Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. К. Дурдиев, Задача определения нестационарного потенциала в одном уравнении гиперболического типа, *ТМФ*, 2008, том 156, номер 2, 220–225

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6242>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 18:28:01

© 2008 г.

Д. К. Дурдиев*

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОТЕНЦИАЛА В ОДНОМ УРАВНЕНИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Рассмотрена задача об определении коэффициента гиперболического уравнения, зависящего от двух переменных. В качестве дополнительной информации задается след решения прямой задачи на гиперплоскости $x = 0$. Получена оценка устойчивости решения рассматриваемой обратной задачи и доказана теорема единственности.

Ключевые слова: обратная задача, гиперболическое уравнение, устойчивость, единственность.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Рассмотрим обобщенную задачу Коши

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} - a(x, t)u &= \delta(x)\delta'(t - s), & (x, t) \in \mathbb{R}^2, & \quad s > 0, \\ u|_{t < 0} &\equiv 0, \end{aligned} \quad (1)$$

в которой $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака, $\delta'(t) = (d/dt)\delta(t)$, $a(x, t)$ – непрерывная функция, s является параметром задачи, $u = u(x, t, s)$. Обратную задачу поставим следующим образом: требуется найти потенциал $a(x, t)$, если известны значения решения при $x = 0$, т.е. задана функция

$$u(0, t, s) = f(t, s), \quad t > 0, \quad s > 0. \quad (2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Решением обратной задачи (1), (2) будем называть такую функцию $a(x, t)$, что соответствующее ей решение задачи (1) удовлетворяет равенству (2).

Поставленная в этой работе обратная задача является многомерной, а точнее двумерной. В случае, когда $a(x, t) \equiv a(x)$, вопросы разрешимости для различных постановок задач, близких к (1), (2), изучены в книгах [1] (глава 2) и [2] (глава 1). Вопросам разрешимости многомерных обратных задач посвящены работы [3]–[5],

*Бухарский государственный университет, Узбекистан, Бухара.
E-mail: durdiev65@mail.ru

в которых доказаны локальные теоремы существования в классе функций, гладких по одной из переменных и аналитических по остальным переменным. В работе [6] для обратной задачи (1), (2) методом весовых априорных оценок доказана теорема единственности. В настоящей работе мы докажем глобальную единственность и устойчивость решения путем сведения обратной задачи к системе нелинейных интегральных уравнений. При этом мы предполагаем четность по x функции $a(x, t)$.

Пусть

$$Q_T := \{(t, s) \mid 0 \leq s \leq t \leq T\},$$

$$\Omega_T := \{(x, t) \mid 0 \leq |x| \leq t \leq T - |x|\}, \quad T > 0.$$

Предположим, что $f(t, s) \in C_t^1(Q_T)$ и $f(+0, s) = 0$ (здесь $C_t^1(Q_T)$ – класс непрерывных по s и непрерывно дифференцируемых по t функций, заданных на Q_T). Множество функций $f(t, s)$, удовлетворяющих указанным выше требованиям, обозначим через F . Обозначим через $A(a_0)$ множество функций $a(x, t)$ таких, что

$$a(x, t) \in C(\Omega_T), \quad a(-x, t) = a(x, t), \quad |a(x, t)| \leq a_0$$

для всех $(x, t) \in \Omega_T$, где a_0 – фиксированная положительная постоянная.

Сформулируем основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $a_i(x, t) \in A(a_0)$ – решение обратной задачи (1), (2) с $f(t, s) = f_i(t, s) \in F$, $i = 1, 2$. Тогда найдется такое положительное число C , зависящее от a_0 и T , что выполняется оценка

$$\|a_1(x, t) - a_2(x, t)\|_{C(\Omega_T)} \leq C \|f_1(t, s) - f_2(t, s)\|_{C_t^1(Q_T)}. \quad (3)$$

Из теоремы 1 очевидным образом вытекает следующая теорема единственности для любого $T > 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функции $a_i(x, t) \in C(\Omega_T)$ и $f_i(t, s) \in F$, $i = 1, 2$, имеют тот же смысл, что и в теореме 1. Если при этом $f_1(t, s) \equiv f_2(t, s)$ для $(t, s) \in Q_T$, то $a_1(x, t) \equiv a_2(x, t)$ при $(x, t) \in \Omega_T$.

2. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА

Решение прямой задачи (1) представим в виде

$$u(x, t, s) = \frac{1}{2} \delta(t - s - |x|) + v(x, t, s).$$

Подставляя это выражение в (1) и учитывая, что $\delta(t - s - |x|)/2$ удовлетворяет (в обобщенном смысле) уравнению $u_{tt} - u_{xx} = \delta(x) \delta'(t - s)$, мы получаем следующую задачу для функции v :

$$v_{tt} - v_{xx} = a(x, t) \left[\frac{1}{2} \delta(t - s - |x|) + v(x, t, s) \right], \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad s > 0, \quad (4)$$

$$v|_{t < 0} \equiv 0.$$

Согласно формуле Даламбера решение задачи (4) удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(x, t, s) = \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x, t)} a(\xi, \tau) \left[\frac{1}{2} \delta(\tau - s - |\xi|) + v(\xi, \tau, s) \right] d\xi d\tau, \quad (5)$$

$$(x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad s > 0,$$

в котором

$$\Delta(x, t) = \{(\xi, \tau) \mid 0 \leq \tau \leq t - |x - \xi|, x - t \leq \xi \leq x + t\}.$$

Решение уравнения (5) будем искать в виде

$$v(x, t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, t, s), \quad (6)$$

где $v_n(x, t, s)$ определены следующими рекуррентными соотношениями:

$$v_0(x, t, s) = \frac{1}{4} \iint_{\Delta(x, t)} a(\xi, \tau) \delta(\tau - s - |\xi|) d\xi d\tau,$$

$$v_n(x, t, s) = \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x, t)} a(\xi, \tau) v_{n-1}(\xi, \tau, s) d\xi d\tau, \quad n = 1, 2, \dots$$

Используя свойства δ -функции, нетрудно получить другую форму рекуррентных соотношений:

$$v_0(x, t, s) = \frac{1}{4} \theta(t - s - |x|) \int_{\frac{x-(t-s)}{2}}^{\frac{x+(t-s)}{2}} a(\xi, s + |\xi|) d\xi, \quad (7)$$

$$v_n(x, t, s) = \frac{1}{2} \theta(t - s - |x|) \iint_{\square(x, t, s)} a(\xi, \tau) v_{n-1}(\xi, \tau, s) d\xi d\tau, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\theta(t) = 1$ при $t \geq 0$, $\theta(t) = 0$ при $t < 0$, а область $\square(x, t, s)$ есть

$$\square(x, t, s) := \left\{ (\xi, \tau) \mid |\xi| + s \leq \tau \leq t - |x - \xi|, \frac{x - (t - s)}{2} \leq \xi \leq \frac{x + t - s}{2}, \right. \\ \left. 0 \leq s \leq t, s = \text{const} \right\}.$$

Пусть $\square_T := \{(x, t, s) \mid |x| + s \leq t \leq T - |x|, 0 \leq s \leq t \leq T\}$. Область $\square_T$ в пространстве переменных x, t, s представляет собой пирамиду с основанием Ω_T и вершиной $(0, T, T)$. Из формул (7) следует, что $v_n(x, t, s)$ являются непрерывными функциями в $\square_T$ вместе с первыми производными по x, t . Пусть $a_0 = \|a(x, t)\|_{C(\Omega_T)}$. Тогда для $(x, t, s) \in \square_T$ имеем

$$|v_0(x, t, s)| \leq \frac{1}{4} a_0(t - s),$$

$$|v_1(x, t, s)| \leq \frac{a_0^2 T}{8} \int_s^t (\tau - s) d\tau = \frac{1}{2T} \left(\frac{a_0 T}{2} \right) \frac{(t - s)^2}{2!}.$$

Продолжая аналогичные вычисления, найдем, что

$$v_n(x, t, s) \leq \frac{1}{2T} \left(\frac{a_0 T}{2} \right)^2 \frac{(t-s)^n}{n!} \leq \frac{1}{2T n!} \left(\frac{a_0 T^2}{2} \right)^n, \quad (x, t, s) \in \square_T, \quad n \geq 1. \quad (8)$$

В силу этой оценки ряд (6) сходится равномерно в $\square_T$, и его сумма является непрерывной функцией в $\square_T$. Используя (8), имеем

$$\begin{aligned} |v(x, t, s)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |v_n(x, t, s)| \leq \frac{1}{2T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{a_0 T^2}{2} \right)^n = \\ &= \frac{1}{2T} \left[\exp \left(\frac{a_0 T^2}{2} \right) - 1 \right] := \mu_0, \quad (x, t, s) \in \square_T. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (5) следует, что функция $v(x, t, s)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\begin{aligned} v(x, t, s) &= \frac{1}{4} \int_{\frac{x-(t-s)}{2}}^{\frac{x+(t-s)}{2}} a(\xi, s + |\xi|) d\xi + \\ &+ \frac{1}{2} \iint_{\square(x, t, s)} a(\xi, \tau) v(\xi, \tau, s) d\tau d\xi, \quad (x, t, s) \in \square_T. \end{aligned} \quad (10)$$

Поскольку правая часть этого равенства является непрерывно дифференцируемой по x, t функцией, функция $v(x, t, s)$ также непрерывно дифференцируема по x, t в $\square_T$.

Очевидно, что $f(t, s) = u(0, t, s) = v(0, t, s)$, $t > s$. Поэтому $f(t, s) \in C_t^1(Q_T)$. Кроме того, $f(s+0, s) = v(0, t, s)|_{t=s+0} = 0$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Заметим прежде всего, что если $a(-x, t) = a(x, t)$, то $v(-x, t, s) = v(x, t, s)$. Вычисляя производную по t от обеих частей равенства (10), получаем

$$\begin{aligned} v_t(x, t, s) &= \frac{1}{2} \left[a \left(\frac{x+t-s}{2}, \frac{x+t+s}{2} \right) + a \left(\frac{x-t+s}{2}, \frac{-x+t+s}{2} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\frac{x-(t-s)}{2}}^{\frac{x+(t-s)}{2}} a(\xi, t - |x - \xi|) v(\xi, t - |x - \xi|, s) d\xi, \quad (x, t, s) \in \square_T. \end{aligned}$$

Положим в этом равенстве $x = 0$ и воспользуемся четностью по x функций $a(x, t)$, $v(x, t, s)$, приходим к следующему соотношению:

$$f_t(t, s) = \frac{1}{4} a \left(\frac{t-s}{2}, \frac{t+s}{2} \right) + \int_0^{\frac{t-s}{2}} a(\xi, t - \xi) v(\xi, t - \xi, s) d\xi, \quad (t, s) \in Q_T.$$

Перепишем это равенство, заменяя $(t-s)/2$ на $|x|$, $(t+s)/2$ – на t и разрешая относительно $a(x, t)$. Получаем

$$\begin{aligned} a(x, t) &= 4f'_t(t + |x|, t - |x|) - \\ &- 4 \int_0^{|x|} a(\xi, t + |x| - \xi) v(\xi, t + |x| - \xi, t - |x|) d\xi, \quad (x, t) \in \Omega_T. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, чтобы найти значение функции a в точке (x, t) , нужно проинтегрировать функцию $a(x, t)$ по отрезку с концами $(0, t + |x|)$, $(|x|, t)$, а функцию $v(x, t, s)$ – по отрезку с концами $(0, t + |x|, t - |x|)$, $(|x|, t, t - |x|)$, которые принадлежат области $\square_T$.

Заметим, что четная относительно $x = 0$ функция v удовлетворяет условию

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0.$$

Пусть выполнены условия теоремы 1. Функции a_i , v_i , $i = 1, 2$, удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} - a_i(x, t)v_i &= 0, & 0 < x < t - s, \\ v_i|_{x=0} &= f_i(t, s), & \left. \frac{\partial v_i}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0, & 0 < t - s \leq T, \end{aligned}$$

отсюда на основе формулы Даламбера, дающей решение задачи Коши с условием при $x = 0$, получаем следующее интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} v_i(x, t, s) &= \frac{f_i(t + x, s) + f_i(t - x, s)}{2} - \\ &- \frac{1}{2} \iint_{\Delta'(x, t)} a_i(\xi, \tau) v_i(\xi, \tau, s) d\xi d\tau, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (12)$$

$$0 \leq x \leq t - s \leq T - x, \quad \Delta'(x, t) := \{(\xi, \tau) \mid 0 \leq \xi \leq x, |\tau - t| \leq x - \xi\}.$$

Введем разности $\tilde{v} = v_1 - v_2$, $\tilde{a} = a_1 - a_2$, $\tilde{f} = f_1 - f_2$. Тогда из уравнения (12) получим, что

$$\begin{aligned} \tilde{v}(x, t, s) &= \frac{\tilde{f}(t + x, s) + \tilde{f}(t - x, s)}{2} - \\ &- \frac{1}{2} \iint_{\Delta'(x, t)} [\tilde{a}(\xi, \tau) v_1(\xi, \tau) + a_2(\xi, \tau) \tilde{v}(\xi, \tau)] d\xi d\tau \end{aligned} \quad (13)$$

для $0 \leq x \leq t \leq T - x$. Рассматривая уравнения для a_i , v_i , $i = 1, 2$, получим формулу, аналогичную (11):

$$a_i(x, t) = 4f'_t(t + x, t - x) - 4 \int_0^x a_i(\xi, t + x - \xi) v(\xi, t + x - \xi, t - x) d\xi, \quad 0 \leq x \leq t \leq T - x.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{a}(x, t) &= 4f'_t(t + x, t - x) - 4 \int_0^x [\tilde{a}(\xi, t + x - \xi) v_1(\xi, t + x - \xi, t - x) + \\ &+ a_2(\xi, t + x - \xi) \tilde{v}(\xi, t + x - \xi, t - x)] d\xi. \end{aligned} \quad (14)$$

Пусть

$$\psi(x) := \max \left[\max_{x \leq t \leq T-x} |a(x, t)|, \max_{x+s \leq t \leq T-x} |v(x, t, s)| \right], \quad x \in \left[0, \frac{T}{2} \right], \quad s \in [0, T].$$

Используя уравнения (13), (14), находим, что при $0 \leq x+s \leq t \leq T-x$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |\tilde{v}(x, t, s)| &\leq \|\tilde{f}(t, s)\|_{C(0 \leq s \leq t \leq T)} + \frac{1}{2} \iint_{\Delta'(x, t)} \psi(\xi)(\mu_0 + a_0) d\xi d\tau \leq \\ &\leq \|\tilde{f}(t, s)\|_{C_t^1(0 \leq s \leq t \leq T)} + \frac{T}{2}(\mu_0 + a_0) \int_0^x \psi(\xi) d\xi, \\ |\tilde{a}(x, t)| &\leq 4\|\tilde{f}(t, s)\|_{C_t^1(0 \leq s \leq t \leq T)} + 4(\mu_0 + a_0) \int_0^x \psi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Из этих неравенств следует, что $\psi(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\psi(x) \leq 4\|\tilde{f}(t, s)\|_{C_t^1(0 \leq s \leq t \leq T)} + \mu_1 \int_0^x \psi(\xi) d\xi, \quad x \in \left[0, \frac{T}{2}\right],$$

в котором $\mu_1 = (\mu_0 + a_0) \max(4, T/2)$. С учетом неравенства Гронуолла получаем оценку (3).

Теорема 2 при любом фиксированном $T > 0$ является следствием доказанной выше теоремы устойчивости.

Список литературы

- [1] В. Г. Романов, *Обратные задачи математической физики*, Наука, М., 1984.
- [2] В. Г. Романов, *Устойчивость в обратных задачах*, Научный мир, М., 2005.
- [3] В. Г. Романов, *Дифф. уравнения*, **25**:2 (1989), 203–209.
- [4] В. Г. Романов, *Докл. АН СССР*, **304**:4 (1989), 807–811.
- [5] Д. К. Дурдиев, *Сиб. матем. журн.*, **35**:3 (1994), 574–582.
- [6] Г. В. Дятлов, *Сиб. матем. журн.*, **42**:1 (2001), 52–59.

Поступила в редакцию 2.07.2007