e_4.$$

Нетрудно проверить, что $\text{ind } \mathfrak{g} = 2$, а поэтому произвольный правоинвариантный геодезический поток на группе G в отсутствии электромагнитного поля интегрируем в квадратурах.

Найдем наиболее общую форму 2-коцикла для данной алгебры Ли. Для этого, решая систему линейных алгебраических уравнений (13), получим следующее параметрическое семейство решений:

$$\mathbf{F} = \alpha e^1 \wedge e^2 + \beta e^1 \wedge e^3 + \gamma e^2 \wedge e^3 + \delta f, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \quad (47)$$

Здесь $f = f_4 e^4$, откуда $\delta f = f_4(e^1 + e^2) \wedge e^4$. Легко видеть, что в нашем случае $\dim \mathbf{H}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R}) = 3$.

Введем локальные координаты на группе G : $g = e^{x_1 e_1} \dots e^{x_4 e_4}$. Выберем в этих координатах базис правоинвариантных 1-форм:

$$\sigma^1 = -dx_1, \quad \sigma^2 = -dx_2, \quad \sigma^3 = -dx_3, \quad \sigma^4 = -e^{x_1 + x_2} dx_4.$$

Форма электромагнитного поля F , соответствующая 2-коциклу (47), имеет вид

$$F = \alpha dx_1 \wedge dx_2 + \beta dx_1 \wedge dx_3 + \gamma dx_2 \wedge dx_3 + f_4 e^{x_1 + x_2} (dx_1 + dx_2) \wedge dx_4. \quad (48)$$

Рассмотрим центральное расширение $\tilde{\mathfrak{g}}$ алгебры $\mathfrak{g}$ с помощью 2-коцикла общего положения $\mathbf{F} = \alpha e^1 \wedge e^2 + \beta e^1 \wedge e^3 + \gamma e^2 \wedge e^3$. Ненулевые коммутационные соотношения данной алгебры можно записать как

$$[e_1, e_2] = \alpha e_0, \quad [e_1, e_3] = \beta e_0, \quad [e_1, e_4] = e_4, \quad [e_2, e_3] = \gamma e_0, \quad [e_2, e_4] = e_4.$$

Здесь e_0 – базисный вектор одномерного центра $\mathfrak{t} \cong \tilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Пусть x_0 – координата элемента центра T группы $\tilde{G}$. Тогда в координатах $\tilde{g}(x_0, x) = e^{x_0 e_0} g(x)$, $\tilde{g} \in \tilde{G}$, $g \in G$, базис лево- и правоинвариантных векторных полей группы $\tilde{G}$ можно выбрать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_0 &= \partial_0, & \tilde{\xi}_1 &= \partial_1 - x_4 \partial_4 - (\alpha x_2 + \beta x_3) \partial_0, \\ \tilde{\xi}_2 &= \partial_2 - x_4 \partial_4 - \gamma x_3 \partial_0, & \tilde{\xi}_3 &= \partial_3, & \tilde{\xi}_4 &= \partial_4; \\ \tilde{\eta}_0 &= -\partial_0, & \tilde{\eta}_1 &= -\partial_1, & \tilde{\eta}_2 &= \alpha x_1 \partial_0 - \partial_2, \\ \tilde{\eta}_3 &= (\beta x_1 + \gamma x_2) \partial_0 - \partial_3, & \tilde{\eta}_4 &= -e^{-x_1 - x_2} \partial_4. \end{aligned}$$

Выберем следующее представление группы T в $\mathbb{R}$: $U(x^0) = e^{-x^0}$. Воспользовавшись формулами (23) легко находим, что

$$\mathbf{A}(x) = -\alpha x_1 e^2 - (\beta x_1 + \gamma x_2) e^3, \quad A(x) = \alpha x_1 dx_2 + (\beta x_1 + \gamma x_2) dx_3.$$

С помощью непосредственных вычислений легко убедиться, что $\mathbf{F} = \delta\mathbf{A}$ и $F = dA$.

Аналогично, пользуясь формулой (28), построим в явном виде алгебру интегралов движения произвольного правоинвариантного магнитного геодезического потока для данной группы:

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= p_1 - x_4 p_4 + \alpha x_2 + \beta x_3, & \zeta_2 &= p_2 - x_4 p_4 - \alpha x_1 + \gamma x_3, \\ \zeta_3 &= p_3 - \beta x_1 - \gamma x_2, & \zeta_4 &= p_4.\end{aligned}$$

Примечательно, что при $\alpha = \beta = \gamma = 0$ данные функции являются интегралами движения правоинвариантного геодезического потока на группе Ли в отсутствие поля и образуют подалгебру левоинвариантных функций в $C^\infty(T^*G)$ относительно стандартной скобки Пуассона.

Выделим теперь для нашего примера случаи интегрируемых магнитных геодезических потоков. Для этого, учитывая, что $\mathfrak{g}_{\mathbf{F}} \equiv \ker \mathbf{F}$, перепишем условие (46) в несколько иной форме:

$$\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} - \text{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g}) = \frac{1}{2} \sup_{\mathbf{F} \in [\mathbf{F}]} \text{rank } \mathbf{F} < 2.$$

Поскольку ранг кососимметрической билинейной формы является четным числом, имеем

$$\text{rank } \mathbf{F} = \begin{cases} 4, & \beta \neq \gamma; \\ 2, & \beta = \gamma. \end{cases}$$

Следовательно, 2-коциклы, допускающие интегрируемые магнитные геодезические потоки, имеют вид

$$\mathbf{F} = \alpha e^1 \wedge e^2 + \beta(e^1 + e^2) \wedge e^3 + \delta f, \quad f \in \mathfrak{g}^*.$$

Соответствующие функции Казимира на $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ задаются формулами

$$K_0 = f_0, \quad K_1 = \beta(f_1 - f_2) + \alpha f_3, \quad K_2 = f_4^\beta e^{-f_3}.$$

В заключение подчеркнем еще раз, что рассматриваемые нами магнитные геодезические потоки на группах Ли интересовали нас именно с точки зрения *интегрируемости в квадратурах*. Хорошо известно, что термин “интегрируемость” часто употребляется и в несколько другом смысле, а именно с точки зрения существования достаточного набора первых интегралов движения, удовлетворяющего особым условиям (*полная интегрируемость*). Естественно, что между этими понятиями существует определенная связь, но тем не менее указанные термины не эквивалентны. Покажем это на простом примере. Рассмотрим коммутативную группу Ли, которая как многообразие представляет собой двумерный тор $T^2 \cong S^1 \times S^1$. Обозначим через φ и ψ угловые координаты на T^2 , параметризующие произвольный элемент группы. Для простоты рассмотрим на данной группе Ли плоскую метрику $ds^2 = d\varphi^2 + d\psi^2$, а в качестве электромагнитного поля выберем 2-форму, пропорциональную элементу объема: $F = e d\varphi \wedge d\psi$. Характерно, что данная форма является замкнутой, но не является точной на всем многообразии T^2 , т.е. соответствующий вектор-потенциал A

глобально не существует. Более того, нетрудно видеть, что набор первых интегралов движения магнитного геодезического потока также определен только локально и в выбранных координатах имеет вид

$$\zeta_1 = p_\varphi - e\psi, \quad \zeta_2 = p_\psi + e\varphi.$$

В этой связи магнитный геодезический поток в данном примере не является вполне интегрируемым на всем многообразии, однако в квадратурах данный поток легко интегрируется и причем глобально:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= p_\varphi^0 \frac{\sin(et)}{e} + p_\psi^0 \frac{\cos(et) - 1}{e} + \varphi_0, \\ \psi(t) &= -p_\varphi^0 \frac{\cos(et) - 1}{e} + p_\psi^0 \frac{\sin(et)}{e} + \psi_0, \\ p_\varphi(t) &= p_\varphi^0 \cos(et) - p_\psi^0 \sin(et), \\ p_\psi(t) &= p_\varphi^0 \sin(et) + p_\psi^0 \cos(et). \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

В приложении мы приводим канонический вид 2-коциклов $\mathbf{F}$ для всех четырехмерных алгебр Ли. Канонические формы получены с помощью действия групп автоморфизмов соответствующих алгебр. Кроме этого, для каждой алгебры Ли выделены интегрируемые случаи, т.е. подклассы 2-коциклов, для которых $\text{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g} = 2$. Выбранная нами классификация четырехмерных алгебр Ли приведена в монографии Петрова [8]. Далее используются следующие обозначения: $\varepsilon, \sigma = \pm 1$, $\kappa = 0, \pm 1$, $\alpha, C \in \mathbb{R}$.

1. Коммутативная алгебра $\mathfrak{g}_0$: $[e_A, e_B] = 0$, $A, B = 1, \dots, 4$;

$$\mathbf{F} = e^1 \wedge e^2 + \kappa e^3 \wedge e^4, \quad \text{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g} = 2 \quad \text{при} \quad \kappa = 0.$$

2. Алгебра $\mathfrak{g}_1$:

$$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = \alpha e_1, \quad [e_2, e_4] = e_2, \quad [e_3, e_4] = (\alpha - 1)e_3,$$

$$\mathbf{F}_1 = \sigma \left(e^1 \wedge e^4 + \frac{1}{\alpha} e^2 \wedge e^3 \right) + \kappa e^2 \wedge e^4, \quad \alpha \neq 0,$$

$$\mathbf{F}_2 = \kappa_1 e^2 \wedge e^4 + \kappa_2 e^3 \wedge e^4, \quad \text{ind}_{[\mathbf{F}_2]} \mathfrak{g} = 2 \quad \text{при} \quad \alpha = 0.$$

3. Алгебра $\mathfrak{g}_2$:

$$[e_1, e_4] = 2e_1, \quad [e_3, e_4] = e_2 + e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_4] = e_2,$$

$$\mathbf{F}_1 = \kappa \left(e^1 \wedge e^4 + \frac{1}{2} e^2 \wedge e^3 \right), \quad \mathbf{F}_2 = \kappa e^2 \wedge e^4, \quad \mathbf{F}_3 = \kappa e^3 \wedge e^4.$$

4. Алгебра $\mathfrak{g}_3$:

$$[e_2, e_4] = e_3, \quad [e_3, e_4] = -e_2 + \alpha e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = \alpha e_1,$$

$$\mathbf{F}_1 = \sigma \left(e^1 \wedge e^4 + \frac{1}{\alpha} e^2 \wedge e^3 \right), \quad \alpha \neq 0,$$

$$\mathbf{F}_2 = \kappa e^2 \wedge e^4 + C e^3 \wedge e^4.$$

5. Алгебра $\mathfrak{g}_4$:

$$[e_1, e_4] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_2,$$

$$\mathbf{F} = \kappa_1 e^1 \wedge e^4 + \kappa_2 e^2 \wedge e^3 + C e^3 \wedge e^4.$$

6. Алгебра $\mathfrak{g}_5$:

$$[e_2, e_4] = -e_1, \quad [e_1, e_4] = e_2, \quad [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_2,$$

$$\mathbf{F}_1 = \sigma(e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3) + C e^3 \wedge e^4,$$

$$\mathbf{F}_2 = \kappa(-e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^4) + C e^3 \wedge e^4.$$

7. Алгебра $\mathfrak{g}_6$:

$$[e_1, e_4] = e_1,$$

$$\mathbf{F}_1 = \kappa_1 e^1 \wedge e^4 + \sigma e^2 \wedge e^3 + \kappa_2 e^2 \wedge e^4,$$

$$\mathbf{F}_2 = \kappa_1 e^1 \wedge e^4 + \kappa_2 e^2 \wedge e^4 + \kappa_3 e^3 \wedge e^4.$$

8. Алгебра $\mathfrak{g}_7$:

$$[e_1, e_4] = e_4, \quad [e_2, e_4] = e_4,$$

$$\mathbf{F}_1 = \kappa_1 e^1 \wedge e^3 + \kappa_2(e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^4) + \kappa_3 e^2 \wedge e^3, \quad \text{ind}_{[\mathbf{F}_1]} \mathfrak{g} = 2 \quad \text{при} \quad \kappa_2 = \sigma,$$

$$\mathbf{F}_2 = \sigma e^1 \wedge e^2 + \kappa_1(e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^4) + \kappa_2 e^2 \wedge e^3, \quad \text{ind}_{[\mathbf{F}_2]} \mathfrak{g} = 2 \quad \text{при} \quad \kappa_1 = 0,$$

$$\mathbf{F}_3 = \kappa_1(e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^4) + \kappa_2 e^2 \wedge e^3, \quad \text{ind}_{[\mathbf{F}_3]} \mathfrak{g} = 2 \quad \text{при} \quad \kappa_1 = 0.$$

9. Алгебра $\mathfrak{g}_8$:

$$[e_1, e_4] = e_4, \quad [e_2, e_4] = e_4, \quad [e_3, e_4] = e_4,$$

$$\mathbf{F}_1 = \kappa_1 e^1 \wedge e^2 + \sigma e^1 \wedge e^3 + \kappa_2(e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^4),$$

$$\text{ind}_{[\mathbf{F}_1]} \mathfrak{g} = 2 \quad \text{при} \quad \kappa_2 = \sigma,$$

$$\mathbf{F}_2 = \kappa_1 e^1 \wedge e^2 + \kappa_2(e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^4) + \kappa_3 e^2 \wedge e^3,$$

$$\text{ind}_{[\mathbf{F}_2]} \mathfrak{g} = 2 \quad \text{при} \quad \kappa_2 = \kappa_3.$$

10. Алгебра $\mathfrak{g}_9$:

$$[e_1, e_4] = e_1 + e_4,$$

$$\mathbf{F}_1 = \kappa_1(e^1 \wedge e^3 + e^3 \wedge e^4) + \kappa_2 e^1 \wedge e^4 + \sigma e^2 \wedge e^3,$$

$$\mathbf{F}_2 = \kappa_1(e^1 \wedge e^2 + e^2 \wedge e^4) + \kappa_2(e^1 \wedge e^3 + e^3 \wedge e^4) + \kappa_3 e^1 \wedge e^4, \quad \text{ind}_{[\mathbf{F}_2]} \mathfrak{g} = 2.$$

11. Алгебра $\mathfrak{g}_{10}$:

$$[e_1, e_4] = \alpha e_1 + e_2, \quad [e_2, e_4] = \alpha e_2, \quad [e_3, e_4] = e_3,$$

$$\mathbf{F}_1 = \kappa_1 e^2 \wedge e^4 + \kappa_2 e^3 \wedge e^4, \quad \text{ind}_{[\mathbf{F}_1]} \mathfrak{g} = 2,$$

$$\mathbf{F}_2 = \kappa_1 e^1 \wedge e^4 + \kappa_2 e^3 \wedge e^4, \quad \text{ind}_{[\mathbf{F}_2]} \mathfrak{g} = 2.$$

12. Алгебра $\mathfrak{g}_{11}$:

$$[e_2, e_4] = \alpha e_2 + e_3, \quad [e_1, e_4] = \alpha e_1 + e_2,$$

$$\mathbf{F} = \kappa e^1 \wedge e^4 + C_1 e^2 \wedge e^4 + C_2 e^3 \wedge e^4, \quad \text{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g} = 2.$$

13. Алгебра $\mathfrak{g}_{12}$:

$$[e_2, e_4] = \alpha e_2 + e_3, \quad [e_3, e_4] = e_3, \quad [e_1, e_4] = \alpha e_1 + e_2,$$

$$\mathbf{F} = \kappa e^1 \wedge e^4 + C_1 e^2 \wedge e^4 + C_2 e^3 \wedge e^4, \quad \text{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g} = 2.$$

14. Алгебра $\mathfrak{g}_{13}$:

$$[e_2, e_4] = -e_1 + \alpha e_2, \quad [e_1, e_4] = \alpha e_1 + e_2, \quad [e_3, e_4] = \varepsilon e_3,$$

$$\mathbf{F} a_{13} = \kappa_1 e^1 \wedge e^4 + C e^2 \wedge e^4 + k_2 e^3 \wedge e^4, \quad \text{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g} = 2.$$

15. Алгебра $\mathfrak{g}_{14}$:

$$[e_1, e_2] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_3, \quad [e_1, e_3] = 2e_2,$$

$$\mathbf{F}_1 = C e^1 \wedge e^2 + \kappa e^2 \wedge e^3, \quad \text{ind}_{[\mathbf{F}_1]} \mathfrak{g} = 2,$$

$$\mathbf{F}_2 = C e^1 \wedge e^3 + \kappa e^2 \wedge e^3, \quad \text{ind}_{[\mathbf{F}_2]} \mathfrak{g} = 2.$$

16. Алгебра $\mathfrak{g}_{15}$:

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = -e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1,$$

$$\mathbf{F} = C_1 e^1 \wedge e^2 + C_2 e^1 \wedge e^3 + C_3 e^2 \wedge e^3, \quad \text{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g} = 2.$$

Список литературы

- [1] A. V. Bolsinov, B. Jovanović, “Integrable geodesic flows on Riemannian manifolds: construction and obstructions”, *Contemporary Geometry and Related Topics*, eds. N. Boker, M. Djoric, Z. Rakic et al., World Scientific, River Edge, NJ, 2004, 57–103; [arXiv:math-ph/0307015](#).
- [2] Б. А. Дубровин, И. М. Кривчер, С. П. Новиков, “Интегрируемые системы, I”, *Соврем. проблемы матем. Фундам. напр.*, Итоги науки и техники. Динамические системы 4. Симплектическая геометрия и ее приложения, ред. В. И. Арнольд, С. П. Новиков, ВИНТИ, М., 1985, 179–285.
- [3] Д. И. Ефимов, *Сиб. матем. журн.*, **45**:3 (2004), 566–576.
- [4] Д. И. Ефимов, *Сиб. матем. журн.*, **46**:1 (2005), 106–118.
- [5] A. V. Bolsinov, B. Jovanovic, *J. Phys. A*, **39**:16 (2006), L247–L252; [arXiv:math-ph/0602016](#).
- [6] М. Гото, Ф. Гроссханс, *Полупростые алгебры Ли*, Мир, М., 1981.
- [7] А. А. Магазев, И. В. Широков, *ТМФ*, **136**:3 (2003), 365–379.
- [8] А. З. Петров, *Пространства Эйнштейна*, Наука, М., 1961.

Поступила в редакцию 19.01.2007,
после доработки 2.07.2007