Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Верещагин, Интегрируемые по Дарбу дискретные системы, *ТМФ*, 2008, том 156, номер 2, 207–219

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6241>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 02:42:28

© 2008 г.

В. Л. Верещагин*

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ПО ДАРБУ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Применение каскадного метода Лапласа распространено на системы дискретных “гиперболических” уравнений вида $u_{i+1,j+1} = f(u_{i+1,j}, u_{i,j+1}, u_{i,j})$, где u_{ij} – элемент последовательности неизвестных векторов, $i, j \in \mathbb{Z}$. Введено понятие обобщенного инварианта Лапласа и связанного с ним свойства “лиувиллевости” системы. Доказан ряд утверждений о корректности определения обобщенного инварианта и его применимости для поиска решений и интегралов системы. Приведены примеры дискретных систем типа Лиувилля.

Ключевые слова: каскадный метод Лапласа, интегрируемость по Дарбу, нелинейные цепочки.

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1773 г. Лаплас предложил “каскадный метод”, позволяющий найти общее решение специальных линейных гиперболических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами вида

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0, \quad u = u(x, y). \quad (1.1)$$

Суть метода может быть кратко изложена следующим образом. Величины $h = a_x + ab - c$ и $k = b_y + ab - c$ являются инвариантами преобразования

$$u(x, y) = \lambda(x, y)v(x, y).$$

Функции h и k обычно называются инвариантами Лапласа и служат исходным пунктом для каскадного метода. Уравнение (1.1) может быть переписано в двух равносильных формах

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right)u - hu = 0 \quad (1.2)$$

и

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)u - ku = 0 \quad (1.3)$$

*Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, Россия. E-mail: v_vereschagin@mail.ru

или, что эквивалентно, в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right)u = u_1, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)u_1 - hu = 0 \quad (1.4)$$

и

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)u = u_{-1}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right)u_{-1} - ku = 0. \quad (1.5)$$

Формулы (1.4) задают x -преобразование Лапласа, состоящее в переходе от неизвестной u к неизвестной u_1 . Аналогично, формулы (1.5) описывают y -преобразование Лапласа. Легко убедиться, что если хотя бы один из инвариантов h или k тождественно равен нулю, то исходное уравнение (1.1) интегрируется в квадратурах:

$$u = e^{-\int a(x,y) dy} \left(X(x) + \int Y(y) e^{\int (a(x,y) dy - b(x,y) dx)} dy \right), \quad (1.6)$$

где X – произвольная функция переменной x , а Y – функция переменной y . Пусть теперь $h \neq 0$ ($k \neq 0$), тогда из второго уравнения (1.4) (второго уравнения (1.5)) имеем

$$u = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial}{\partial x} + b \right) u_1 \quad \left(u = \frac{1}{k} \left(\frac{\partial}{\partial y} + a \right) u_{-1} \right).$$

Подставим это выражение в первое уравнение (1.4) (первое уравнение (1.5)) и получим уравнение на u_1 (u_{-1}) типа (1.1), но с иными коэффициентами: $b_1 = b$, $a_1 = a - (\ln h)_y$, $c_1 = a_1 b_1 + b_y - h$ ($a_{-1} = a$, $b_{-1} = b - (\ln k)_x$, $c_{-1} = a_{-1} b_{-1} + a_x - k$). Имеется связь между инвариантами:

$$h_1 = 2h - k - (\ln h)_{xy}, \quad h_{-1} = k, \quad k_1 = h, \quad k_{-1} = 2k - h - (\ln k)_{xy}. \quad (1.7)$$

Если h_1 или k_{-1} равны нулю, то получаем уравнение, интегрируемое в квадратурах и, следовательно, квадратурную формулу для решения исходного уравнения (1.1). Если же h_1 и k_{-1} не равны нулю, то снова применяем к u_1 и u_{-1} преобразование Лапласа, что дает цепочку уравнений и соответствующих инвариантов Лапласа

$$\dots, \quad h_{-2}, \quad h_{-1}, \quad h = h_0, \quad h_1, \quad h_2, \quad \dots$$

при условиях $h_{-1} = k$ и $k_n = h_{n-1}$. Вся цепочка инвариантов может быть рассчитана с помощью рекуррентной формулы

$$(\ln h_j)_{xy} = h_{j+1} - 2h_j + h_{j-1}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (1.8)$$

представляющей собой одну из форм записи двумеризованной цепочки Тоды.

Известно, что и в теории нелинейных гиперболических уравнений второго порядка вида

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \quad (1.9)$$

инварианты Лапласа соответствующего линеаризованного уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - f_{u_x} \frac{\partial}{\partial x} - f_{u_y} \frac{\partial}{\partial y} - f_u \right) v = 0 \quad (1.10)$$

также являются важным инструментом (см. работы [1]–[4]). В частности, доказано, что уравнение обладает нетривиальными интегралами по каждому из характеристических направлений (x - и y -интегралами, т.е. величинами $I(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, \dots)$, $J(x, y, u, u_x, u_{xx}, \dots)$ такими, что $I_x = J_y = 0$ вдоль траекторий уравнения (1.9)), если и только если ряд инвариантов Лапласа уравнения обрывается нулями с обеих сторон. Это обстоятельство позволило связать метод Лапласа с теорией “интегрируемости по Дарбу”:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Уравнение (1.9) называется *интегрируемым по Дарбу*, если у него существуют нетривиальные x - и y -интегралы.

Наиболее известными примерами уравнений, интегрируемых по Дарбу, являются волновое уравнение $u_{xy} = 0$ (интегралы $I = u_y$, $J = u_x$) и уравнение Лиувилля $u_{xy} = e^u$ (интегралы $I = u_{yy} - u_y^2/2$, $J = u_{xx} - u_x^2/2$). Отметим, что уравнение Лиувилля получается из цепочки Тоды (1.8) путем простого замыкания цепочки инвариантов: $h_j = 0$ при $j \neq 0$, $h_0 = -e^u/2$. В работе [5] было показано, что аналогичные построения можно провести и в дискретной ситуации, в частности, для дискретных линейных уравнений вида

$$u_{i+1,j+1} = f(u_{i+1,j}, u_{i,j+1}, u_{i,j}). \quad (1.11)$$

В этой работе был описан аналог метода Лапласа, построены дискретные инварианты и показано, что эти инварианты удовлетворяют уравнению

$$(h_{i,j+1}^{k-1} + 1)(h_{i+1,j}^{k+1} + 1) = \left(\frac{1}{h_{i,j+1}^k} + 1\right) \left(\frac{1}{h_{i+1,j}^k} + 1\right) h_{ij}^k h_{i+1,j+1}^k, \quad (1.12)$$

представляющему собой дискретную двумеризованную цепочку Тоды (см. также работы [6]–[8]). Простейшим нетривиальным замыканием уравнения (1.12) и, следовательно, дискретным уравнением Лиувилля является

$$u_{i+1,j+1} \left(1 + \frac{1}{u_{i+1,j}}\right) \left(1 + \frac{1}{u_{i,j+1}}\right) u_{ij} = 1. \quad (1.13)$$

Это уравнение в несколько иной форме было впервые введено в статье [9].

В последние десятилетия велись активные исследования интегрируемых по Дарбу нелинейных гиперболических систем уравнений вида

$$u_{xy}^i = F^i(x, y, u, u_x, u_y), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.14)$$

(см. работы [10], [11] и приведенную в них библиографию). В частности, были предложены определения инвариантов Лапласа и систем, интегрируемых по Дарбу, и показано, что основные положения метода Лапласа остаются в силе и для систем (1.14). Главные принципиальные отличия в результатах применения метода Лапласа в векторном случае (1.14) по сравнению со скалярным случаем (1.9) заключаются в следующем.

1. Если уравнение (1.14) линейное, то в общем случае основным результатом является не квадратурная формула для решения вида (1.6), а сведение уравнения

в частных производных (1.14) к линейным неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнениям на компоненты вектора неизвестных функций.

2. В векторном случае для нелинейных систем (1.14) “лиувиллевость” (конечность цепочки инвариантов Лапласа) не эквивалентна интегрируемости по Дарбу, а является лишь ее необходимым условием в следующем смысле [12].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. Пусть у системы (1.14) имеется полный набор интегралов, т.е. n -мерная вектор-функция $w(y, u, u_y, u_{yy}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial y^m})$ такая, что $\frac{d}{dx} w = 0$ и матрица $\frac{\partial w}{\partial y_m}$ невырождена ($y_m = \frac{\partial^m u}{\partial y^m}$), и для всех $j \leq m$ существуют и однозначно определены инварианты Лапласа X_j . Тогда $X_m = 0$.

Таким образом, для систем уравнений метод Лапласа с практической точки зрения приводит к следующим результатам.

1. Если исходная система линейна, то метод Лапласа предлагает сведение ее к линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые в ряде конкретных случаев могут быть явно разрешены, а также набор x - и y -интегралов для системы (1.14).

2. В случае нелинейной системы (1.14) метод Лапласа, не давая, вообще говоря, процедуры отыскания интегралов и решений (1.14), тем не менее предлагает простой критерий выделения класса систем, “подозрительных” на интегрируемость по Дарбу.

Главной целью настоящей работы является построение аналога метода Лапласа для систем нелинейных дискретных уравнений вида

$$u_{i+1,j+1}^l = F^l(u_{i+1,j}, u_{i,j+1}, u_{ij}), \quad l = 1, 2, \dots, n. \quad (1.15)$$

Основные теоретические положения идейно следуют результатам, изложенным в работах Жибера и Соколова (см., например, [10]).

Во разделе 2 вводится понятие обобщенного инварианта Лапласа, исследуется условие его существования, а также корректность его определения. В разделе 3 устанавливается связь между условием обрыва цепочки обобщенных инвариантов линейной дискретной системы и наличием соответствующего набора i - и j -интегралов. Показано, что именно обобщенные инварианты Лапласа обеспечивают адекватный критерий “лиувиллевости” системы. В разделе 4 рассматриваются некоторые примеры – линейные и нелинейные системы вида (1.15) – уравнений “типа Лиувилля”. На этих примерах продемонстрированы основные возможности метода: линейные дискретные системы приводятся к линейным обыкновенным разностным уравнениям, для нелинейных проводится процедура проверки “лиувиллевости” как необходимого условия интегрируемости по Дарбу.

2. ОБОБЩЕННЫЕ ИНВАРИАНТЫ ЛАПЛАСА

Рассмотрим систему линейных разностных уравнений

$$u_{i+1,j+1} + A_{ij}u_{i+1,j} + B_{ij}u_{i,j+1} + C_{ij}u_{ij} = 0, \quad i, j \in \mathbb{Z}, \quad (2.1)$$

где $u_{ij} = (u_{ij}^1, u_{ij}^2, \dots, u_{ij}^n)^T$ – член последовательности неизвестных векторов, A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} – некоторые $(n \times n)$ -матрицы. Уравнение (2.1) перепишем в виде $L_0 u = 0$,

где

$$L_0 = T_i T_j + A_{ij} T_i + B_{ij} T_j + C_{ij} = (T_i + A_{ij})(T_j + B_{i-1,j}) + H_{ij}^0, \quad (2.2)$$

T_i, T_j – операторы сдвига по i и j соответственно: $T_i u_{ij} = u_{i+1,j}$, $T_j u_{ij} = u_{i,j+1}$,

$$H_{ij}^0 = C_{ij} - A_{ij} B_{i-1,j}. \quad (2.3)$$

Аналогичным образом записывается представление

$$L_0 = (T_j + B_{ij})(T_i + A_{i,j-1}) + K_{ij}^0, \quad (2.4)$$

$$K_{ij}^0 = C_{ij} - B_{ij} A_{i,j-1}. \quad (2.5)$$

Предположим, что $H_{ij}^0 = 0$. Тогда система (2.1) принимает вид

$$(T_i + A_{ij})(T_j + B_{i-1,j})u_{ij} = 0.$$

Положив $\bar{u}_{ij} = (T_j + B_{i-1,j})u_{ij}$, приходим к системе “обыкновенных” линейных однородных разностных уравнений вида $(T_i + A_{ij})\bar{u}_{ij} = 0$. Если решение этой системы подставить в уравнение $(T_j + B_{i-1,j})u_{ij} = \bar{u}_{ij}$, то задача восстановления решения исходной системы (2.1) снова сводится к исследованию системы “обыкновенных” линейных разностных уравнений. Таким образом, равенство нулю величины H_{ij}^0 , хотя и не дает квадратурной формулы для решения исходного уравнения (как это было в скалярном случае), тем не менее позволяет значительно упростить процесс поиска этого решения.

В случае $H_{ij}^0 \neq 0$ необходимо определить цепочку инвариантов. Имея формулу (2.2), зададим итеративную процедуру вычисления цепочки операторов:

$$\begin{aligned} L_k &= (T_i + A_{i,j+k})(T_j + B_{i-1,j}^k) + H_{ij}^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad B_{ij}^0 = B_{ij}, \\ (T_j + B_{ij}^{k+1})L_k &= L_{k+1}(T_j + B_{i-1,j}^k), \end{aligned} \quad (2.6)$$

откуда получаем уравнения для определения матриц B_{ij}^k и H_{ij}^k :

$$B_{ij}^{k+1} H_{ij}^k = H_{i,j+1}^k B_{i-1,j}^k, \quad (2.7)$$

$$H_{ij}^{k+1} = H_{i,j+1}^k + B_{ij}^{k+1} A_{i,j+k} - A_{i,j+k-1} B_{i-1,j}^{k+1}. \quad (2.8)$$

Если матрица H_{ij}^k невырождена, то уравнение (2.7) дает матрицу B_{ij}^{k+1} , после подстановки которой в (2.8) получаем инвариант H_{ij}^{k+1} . Однако, если матрица H_{ij}^k вырождена и не совпадает с нулевой, встает вопрос о корректном определении матрицы B_{ij}^{k+1} . Во-первых, система (2.7) может оказаться не разрешимой относительно B_{ij}^{k+1} , во-вторых, если эта система разрешима, то B_{ij}^{k+1} определяется неоднозначно, с точностью до матрицы D_{ij} такой, что $D_{ij} H_{ij}^k = 0$. Перейдем к обсуждению условий корректного определения цепочки инвариантов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Матрицу

$$X_{ij}^k = H_{i+k,j}^k H_{i+k-1,j}^{k-1} \dots H_{ij}^0 \quad (2.9)$$

назовем *обобщенным инвариантом системы* (2.1).

Аналогичным образом для цепочки инвариантов K_{ij} получаем формулы

$$A_{ij}^{k+1} K_{ij}^k = K_{i+1,j}^k A_{i,j-1}^k, \quad (2.10)$$

$$K_{ij}^{k+1} = K_{i+1,j}^{k+1} + A_{ij}^{k+1} B_{i+k,j} - B_{i+k-1,j} A_{i,j-1}^{k+1} \quad (2.11)$$

и определение соответствующего обобщенного инварианта

$$Y_{ij}^k = K_{i,j+k}^k K_{i,j+k-1}^{k-1} \cdots K_{ij}^0. \quad (2.12)$$

ЛЕММА 2.1. Система уравнений на матрицу B_{ij}^{k+1}

$$B_{i+k,j}^{k+1} X_{ij}^k = X_{i,j+1}^k B_{i-1,j}^0 \quad (2.13)$$

имеет решение тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$B_{i-1,j}^0 \operatorname{Ker} X_{ij}^k \subset \operatorname{Ker} X_{i,j+1}^k. \quad (2.14)$$

Система уравнений на матрицу A_{ij}^{k+1}

$$A_{i,j+k}^{k+1} Y_{ij}^k = Y_{i+1,j}^k A_{i,j-1}^0 \quad (2.15)$$

имеет решение тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$A_{i,j-1}^0 \operatorname{Ker} Y_{ij}^k \subset \operatorname{Ker} Y_{i+1,j}^k. \quad (2.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение. Пусть элемент

$$x \in B_{i-1,j}^0 \operatorname{Ker} X_{ij}^k \Rightarrow X_{ij}^k y = 0, \quad x = B_{i-1,j}^0 y$$

Имеем равенство $0 = B_{i+k}^{k+1} X_{ij}^k y = X_{i,j+1}^k B_{i-1,j}^0 y = X_{i,j+1}^k x \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} X_{i,j+1}^k$.

Положим $D = X_{i,j+1}^k B_{i-1,j}^0$, тогда (2.13) переписывается как $D - B_{i+k}^{k+1} X_{ij}^k = 0$. Пусть d^l – l -й столбец матрицы D^T , x^l – l -й столбец $(B_{i+k,j}^{k+1})^T$, $l = 1, 2, \dots, n$. Системе (2.13) запишем как набор уравнений $d^l - (X_{ij}^k)^T x^l = 0$, $l = 1, 2, \dots, n$. По теореме Фредгольма эта неоднородная система разрешима тогда и только тогда, когда вектор d^l ортогонален любому решению сопряженной однородной системы $X_{ij}^k z = 0$, т.е. $z^T d^l = 0$, $l = 1, 2, \dots, n$. Следовательно, $z^T D^T = 0 \Rightarrow D z = 0$, отсюда

$$\operatorname{Ker} X_{ij}^k \subset \operatorname{Ker} D = \operatorname{Ker}(X_{i,j+1}^k B_{i-1,j}^0). \quad (2.17)$$

Последнее условие и есть условие разрешимости. В силу (2.14) имеем следующее: пусть $y \in \operatorname{Ker} X_{ij}^k$, тогда $X_{i,j+1}^k B_{i-1,j}^0 y = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} X_{ij}^k \subset \operatorname{Ker}(X_{i+1,j}^k B_{i-1,j}^0)$, что совпадает с условием (2.17).

Доказательство второй части леммы проводится аналогичным образом.

ЛЕММА 2.2. Пусть выполнены следующие условия:

$$A_{i+l+1,j+l}^T \operatorname{Ker}(X_{i+1,j}^l)^T \subset \operatorname{Ker}(X_{ij}^l)^T, \quad l = 0, 1, \dots, k; \quad (2.18)$$

$$\operatorname{Ker}(X_{i,j}^0)^T \subset \operatorname{Ker}(X_{i-1,j-1}^1)^T \subset \cdots \subset \operatorname{Ker}(X_{i-k,j-k}^k)^T. \quad (2.19)$$

Тогда обобщенный инвариант $X_{i,j}^{k+1}$ не зависит от выбора $B_{i,j}^1, B_{i,j}^2, \dots, B_{i,j}^k$.

Пусть выполнены следующие условия:

$$B_{i+l,j+l+1}^T \text{Ker}(Y_{i,j+1}^l)^T \subset \text{Ker}(Y_{ij}^l)^T, \quad l = 0, 1, \dots, n; \quad (2.20)$$

$$\text{Ker}(Y_{i,j}^0)^T \subset \text{Ker}(Y_{i-1,j-1}^1)^T \subset \dots \subset \text{Ker}(Y_{i-n,j-n}^n)^T. \quad (2.21)$$

Тогда обобщенный инвариант $Y_{i,j}^{n+1}$ не зависит от выбора $A_{i,j}^1, A_{i,j}^2, \dots, A_{i,j}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем равенства

$$H_{ij}^1 = H_{i,j+1}^0 + B_{ij}^1 A_{ij} - A_{i,j+1} B_{i-1,j}^1, \quad B_{ij}^1 H_{ij}^0 = H_{i,j+1}^0 B_{i-1,j}^0,$$

и матрица B^1 определяется с точностью до элемента d_{ij}^1 такого, что $d_{ij}^1 H_{ij}^0 = 0$. Тогда обобщенный инвариант

$$X_{ij}^1 = H_{i+1,j+1}^0 + (B_{i+1,j}^1 A_{i+1,j} - A_{i+1,j+1} B_{ij}^1) H_{ij}^0 \quad (2.22)$$

определяется с точностью до величины $d_{i+1,j}^1 A_{i+1,j} H_{ij}^0$. Пусть $y_{ij} = d_{ij}^T \in \text{Ker}(X_{ij}^0)^T$ и $x_{ij} = A_{i+1,j}^T y_{i+1,j}$. Так как $(X_{ij}^0)^T y_{ij} = 0$, имеем $x_{ij} \in A_{i+1,j}^T \text{Ker}(X_{i+1,j}^0)^T$, и по условию (2.18) $x_{ij} \in \text{Ker}(X_{ij}^0)^T \Rightarrow (X_{ij}^0)^T A_{i+1,j}^T y_{i+1,j} = 0 \Rightarrow d_{i+1,j} A_{i+1,j} X_{ij}^0 = 0$. Следовательно, обобщенный инвариант X_{ij}^1 строится по формуле (2.22) однозначно. Теперь применим метод математической индукции. Пусть для номера k лемма верна. Имеем

$$X_{ij}^{k+1} = H_{i+k+1,j}^{k+1} X_{ij}^k = (B_{i+k+1,j}^{k+1} A_{i+k+1,j+k} - A_{i+k+1,j+k+1} B_{i+k,j}^{k+1}) X_{ij}^k + H_{i+k+1,j+1}^k X_{ij}^k. \quad (2.23)$$

Сначала докажем инвариантность слагаемого

$$(B_{i+k+1,j}^{k+1} A_{i+k+1,j+k} - A_{i+k+1,j+k+1} B_{i+k,j}^{k+1}) X_{ij}^k$$

относительно выбора матрицы B^{k+1} . Имеем $B_{i+k,j}^{k+1} X_{ij}^k = X_{i,j+1}^k B_{i-1,j}^0$, следовательно, произведение $B_{i+k,j}^{k+1} X_{ij}^k$ определено однозначно. Величина $B_{i+k+1,j}^{k+1} A_{i+k+1,j+k} X_{ij}^k$ определяется с точностью до слагаемого $d_{i+k+1,j+k}^{k+1} A_{i+k+1,j+k} X_{ij}^k$, где $d_{ij}^{k+1} H_{ij}^k = 0$. Убедимся, что при выполнении условий леммы это слагаемое обращается в нуль. Пусть $y_{ij} = (d_{i+1,j}^{k+1})^T \in \text{Ker}(H_{i+1,j}^k)^T \Rightarrow A_{i+1,j+k}^T y_{ij} \in A_{i+1,j+k}^T \text{Ker}(H_{i+1,j}^k)^T \subset A_{i+1,j+k}^T \text{Ker}(X_{i-k+1,j}^k)^T \subset \text{Ker}(X_{i-k,j}^k)^T$ (мы учли условие (2.18)), следовательно, $(X_{ij}^k)^T A_{i+k+1,j+k}^T y_{i+k,j} = 0$ или, что эквивалентно, $d_{i+k+1,j}^{k+1} A_{i+k+1,j+k} X_{ij}^k = 0$. Теперь докажем однозначность определения последнего слагаемого в формуле (2.23). Запишем соотношение

$$H_{i+k+1,j+1}^k X_{ij}^k = (B_{i+k+1,j+1}^k A_{i+k+1,j+k} - A_{i+k+1,j+k+1} B_{i+k,j+1}^k) X_{ij}^k + H_{i+k+1,j+2}^{k-1} X_{ij}^k.$$

Снова рассмотрим два слагаемых. Сначала покажем корректность определения величины $B_{i+k,j+1}^k X_{ij}^k$. Введем $y_{ij} = (d_{ij}^k)^T \in \text{Ker}(H_{ij}^{k-1})^T \subset \text{Ker}(X_{i-k+1,j}^{k-1})^T \subset \text{Ker}(X_{i-k,j-1}^k)^T$ (мы учли условие (2.19)). Следовательно,

$$(X_{i-k,j-1}^k)^T (d_{ij}^k)^T = d_{ij}^k X_{i-k,j-1}^k = 0$$

и $d_{i+k,j+1}^k X_{ij}^k = 0$, что и требовалось доказать. Осталось слагаемое

$$B_{i+k+1,j+1}^k A_{i+k+1,j+k} X_{ij}^k,$$

определяемое с точностью до величины $d_{i+k+1,j+1}^k A_{i+k+1,j+k} X_{ij}^k$, где $d_{ij}^k H_{ij}^{k-1} = 0$. Снова вводим

$$\begin{aligned} y_{ij} &= (d_{ij}^k)^T \in \text{Ker}(H_{ij}^{k-1})^T \Rightarrow A_{i+1,j+k}^T y_{i+1,j+1} \in A_{i+1,j+k}^T \text{Ker}(X_{i-k+2,j+1}^{k-1})^T \subset \\ &\subset \text{Ker}(X_{i-k+1,j+1}^{k-1})^T \subset \text{Ker}(X_{i-k,j}^k)^T. \end{aligned}$$

Значит, $0 = (X_{i-k,j}^k)^T A_{i+1,j+k}^T y_{i+1,j+1} = d_{i+k+1,j+1}^k A_{i+k+1,j+k} X_{ij}^k$. Доказательство независимости величин $H_{i+k+1,j+l+1}^{k-l} X_{ij}^k$, $l = 0, 1, \dots, k-1$, от выбора матриц $B^1, B^2, \dots, B^{k-l}$ проводится подобным образом. Первое утверждение леммы доказано.

Доказательство второго утверждения леммы аналогично.

3. ОБОБЩЕННЫЕ ИНВАРИАНТЫ И МЕТОД ЛАПЛАСА

Теперь убедимся, что обобщенные инварианты X_{ij}^k и Y_{ij}^k , корректно определяемые рекуррентной процедурой (2.7)–(2.12), играют важную роль в нахождении решения исходного уравнения.

ЛЕММА 3.1. Пусть обобщенный инвариант $X_{ij}^k = 0$. Если выполнено условие

$$\text{Ker}(X_{ij}^{k-1})^T \subset R_{ij}^k \text{Ker}(X_{ij}^{k-1})^T, \quad (3.1)$$

где оператор R_{ij}^k таков, что

$$R_{ij}^k x_{ij} = A_{i+k,j+k-1}^T x_{ij} - x_{i-1,j} A_{i+k,j+k}^T,$$

то матрицу B_{ij}^k можно выбрать так, что соответствующий инвариант H_{ij}^k обращается в нуль: $H_{ij}^k = 0$.

Если $Y_{ij}^m = 0$ и выполнено условие

$$\text{Ker}(Y_{ij}^{m-1})^T \subset S_{ij}^m \text{Ker}(Y_{ij}^{m-1})^T, \quad (3.2)$$

где оператор S_{ij}^m таков, что

$$S_{ij}^m x_{ij} = B_{i+m-1,j+m}^T x_{ij} - x_{i,j-1} B_{i+m,j+m}^T,$$

то матрицу A_{ij}^m можно выбрать так, что соответствующий инвариант K_{ij}^m обращается в нуль: $K_{ij}^m = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $X_{ij}^k = H_{i+k,j}^k X_{ij}^{k-1} \Rightarrow (H_{i+k,j}^k)^T \in \text{Ker}(X_{ij}^{k-1})^T$, следовательно, в силу условия (3.1) найдется элемент $e_{ij}^T \in \text{Ker}(X_{ij}^{k-1})^T$ такой, что

$$\begin{aligned} (X_{i+k,j}^k)^T &= R_{ij}^k(e_{ij}^T) = A_{i+k,j+k-1}^T e_{ij}^T - e_{i-1,j}^T A_{i+k,j+k}^T \Rightarrow \\ &\Rightarrow H_{i+k,j}^k = e_{ij}^T A_{i+k,j+k-1} - A_{i+k,j+k} e_{i-1,j}^T. \end{aligned} \quad (3.3)$$

С другой стороны, имеем следующее:

$$H_{i+k,j}^k = B_{i+k,j}^k A_{i+k,j+k-1} - A_{i+k,j+k} B_{i+k-1,j}^k + H_{i+k,j+1}^{k-1}. \quad (3.4)$$

Вычтем (3.3) из (3.4), получим

$$(B_{ij}^k - e_{i-k,j}) A_{i,j+k-1} - A_{i,j+k} (B_{i-1,j}^k - e_{i-k-1,j}) + H_{i,j+1}^{k-1} = 0.$$

Следовательно, если при определении инварианта H_{ij}^k (3.4) в качестве матрицы B_{ij}^k выбрать $B_{ij}^k - e_{i-k,j}$, то будет выполнено равенство $H_{ij}^k = 0$, что и требовалось доказать. Вторая часть леммы доказывается аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условия лемм 2.1, 2.2, 3.1 не выполняются в общем случае и требуют проверки на каждом шаге итеративной процедуры, таким образом, требование их выполнения выделяет специальный класс уравнений, допускающих такую процедуру. К системам, для которых какое-либо из указанных условий не выполнено, метод Лапласа в описываемом виде не применим. В примере 4.2 (см. раздел 4) приведенная итеративная процедура для линейной системы (4.4), обрывающаяся на втором шаге. Легко убедиться, что корректность перехода ко второму шагу обусловлена выполнением специального условия (4.5) на матрицу B_{ij} (один из коэффициентов исходного уравнения) и, естественно, выделяет класс систем вида (4.4), к которым применим метод Лапласа.

Теперь можно привести следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Система нелинейных уравнений

$$u_{i+1,j+1}^l = F^l(u_{ij}, u_{i+1,j}, u_{i,j+1}), \quad l = 1, 2, \dots, n, \quad (3.5)$$

называется *системой типа Лиувилля*, если цепочки обобщенных инвариантов для ее линеаризации

$$\left(T_i T_j - \frac{\partial F}{\partial u_{ij}} - \frac{\partial F}{\partial u_{i+1,j}} T_i - \frac{\partial F}{\partial u_{i,j+1}} T_j \right) u_{ij} = 0 \quad (3.6)$$

обрываются, т.е. $X_{ij}^n = Y_{ij}^m = 0$ для некоторых целых n и m .

Следующая лемма устанавливает связь между обрывом цепочки обобщенных инвариантов линейной системы и наличием у нее набора i - и j -интегралов.

ЛЕММА 3.2. Пусть для линейной системы (2.1) выполнены условия лемм 2.1, 2.2, 3.1. Имеют место следующие утверждения.

Пусть $X_{ij}^m = 0$. Тогда

$$I = G_{i-1,j}(T_j + B_{i-1,j}^m)(T_j + B_{i-1,j}^{m-1}) \dots (T_j + B_{i-1,j}^0) u_{ij}$$

есть i -интеграл системы (2.1). Здесь матрица B^m выбрана так, что $H^m = 0$, u – решение исходной системы, а матрица G_{ij} удовлетворяет уравнению $G_{i-1,j} = G_{ij} A_{i,j+m}$.

Пусть $Y_{ij}^n = 0$. Тогда

$$J = M_{i,j-1}(T_i + A_{i,j-1}^n)(T_i + A_{i,j-1}^{n-1}) \dots (T_i + A_{i,j-1}^0)u_{ij}$$

есть j -интеграл системы (2.1). Здесь матрица A^n выбрана так, что $K^n = 0$, u – решение исходной системы, а матрица M_{ij} удовлетворяет уравнению $M_{i,j-1} = M_{ij}B_{i+n,j}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем k -й оператор из цепочки,

$$L_k = (T_i + A_{i,j+k})(T_j + B_{i-1,j}^k) + H_{ij}^k,$$

и соотношение

$$(T_j + B_{i-1,j}^{k+1})L_k = L_{k+1}(T_j + B_{i-1,j}^k).$$

Умножим последнее равенство справа на оператор $T_j + B_{i-1,j}^{k-1}$, получим

$$L_{k+1}(T_j + B_{i-1,j}^k)(T_j + B_{i-1,j}^{k-1}) = (T_j + B_{i-1,j}^{k+1})(T_j + B_{i-1,j}^k)L_{k-1},$$

продолжим этот процесс и для любого номера k будем иметь

$$L_k(T_j + B_{i-1,j}^{k-1})(T_j + B_{i-1,j}^{k-2}) \dots (T_j + B_{i-1,j}^0) = (T_j + B_{i-1,j}^k)(T_j + B_{i-1,j}^{k-1}) \dots (T_j + B_{i-1,j}^1)L_0,$$

где $L_0 u = 0$ – исходное уравнение (2.1). Так как $X_{ij}^m = 0$ и матрица B_{ij}^m выбрана так, что $H_{ij}^m = 0$, получаем

$$L_m = (T_i + A_{i,j+m})(T_j + B_{i-1,j}^m).$$

Если u – решение исходной системы $L_0 u = 0$, то

$$(T_i + A_{i,j+m})(T_j + B_{i-1,j}^m)(T_j + B_{i-1,j}^{m-1}) \dots (T_j + B_{i-1,j}^0)u = 0.$$

Домножим это равенство слева на матрицу G_{ij} . Так как $G_{ij}(T_i + A_{i,j+m}) = (T_i - 1) \times G_{ij}$, имеем

$$(T_i - 1)[G_{i-1,j}(T_j + B_{i-1,j}^m)(T_j + B_{i-1,j}^{m-1}) \dots (T_j + B_{i-1,j}^0)u_{ij}] = 0,$$

что и требовалось доказать. Второе утверждение леммы доказывается аналогично.

4. ПРИМЕРЫ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим частный случай системы (2.1), когда матрица $C_{ij} \equiv 0$. С помощью формул (2.7), (2.8) легко установить, что верны следующие соотношения:

$$X_{ij}^k = (-1)^{k+1} \left(\prod_{l=0}^k A_{i+k-l,j+k} \right) \left(\prod_{l=0}^k B_{i-1,j+k-l} \right), \quad (4.1)$$

где $\prod_{l=0}^k A_{i+k-l,j+k} = A_{i+k,j+k} A_{i+k-1,j+k} A_{i+k-2,j+k} \dots A_{i,j+k}$ и, соответственно,

$$Y_{ij}^m = (-1)^{m+1} \left(\prod_{l=0}^m B_{i+m,j+m-l} \right) \left(\prod_{l=0}^m A_{i+m-l,j-1} \right). \quad (4.2)$$

ПРИМЕР 4.1. Рассмотрим дискретный аналог системы Эйлера–Пуассона (ср. с работами [10], [11], [13]):

$$u_{i+1,j+1} + f_{ij}\alpha u_{i+1,j} + g_{ij}\beta u_{i,j+1} = 0, \quad (4.3)$$

где $u_{ij} = (u_{ij}^1, u_{ij}^2)^T$, α и β – постоянные матрицы размерности 2×2 , f_{ij} и g_{ij} – ненулевые скалярные функции от i и j . Очевидно, что $A_{ij} = f_{ij}\alpha$, $B_{ij} = g_{ij}\beta$. Преобразования вида $u_{ij} \rightarrow Tu_{ij}$ (T – постоянная невырожденная матрица) действуют на матрицы α , β как преобразования подобия, следовательно, одну из них (например α) можно считать приведенной к жордановой форме. Рассмотрим случаи обрыва цепочки обобщенных инвариантов Лапласа.

1. В силу формулы (4.1) имеем следующее: пусть $X_{ij}^0 = 0 \Rightarrow AB = 0 \Rightarrow \det A = \det B = 0$, т.е.

$$\alpha = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Система (4.3) с такими матрицами сводится к скалярному неоднородному линейному уравнению вида

$$u_{i+1,j}^2 + g_{i,j-1}b_2u_{ij}^2 = -b_1g_{i,j-1} \prod_{l=j_0}^{j-1} f_{i-1,l} C_i(-\lambda)^j,$$

где C_i – произвольная последовательность, $u_{ij}^1 = C_i(-\lambda)^j \prod_{l=j_0}^{j-1} f_{i-1,l}$.

2. Пусть $X_{ij}^1 = 0$, тогда $A^2B^2 = 0$. Предположим, что $A^2 = 0$, т.е. $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, следовательно, исходная система снова приводится к скалярному уравнению.

Таким образом, данный пример является тривиальным с точки зрения нашего метода и “интегрируемые” случаи могут быть разрешены без применения процедуры Лапласа.

ПРИМЕР 4.2. Рассмотрим систему вида

$$u_{i+1,j+1} + A_{ij}u_{i+1,j} + B_{ij}u_{i,j+1} = 0, \quad (4.4)$$

где A_{ij} , B_{ij} – матрицы, зависящие от i и j . Найдем условия обрыва цепочки обобщенных инвариантов Лапласа на втором шаге, $X_{ij}^1 = 0$. Пусть матрица A_{ij} имеет вид

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij} & -a_{ij} \frac{a_{i-1,j}}{b_{i-1,j}} \\ b_{ij} & -b_{ij} \frac{a_{i-1,j}}{b_{i-1,j}} \end{pmatrix}$$

с произвольными ненулевыми функциями a_{ij} , b_{ij} . Легко проверить, что $A_{i+1,j} \times A_{ij} = 0$, следовательно, в силу (4.1) верно условие обрыва $X_{ij}^1 = 0$. С помощью прямых вычислений можно показать, что условием разрешимости системы $B_{ij}^1 A_{ij} = A_{i,j+1} B_{i-1,j+1}$ для матрицы B^1 является равенство

$$\frac{b_{ij}B_{ij}^{12} - a_{ij}B_{ij}^{22}}{b_{ij}B_{ij}^{11} - a_{ij}B_{ij}^{21}} = -\frac{a_{i,j-1}}{b_{i,j-1}}, \quad (4.5)$$

а сама матрица B^1 , соответствующая условию $H_{ij}^1 = 0$, имеет вид

$$B_{ij}^1 = \frac{f_{ij}}{b_{ij}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{b_{i,j+1}}{a_{i,j+1}} \end{pmatrix}, \quad f_{ij} = a_{i,j+1} \left(B_{i-1,j+1}^{11} - \frac{a_{i-1,j+1}}{b_{i-1,j+1}} B_{i-1,j+1}^{21} \right).$$

Теперь, пользуясь каскадным методом Лапласа, сведем систему (4.4) к скалярному “обыкновенному” уравнению. Учитывая, что

$$(T_j + B_{ij}^1)L_0 = L_1(T_j + B_{i-1,j}) = (T_i + A_{i,j+1})(T_j + B_{i-1,j}^1)(T_j + B_{i-1,j}),$$

сводим задачу решения неоднородной системы

$$L_0 u_{ij} = [(T_i + A_{ij})(T_j + B_{i-1,j}) + H_{ij}^0] u_{ij} = 0$$

к решению “факторизованной” системы вида

$$(T_i + A_{i,j+1})(T_j + B_{i-1,j}^1)(T_j + B_{i-1,j}) u_{ij} = 0,$$

т.е. последовательности из трех “обыкновенных” разностных систем. В результате получаем следующее скалярное уравнение второго порядка с непостоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} u_{i,j+2}^1 + u_{i,j+1}^1 \left(B_{i-1,j+1}^{11} + B_{i-1,j+1}^{12} \frac{B_{i-1,j}^{22}}{B_{i-1,j}^{12}} \right) + u_{ij}^1 \frac{B_{i-1,j+1}^{12}}{B_{i-1,j}^{12}} \det B_{i-1,j} = \\ = \alpha_{i,j+1} \frac{a_{i-1,j+1}}{b_{i-1,j+1}} + \alpha_{ij} B_{i-1,j+1}^{12} \left(\frac{B_{i-1,j}^{22}}{B_{i-1,j}^{12}} \frac{a_{i-1,j}}{b_{i-1,j}} - 1 \right), \\ u_{ij}^2 = \frac{1}{B_{i-1,j}^{12}} \left(\alpha_{ij} \frac{a_{i-1,j}}{b_{i-1,j}} - u_{i,j+1}^1 - B_{i-1,j}^{11} u_{ij}^1 \right), \quad \alpha_{ij} = (-1)^j C_i \prod_{l=j_0}^j \frac{f_{i-1,l-1} b_{i-1,l}}{b_{i-1,l-1} a_{i-1,l}}, \end{aligned}$$

где C_i – произвольная последовательность.

ПРИМЕР 4.3. Рассмотрим дискретную двумеризованную цепочку Тоды (1.12)

$$(h_{i,j+1}^{k-1} + 1)(h_{i+1,j}^{k+1} + 1) = \left(1 + \frac{1}{h_{i,j+1}^k} \right) \left(1 + \frac{1}{h_{i+1,j}^k} \right) h_{ij}^k h_{i+1,j+1}^k$$

и ее двухкомпонентное замыкание: $h^l = 0$ при $l \neq 0, 1$, $h_{ij}^0 = u_{ij}$, $h_{ij}^1 = v_{ij}$. Таким образом, имеем нелинейную систему вида

$$\begin{aligned} v_{i+1,j} + 1 &= \left(1 + \frac{1}{u_{i+1,j}} \right) \left(1 + \frac{1}{u_{i+1,j}} \right) u_{ij} u_{i+1,j+1}, \\ u_{i,j+1} + 1 &= \left(1 + \frac{1}{v_{i+1,j}} \right) \left(1 + \frac{1}{v_{i+1,j}} \right) v_{ij} v_{i+1,j+1}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Эта система (см. работы [8], [14]) является одним из дискретных аналогов конечных цепочек Тоды, отвечающих простым алгебрам Ли. N -компонентная система, получаемая из двумеризованной цепочки Тоды (1.12) простейшим замыканием $h^l = 0$

при $l \neq 0, 1, 2, \dots, N-1$, соответствует аналогам цепочки серии $A_N^{(1)}$. В конкретном случае (4.6) (серия A_2) “лиувиллевость” системы может быть проверена прямым вычислением: $X_{ij}^2 = Y_{ij}^2 = 0$.

По аналогии с работой [12] сформулируем следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. Пусть у системы (1.15) имеется полный набор интегралов, т.е. n -мерная вектор-функция $w(j, u_{ij}, u_{i,j\pm 1}, u_{i,j\pm 2}, \dots, u_{i,j\pm m})$ такая, что $T_i w = 0$ и матрица $\partial w / \partial u_{i,j\pm m}$ невырождена, и для всех $j \leq m$ существуют и однозначно определены инварианты Лапласа X_j . Тогда $X_m = 0$.

Таким образом, дискретный аналог цепочки Тоды серии A_2 является системой типа Лиувилля, следовательно, выполнено необходимое условие интегрируемости по Дарбу, т.е. условие наличия набора интегралов по характеристическим направлениям.

Благодарности. Автор благодарит А.В. Жибера за интерес к работе и полезные обсуждения. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты №№ 07-01-00081, 05-01-97910-р-агидель-а) и Фонда содействия отечественной науке.

Список литературы

- [1] G. Darboux, “Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal”, *Déformation infiniment petite et représentation sphérique*, v. IV, Gautier-Villars, Paris, 1896, 353–548.
- [2] I. M. Anderson, N. Kamran, *Duke Math. J.*, **87**:2 (1997), 265–319.
- [3] А. В. Жибер, В. В. Соколов, С. Я. Старцев, *Докл. РАН*, **343**:6 (1995), 746–748.
- [4] А. В. Жибер, В. В. Соколов, *Метод каскадного интегрирования Лапласа и уравнения, интегрируемые по Дарбу*, РИЦ БашГУ, Уфа, 1996.
- [5] В. Э. Адлер, С. Я. Старцев, *ТМФ*, **121**:2 (1999), 271–284.
- [6] R. Hirota, *J. Phys. Soc. Japan*, **50**:11 (1981), 3785–3791.
- [7] D. Levi, L. Pilloni, P. M. Santini, *J. Phys. A*, **14**:7 (1981), 1567–1575.
- [8] R. S. Ward, *Phys. Lett. A*, **199**:1–2 (1995), 45–48.
- [9] R. Hirota, *J. Phys. Soc. Japan*, **46**:1 (1979), 312–319.
- [10] А. В. Жибер, В. В. Соколов, *УМН*, **56**:1(337) (2001), 63–106.
- [11] А. М. Гурьева, *Метод каскадного интегрирования Лапласа и нелинейные гиперболические системы уравнений*, Дисс. ... канд. физ.-мат. наук, УГАТУ, Уфа, 2005.
- [12] А. В. Жибер, В. В. Соколов, С. Я. Старцев, “Нелинейные гиперболические системы лиувиллевого типа”, *Материалы международной конференции “Тихонов-100”*, **1**, 2006, 1–2.
- [13] А. М. Гурьева, А. В. Жибер, *ТМФ*, **138**:3 (2004), 401–421.
- [14] И. Т. Хабибуллин, *ТМФ*, **146**:2 (2006), 208–221.

Поступила в редакцию 16.05.2007,
после доработки 9.07.2007

¹⁾Описанные в работах [8], [14] дискретные аналоги цепочек Тоды, отвечающих алгебрам серий В и С, не являются “четырёхточечными” системами вида (1.15). Применение к ним метода Лапласа зависит от возможности обобщения описанной идеологии на более сложные системы, что, вероятно, послужит объектом изучения в другой работе.