Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. П. Волобуев, Ю. С. Михайлов, М. Н. Смоляков, Ньютоновский предел в стабилизированной модели Рэндалл–Сундрума, *ТМФ*, 2008, том 156, номер 2, 226–236

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6243>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 11:15:58

© 2008 г. И. П. Волобуев*, Ю. С. Михайлов†, М. Н. Смоляков*

НЬЮТОНОВСКИЙ ПРЕДЕЛ В СТАБИЛИЗИРОВАННОЙ МОДЕЛИ РЭНДАЛЛ–СУНДРУМА

В стабилизированной модели Рэндалл–Сундрума получены и решены линеаризованные уравнения движения для гравитационного и скалярного полей в случае наличия материи на бране. Найден ньютоновский предел эффективной четырехмерной теории на бране с отрицательным натяжением и явно выделен вклад поля радиона.

Ключевые слова: теории Калуцы–Клейна, браны, стабилизация радиона, линеаризованная гравитация, ньютоновский предел.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние несколько лет широко обсуждаются модели с “большими” дополнительными измерениями, в которых фундаментальный энергетический масштаб, определяемый пятимерной массой Планка, лежит в области нескольких ТэВ. Наиболее известной и интересной с феноменологической точки зрения является модель Рэндалл–Сундрума [1]. Эта модель описывает систему из двух бран, взаимодействующих с гравитацией в пятимерном пространстве-времени, и предлагает оригинальное решение проблемы иерархии гравитационного взаимодействия [1]–[3]. Однако у модели Рэндалл–Сундрума имеется существенный недостаток: расстояние между бранами не фиксируется параметрами модели. Это приводит к тому, что в эффективных четырехмерных теориях на бранах появляется безмассовое скалярное поле – радион. Константа связи этого поля с материей на бране с отрицательным натяжением, где предположительно локализованы поля Стандартной модели, оказывается очень большой, что противоречит экспериментальным данным даже на уровне классической гравитации [2], [4].

Эта проблема была решена введением в теорию дополнительного пятимерного скалярного поля – поля Гольдбергера–Вайза [5]. Стабилизация размера дополнительного измерения в этом случае определяется минимумом эффективного потенциала скалярного поля Гольдбергера–Вайза. Так как поле радиона соответствует

*Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.

E-mail: volobuev@theory.sinp.msu.ru, smolyakov@theory.sinp.msu.ru

†Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: mikhailov@theory.sinp.msu.ru

флуктуациям компоненты метрики, отвечающей дополнительному измерению, фиксация размера дополнительного измерения приводит к появлению массы у радиона, что делает такую теорию феноменологически приемлемой.

Однако в модели Гольдбергера–Вайза [5] не учитывается влияние пятимерного скалярного поля на фоновое решение Рэндалл–Сундрума. Этот недостаток был устранен в работе [6], где были найдены точные решения уравнений движения для фоновой конфигурации метрики и скалярного поля. При этом размер дополнительного измерения в этой модели задается граничными условиями на бранах, в отличие от модели Гольдбергера–Вайза.

Последовательное изучение линеаризованной гравитации в модели [6] было проведено в работе [7]. В ней были выделены физические степени свободы модели, найдены волновые функции соответствующих им полей в дополнительном измерении и спектр масс эффективной четырехмерной теории на бране, построены эффективные лагранжианы теории на бране. Однако при изучении линеаризованной гравитации не учитывалось наличие материи на бране, т.е. рассматривалась свободная теория. В данной работе получены классические решения уравнений Эйнштейна в линейном приближении в случае наличия материи на бране с отрицательным натяжением (т.е. в наиболее интересном с феноменологической точки зрения случае), а также вычислен ньютоновский предел для статической точечной массы.

Необходимо отметить, что в работе [8] также была изучена линеаризованная гравитация в модели [6] и найден ньютоновский предел в случае наличия материи на бранах, несколько отличающийся от найденного в настоящей работе. Однако используемый в работе [8] метод нахождения ньютоновского предела чрезвычайно сложен и физически непрозрачен, что сильно затрудняет проверку полученных в ней результатов. Кроме того, в этой работе используются координаты, негалилеевы на бране с материей, а фундаментальный пятимерный масштаб энергий берется равным четырехмерной массе Планка $\sim 10^{19}$ ГэВ, что также затрудняет анализ результатов.

В настоящей работе вычисления ньютоновского потенциала проведены в области применимости линейного приближения методом, предложенным в [7], который был успешно применен для рассмотрения свободной теории, а полученные результаты в предельном случае нестабилизированной модели переходят в выражения для ньютоновского предела в такой модели, найденные в работе [9].

2. ФОНОВОЕ РЕШЕНИЕ

Рассмотрим в пятимерном пространстве-времени $E = M_4 \times S^1/Z_2$ гравитацию, взаимодействующую с двумя мембранами и скалярным полем ϕ . Обозначим координаты в пространстве E через $\{\hat{x}^M\} = \{x^\mu, y\}$, $M = 0, 1, 2, 3, 4$, где $\{x^\mu\}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, – координаты в четырехмерном пространстве-времени, а координата $y \equiv x^4$ соответствует пятому дополнительному измерению. Оно образует орбифолд S^1/Z_2 , представляющий собой окружность диаметра $2L/\pi$ с отождествленными точками y и $-y$. В соответствии с этим метрика g_{MN} и скалярное поле ϕ удовлетворяют условиям

симметрии орбифолда

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x, -y) &= g_{\mu\nu}(x, y), & g_{\mu 4}(x, -y) &= -g_{\mu 4}(x, y), \\ g_{44}(x, -y) &= g_{44}(x, y), & \phi(x, -y) &= \phi(x, y). \end{aligned} \quad (1)$$

Браны расположены в неподвижных точках орбифолда $y = 0$ и $y = L$.

Действие этой модели записывается в виде

$$S = S_1 + S_2, \quad (2)$$

где гравитационное действие S_1 задается формулой

$$S_1 = \frac{1}{\hat{\kappa}^2} \int R \sqrt{-g} d^5 \hat{x}, \quad (3)$$

а действие скалярного поля и мембран есть

$$S_2 = - \int \left(\frac{1}{2} \partial_M \phi \partial^M \phi + V(\phi) \right) \sqrt{-g} d^5 \hat{x} - \int (\lambda_1(\phi) \delta(y) + \lambda_2(\phi) \delta(y - L)) \sqrt{-\tilde{g}} d^5 \hat{x}. \quad (4)$$

Здесь $\hat{\kappa}$ связана с пятимерной гравитационной постоянной $\hat{G}$ соотношением $\hat{\kappa} = \sqrt{16\pi\hat{G}}$, $\tilde{g} = \det \tilde{g}_{\mu\nu}$, $\tilde{g}_{\mu\nu}$ обозначает индуцированную на мембранах метрику. Сигнатура метрики g_{MN} выбрана равной $(-, +, +, +, +)$. Индексы 1 и 2 различают браны. Интегрирование по координате y ведется по окружности S^1 .

Решение для метрики будем искать в виде

$$ds^2 = \gamma_{MN} dx^M dx^N = e^{-2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (5)$$

сохраняющем пуанкаре-инвариантность в четырехмерном пространстве-времени, где $\eta_{\mu\nu}$ есть метрика Минковского, а функции $A(y)$, $\phi(y)$ определяются из уравнений движения

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\phi} + \frac{d\lambda_1}{d\phi} \delta(y) + \frac{d\lambda_2}{d\phi} \delta(y - L) &= -4A' \phi' + \phi'', \\ \frac{6}{\hat{\kappa}^2} (A')^2 + \frac{1}{2} \left(V - \frac{1}{2} (\phi')^2 \right) &= 0, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (\phi')^2 + V + \lambda_1 \delta(y) + \lambda_2 \delta(y - L) \right) &= -\frac{1}{\hat{\kappa}^2} (-3A'' + 6(A')^2). \end{aligned} \quad (6)$$

В этой формуле и далее штрих означает d/dy . Для того чтобы найти аналитическое решение этой системы, воспользуемся результатами работ [6], [10]. Рассмотрим потенциалы вида

$$V(\phi) = \frac{1}{8} \left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2 - \frac{\hat{\kappa}^2}{12} W^2(\phi).$$

Нетрудно проверить, что если положить

$$\phi'(y) = \text{sign}(y) \frac{1}{2} \frac{dW}{d\phi}, \quad A'(y) = \text{sign}(y) \frac{\hat{\kappa}^2}{12} W(\phi), \quad (7)$$

то уравнения движения справедливы всюду, за исключением бран. Для того чтобы уравнения выполнялись и на бранах, необходим согласованный выбор потенциала $V(\phi)$ и потенциалов на бранах $\lambda_{1,2}(\phi)$.

Выберем $W(\phi)$ в виде

$$W = 12 \frac{k}{\hat{\kappa}^2} - u\phi^2, \quad (8)$$

так что $V(\phi)$ имеет вид [7]

$$V(\phi) = -\frac{\hat{\kappa}^2 u^2}{12} \left(\phi^2 - \frac{12k + 3u}{\hat{\kappa}^2 u} \right)^2 + \frac{24ku + 3u^2}{4\hat{\kappa}^2}. \quad (9)$$

Соответствующие потенциалы на бранах можно выбрать равными

$$\lambda_1 = W(\phi_1) + \frac{dW}{d\phi}(\phi_1)(\phi - \phi_1) + \beta_1^2(\phi - \phi_1)^2, \quad (10)$$

$$\lambda_2 = -W(\phi_2) - \frac{dW}{d\phi}(\phi_2)(\phi - \phi_2) + \beta_2^2(\phi - \phi_2)^2. \quad (11)$$

Параметры потенциалов k , u , $\phi_{1,2}$, $\beta_{1,2}$, приведенные к безразмерному виду с помощью фундаментального пятимерного масштаба теории $M = \hat{\kappa}^{-2/3}$, следует считать положительными величинами порядка $O(1)$, т.е. в параметрах модели не должно содержаться иерархического различия масштабов. Также мы предполагаем, что энергетический масштаб теории M находится в пределах 1–10 ТэВ.

Такой выбор потенциалов на бранах (10), (11) в рассматриваемом случае обеспечивает однозначность решения системы уравнений движения, которое в явном виде задается выражениями [6]

$$\phi(y) = \phi_1 e^{-u|y|}, \quad (12)$$

$$A(y) = k|y| + \frac{\hat{\kappa}^2 \phi_1^2}{24} e^{-2u|y|} + C_1, \quad (13)$$

где C_1 – константа. Расстояние между бранами связано с граничными условиями для поля ϕ и выражается через параметры потенциала соотношением

$$L = \frac{1}{u} \ln \left(\frac{\phi_1}{\phi_2} \right). \quad (14)$$

Таким образом, расстояние между бранами, в отличие от модели Рэндалл–Сундрума без скалярного поля, стабилизировано. Это достигается благодаря зависимости решения для скалярного поля от координаты дополнительного измерения.

3. ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Для получения уравнений движения на флуктуации метрики и скалярного поля будем использовать результаты работы [7]. Однако следует отметить, что в случае наличия материи на бранах ситуация несколько меняется, в частности нельзя наложить поперечно-бесследовую калибровку на четырехмерное тензорное поле.

Мы ограничимся рассмотрением случая, когда материя и наблюдатель расположены на бране 2 (в точке $y = L$), где предположительно находится “наш мир”, т.е.

тензор энергии-импульса имеет вид $T_{\mu\nu} = t_{\mu\nu}(x)\delta(y-L)$. Данная ситуация наиболее интересна с точки зрения возможного решения проблемы иерархии [1]–[3]. В этом случае, для того чтобы не заниматься пересчетом энергетических масштабов, с самого начала целесообразно перейти к галилеевым координатам на этой бране, т.е. выбрать константу C_1 в (13) так, что $A|_{y=L} = 0$.

Параметризуем метрику и скалярное поле следующим образом:

$$g_{MN} = \gamma_{MN} + \hat{\kappa} h_{MN}, \quad \phi = \phi' + \hat{\kappa} f.$$

Нетрудно проверить, что линеаризованная теория инвариантна относительно калибровочных преобразований вида (здесь и далее штрих обозначает, что поле преобразовано)

$$h_{\mu\nu}^{(\prime)}(x, y) = h_{\mu\nu}(x, y) - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - 2\gamma_{\mu\nu} A' \xi_4), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} h_{\mu 4}^{(\prime)}(x, y) &= h_{\mu 4}(x, y) - (\partial_\mu \xi_4 + \xi'_\mu + 2A' \xi_\mu), \\ h_{44}^{(\prime)}(x, y) &= h_{44}(x, y) - 2\xi'_4, \\ f^{(\prime)}(x, y) &= f(x, y) - \phi' \xi_4, \end{aligned} \quad (16)$$

если функции $\xi^M(\hat{x})$ удовлетворяют условиям симметрии орбифолда

$$\xi^\mu(x, -y) = \xi^\mu(x, y), \quad \xi^4(x, -y) = -\xi^4(x, y). \quad (17)$$

Мы будем использовать калибровку для полей h_{44} , f и $h_{\mu 4}$, предложенную в работе [7],

$$(e^{-2A} h_{44})' - \frac{2}{3} \hat{\kappa}^2 e^{-2A} \phi' f = 0, \quad h_{\mu 4} = 0. \quad (18)$$

Для наложения этой калибровки нужно выбрать функцию ξ_4 калибровочных преобразований в виде [7]

$$\begin{aligned} \xi_4(x, y) &= e^A \int_0^L \frac{-\chi_1(y)\chi_2(z) + \chi_2(y)\chi_1(z)}{\chi'_1(z)\chi_2(z) - \chi'_2(z)\chi_1(z)} \theta(y-z) \omega(x, z) dz - \\ &- e^A \frac{\chi_1(y)\chi_2(0) - \chi_2(y)\chi_1(0)}{\chi_1(L)\chi_2(0) - \chi_2(L)\chi_1(0)} \times \\ &\times \int_0^L \frac{-\chi_1(L)\chi_2(z) + \chi_2(L)\chi_1(z)}{\chi'_1(z)\chi_2(z) - \chi'_2(z)\chi_1(z)} \omega(x, z) dz, \end{aligned} \quad (19)$$

где $0 \leq y \leq L$,

$$\chi_1 = \exp[ky + qe^{-2uy}], \quad (20)$$

$$\chi_2 = \exp[ky + qe^{-2uy}] \int_0^{2qe^{-2uy}} z^{2s-1} e^{-z} dz = \exp[ky + qe^{-2uy}] \Gamma(2s, 2qe^{-2uy}), \quad (21)$$

$q = \hat{\kappa}^2 \phi_1^2 / 24$, $s = k/2u$ (в работе [7] функции χ_1 , χ_2 представлены не в явном виде, а выражены через гипергеометрические функции). Нетрудно проверить, что найденная функция ξ_4 обращается в нуль на концах отрезка $[0, L]$ и вследствие этого

может быть продолжена до нечетной функции на интервале $(-L, L)$. Отметим, что при использовании данной калибровки браны остаются неизогнутыми (недостатки формализма “изогнутой” браны обсуждаются в работе [11]). Явный вид функции ξ_μ , используемой для наложения калибровки $h_{\mu 4} = 0$, приведен в работе [4].

После наложения этой калибровки остаточные калибровочные преобразования удовлетворяют условию

$$(e^{2A}\xi_\mu)' = 0. \quad (22)$$

Используем теперь подстановку [7]

$$h_{\mu\nu} = u_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}h_{44}, \quad h_{44} = e^{2A}g. \quad (23)$$

В результате этой подстановки с учетом калибровки (18) уравнения для флуктуаций компонент метрики и скалярного поля принимают следующий вид [7]:

1) $\mu 4$ -компонента:

$$(\partial^\nu u_{\mu\nu} - \partial_\mu \tilde{u})' = 0, \quad (24)$$

где $\tilde{u} = \gamma^{\mu\nu}u_{\mu\nu}$;

2) 44 -компонента:

$$\frac{2}{3}e^{-2A}[\partial^\mu \partial^\nu u_{\mu\nu} - \partial^\mu \partial_\mu \tilde{u} + 3A'\tilde{u}'] + g'' + 2g'\left(A' - \frac{\phi''}{\phi'}\right) - \frac{\hat{\kappa}^2 \phi'^2}{3}g + \partial_\mu \partial^\mu g = 0; \quad (25)$$

3) $\mu\nu$ -компонента:

$$\begin{aligned} &\partial_\sigma \partial^\sigma u_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\sigma u_{\sigma\nu} - \partial_\nu \partial^\sigma u_{\sigma\mu} + \partial_\mu \partial_\nu \tilde{u} - 2u_{\mu\nu}(2A'^2 - A'') + \\ &+ \gamma_{\mu\nu}(-\tilde{u}'' - \partial_\sigma \partial^\sigma \tilde{u} + 4A'\tilde{u}' + \partial^\tau \partial^\sigma u_{\sigma\tau}) + u''_{\mu\nu} = -\hat{\kappa}t_{\mu\nu}(x)\delta(y-L); \end{aligned} \quad (26)$$

4) уравнение для поля f :

$$\begin{aligned} &e^{2A}g\left(\frac{d\lambda_1}{d\phi}\delta(y) + \frac{d\lambda_2}{d\phi}\delta(y-L)\right) + 2e^{2A}g(A'\phi' - \phi'') + \\ &+ \phi'\tilde{u}' - 2\hat{\kappa}^2(\phi')^2f - 8A'f' + 2\partial_M \partial^M f - \\ &- 2f\left(\frac{d^2V}{d\phi^2} + \frac{d^2\lambda_1}{d\phi^2}\delta(y) + \frac{d^2\lambda_2}{d\phi^2}\delta(y-L)\right) = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Мы будем также использовать следующее уравнение, получающееся сверткой индексов в $\mu\nu$ -уравнении:

$$\partial^\mu \partial^\nu u_{\mu\nu} - \partial^\mu \partial_\mu \tilde{u} + 6A'\tilde{u}' - \frac{3}{2}\tilde{u}'' = -\frac{\hat{\kappa}}{2}t_\mu^\mu(x)\delta(y-L). \quad (28)$$

Заметим, что при $t_{\mu\nu} = 0$ эти уравнения и граничные условия сводятся к соответствующим уравнениям в работе [7].

Физические степени свободы могут быть выделены с помощью подстановки

$$u_{\mu\nu} = v_{\mu\nu} + e^{-2A}F_2(y)\partial_\mu \partial_\nu \rho(x), \quad (29)$$

где

$$F_2(y) = c_2 \int_0^{|y|} e^{4A(\xi)} d\xi \int_0^\xi e^{-2A(t)} dt, \quad c_2 = -e^{-4A(L)} L \left(\int_0^L e^{-2A(t)} dt \right)^{-1}.$$

Подставляя представление для $u_{\mu\nu}$ в уравнение (28), получим

$$\partial^\mu \partial^\nu v_{\mu\nu} - \partial^\mu \partial_\mu \tilde{v} + 6A' \tilde{v}' - \frac{3}{2} \tilde{v}'' - \square \rho \left(\frac{3}{2} c_2 e^{2A(y)} + 3L \delta(y-L) \right) = -\frac{\hat{\kappa}}{2} t_\mu^\mu \delta(y-L), \quad (30)$$

где $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$.

Выберем ρ таким, что

$$\square \rho = \frac{\hat{\kappa}}{6L} t, \quad (31)$$

где $t = \eta^{\mu\nu} t_{\mu\nu}$. Из уравнения (24) следует, что

$$\partial^\mu \partial^\nu v_{\mu\nu} - \partial^\mu \partial_\mu \tilde{v} \sim e^{2A} b(x).$$

Таким образом, чтобы уравнение (30) выполнялось во всем пятимерном пространстве, необходимо выполнение соотношения

$$6A' \tilde{v}' - \frac{3}{2} \tilde{v}'' \sim e^{2A} D(x),$$

т.е.

$$(e^{-4A} \tilde{v}')' \sim e^{-2A} D(x).$$

Интегрируя последнее выражение по координате дополнительного измерения от $-L$ до L и используя условия периодичности, получим $D(x) = 0$. Используя условия симметрии для поля $v_{\mu\nu}$, получим $\tilde{v}' = 0$. Из уравнения (24) следует, что и $(\partial^\mu v_{\mu\nu})' = 0$.

Используя остаточные калибровочные преобразования (22), на поле $v_{\mu\nu}$ можно наложить калибровку де Дондера

$$\partial^\nu \left(v_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \tilde{v} \right) = 0. \quad (32)$$

Действительно, исходное и преобразованное поля связаны соотношением

$$\partial^\mu \left(v_{\mu\nu}^{(r)} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \tilde{v}^{(r)} \right) = \partial^\mu \left(v_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \tilde{v} \right) - \square \epsilon_\nu(x).$$

Правая часть этого соотношения не зависит от y , и, следовательно, выбором ϵ_ν ее можно обратить в нуль, что доказывает существование калибровки де Дондера.

В результате остаются калибровочные преобразования вида

$$\xi_\mu = e^{-2A} \epsilon_\mu(x), \quad \square \epsilon_\mu = 0. \quad (33)$$

Калибровочные преобразования с функциями ξ_μ , удовлетворяющими этим условиям, важны для выделения физических степеней свободы безмассового гравитона.

Из уравнения (30) следует, что

$$\square \tilde{v} = -\frac{\hat{\kappa}}{2L} c_2 t. \quad (34)$$

В калибровке де Дондера и с учетом (31), (34) уравнение (25) принимает следующий вид:

$$e^{2A} \square g + g'' + 2g' \left(A' - \frac{\phi''}{\phi'} \right) - \frac{\hat{\kappa}^2 \phi'^2}{3} g = -\frac{\hat{\kappa} c_2}{6L} t \left(1 + 2A' \operatorname{sign}(y) e^{2A} \int_0^{|y|} e^{-2A(t)} dt \right). \quad (35)$$

Это уравнение не удается решить точно, поэтому в дальнейшем мы будем использовать условие $uL \ll 1$, предложенное в работе [7] и представляющее физический интерес.

При этом условии $A(y) \simeq \tilde{k}(|y| - L)$, где $\tilde{k} = k - \hat{\kappa}^2 \phi_1^2 u / 12$ (см. [7]), уравнение (35) принимает вид

$$e^{2\tilde{k}(y-L)} \square g + g'' + 2g' \left(\tilde{k} - \frac{\phi''}{\phi'} \right) - \frac{\hat{\kappa}^2 \phi'^2}{3} g = \frac{e^{2\tilde{k}L}}{e^{2\tilde{k}L} - 1} \frac{\hat{\kappa} \tilde{k} t}{3} e^{2\tilde{k}(y-L)}. \quad (36)$$

Как и в случае отсутствия материи на бранах [7], можно показать, что уравнение (27) для поля f сводится к уравнению, полученному дифференцированием уравнения (36) по координате дополнительного измерения, и граничным условиям для поля g , которые имеют вид

$$\begin{aligned} e^{-2\tilde{k}L} \square g + g' \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 \lambda_1}{d\phi^2} - \frac{\phi''}{\phi'} \right) - \frac{1}{e^{2\tilde{k}L} - 1} \frac{\hat{\kappa} \tilde{k}}{3} t \Big|_{y=+0} &= 0, \\ \square g - g' \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 \lambda_2}{d\phi^2} + \frac{\phi''}{\phi'} \right) - \frac{e^{2\tilde{k}L}}{e^{2\tilde{k}L} - 1} \frac{\hat{\kappa} \tilde{k}}{3} t \Big|_{y=L-0} &= 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Подобно случаю $t_{\mu\nu} = 0$ перейдем к переменной $z = p e^{\tilde{k}(y-L)} / \tilde{k}$ и рассмотрим преобразование Фурье $\tilde{g}(p, z)$ поля $g(x, z)$ по четырехмерным координатам $x = \{x^\nu\}$

$$\frac{d^2 \tilde{g}}{dz^2} + \left(3 + \frac{2u}{\tilde{k}} \right) \frac{1}{z} \frac{d\tilde{g}}{dz} - \left(1 + \frac{b^2}{z^2} \right) \tilde{g} = \frac{e^{2\tilde{k}L}}{e^{2\tilde{k}L} - 1} \frac{\hat{\kappa} \tilde{k} t}{3p^2}, \quad b^2 = \frac{\hat{\kappa}^2 \phi_1^2}{3} \frac{u^2}{\tilde{k}^2}. \quad (38)$$

Мы будем рассматривать случай $\tilde{k}L \approx 35$. С учетом того, что $e^A|_{y=0} = e^{-\tilde{k}L}$ — очень маленькая величина, граничные условия на поле $\tilde{g}$ принимают вид

$$\begin{aligned} z \frac{d\tilde{g}}{dz} \Big|_{z=0} &\simeq 0, \\ \tilde{k} z \tilde{g} + (\beta_2^2 - u) \frac{d\tilde{g}}{dz} + \frac{e^{2\tilde{k}L}}{e^{2\tilde{k}L} - 1} \frac{\hat{\kappa} t}{3z} \Big|_{z=p/\tilde{k}} &= 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Однородное уравнение, соответствующее (38), имеет решение, выражающееся через модифицированную функцию Бесселя $\tilde{g} = z^a I_\alpha(z)$, где $a = -(1 + u/\tilde{k})$, $\alpha^2 = a^2 + b^2$.

Решение неоднородного уравнения, регулярное в нуле и удовлетворяющее граничному условию в точке $z = 0$, имеет вид

$$\tilde{g} = \frac{e^{2\tilde{k}L}}{e^{2\tilde{k}L} - 1} \frac{\hat{\kappa}\tilde{k}\tilde{t}}{3p^2} (z^a L_{1-a,\alpha}(z) + C z^a I_\alpha(z)), \quad (40)$$

где

$$L_{1-a,\alpha}(z) = I_\alpha(z) \int_0^z x^{1-a} K_\alpha(x) dx - K_\alpha(z) \int_0^z x^{1-a} I_\alpha(x) dx = i^{a-2} S_{1-a,\alpha}(iz), \quad (41)$$

$S_{c,d}(x)$ – функция Ломмеля ($L_{1-a,\alpha}(z)$ фактически представляет собой функцию Ломмеля мнимого аргумента).

Используя граничное условие в точке $z = p/\tilde{k}$, определим константу C . После несложных вычислений получим

$$C = - \frac{(p/\tilde{k})^{a+1} L_{1-a,\alpha}(p/\tilde{k}) + ((\beta_2^2 - u)/\tilde{k}) d/dz [z^a L_{1-a,\alpha}(z)] + p/\tilde{k}}{(p/\tilde{k})^{a+1} I_\alpha(p/\tilde{k}) + ((\beta_2^2 - u)/\tilde{k}) d/dz [z^a I_\alpha(z)]} \Big|_{z=p/\tilde{k}}. \quad (42)$$

Теперь рассмотрим уравнение для $\mu\nu$ -компонент флуктуаций метрики. После подстановки (29) в калибровке де Дондера оно принимает вид

$$\begin{aligned} e^{2A} \square v_{\mu\nu} + v''_{\mu\nu} - 2v_{\mu\nu} (2A'^2 - A'') = \\ = -\hat{\kappa} \delta(y-L) \left[t_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right) t \right] - \frac{\hat{\kappa}}{12L} c_2 \left[\eta_{\mu\nu} + 2 \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right] t. \end{aligned} \quad (43)$$

При условии $uL \ll 1$ уравнение (43) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} e^{(2\tilde{k}|y|-2\tilde{k}L)} \square v_{\mu\nu} + v''_{\mu\nu} - 4\tilde{k}^2 v_{\mu\nu} + 4\tilde{k} (\delta(y) - \delta(y-L)) v_{\mu\nu} = \\ = -\hat{\kappa} \delta(y-L) \left[t_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right) t \right] + \frac{\hat{\kappa}\tilde{k}}{6(e^{2\tilde{k}L} - 1)} \left[\eta_{\mu\nu} + 2 \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right] t. \end{aligned} \quad (44)$$

Это уравнение совпадает с соответствующим уравнением в нестабилизированной модели (см. уравнения (74), (75) в работе [9]).

4. НЬЮТОНОВСКИЙ ПРЕДЕЛ

Найдем ньютоновский предел для рассмотренного выше случая. Рассмотрим статическую точечную массу, тензор энергии-импульса которой имеет вид $t_{00} = M\delta(\vec{x})$, $t_{0k} = t_{ij} = 0$, где M – инертная масса (соответственно фурье-образ $\tilde{t}_{00} = 2\pi M\delta(p_0)$, $\tilde{t}_{0k} = \tilde{t}_{ij} = 0$, $\tilde{t} = -2\pi M\delta(p_0)$).

Известно, что гравитационный потенциал выражается через компоненту метрики g_{00} как $2V = -(g_{00} + 1)$. Откуда, учитывая соотношение $g_{00} = -1 + \hat{\kappa}h_{00}$, получаем

$$V = -\frac{\hat{\kappa}}{2} h_{00}. \quad (45)$$

Для вычисления h_{00} используем соотношения (23) и (29). Вклад тензорного поля найден в работе [9] и в приближении нулевых мод имеет вид

$$V_t \approx -\frac{\hat{G}\tilde{k}}{e^{2\tilde{k}L} - 1} \frac{M}{r}. \quad (46)$$

Мы пренебрегли вкладом массивных тензорных мод, так как масса даже легчайшего возбуждения при выбранных значениях параметров модели порядка нескольких ТэВ (см. [4]), что на порядок больше массы радиона.

Итак, нам остается рассчитать лишь вклад скалярного поля g . Используя соотношения (40) и (42), найдем значение функции $\tilde{g}$ на бране 2

$$\begin{aligned} \tilde{g}(p, L) = & -\frac{\hat{\kappa}\tilde{k}\tilde{t}}{3p^2} \left(\frac{e^{2\tilde{k}L}}{e^{2\tilde{k}L} - 1} \right) \times \\ & \times \left\{ \left[\left(\frac{\beta_2^2 - u}{\tilde{k}} \right) \frac{z^{\alpha+a+1} {}_1F_2\left(1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{a}{2}; 2 + \frac{\alpha}{2} - \frac{a}{2}, \alpha + 1; \frac{1}{4}z^2\right)}{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)\left(1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{a}{2}\right)} + I_\alpha(z)z^{a+1} \right] \times \right. \\ & \left. \times \left[z^{a+1}I_\alpha(z) + \frac{(\beta_2^2 - u)}{\tilde{k}} \frac{d}{dz}(z^a I_\alpha(z)) \right]^{-1} \right\} \Big|_{z=p/\tilde{k}}. \end{aligned} \quad (47)$$

Найти аналитически обратное преобразование Фурье такой функции не представляется возможным. Поэтому мы воспользуемся приближением $p \rightarrow 0$, которое позволит нам проанализировать вклад скалярного поля в закон Ньютона на больших расстояниях. Таким образом, приходим к выражению (в главном порядке по $u/\tilde{k} \ll uL \ll 1$)

$$\tilde{g}(p, L) \approx -\frac{e^{2\tilde{k}L}}{e^{2\tilde{k}L} - 1} \frac{\hat{\kappa}\tilde{k}\tilde{t}}{3} \left(p^2 + \frac{2(\beta_2^2 - u)\hat{\kappa}^2\phi_1^2 u^2}{3(\beta_2^2 + 4\tilde{k})} \right)^{-1}. \quad (48)$$

Вклад скалярного поля в ньютоновский потенциал вычисляется следующим образом:

$$g(x, L) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-i\eta_{\mu\nu}p^\mu x^\nu} \tilde{g}(p, L) d^4p. \quad (49)$$

Подставляя в уравнение (49) выражение для $\tilde{g}(p, L)$, получаем

$$g(x, L) = \frac{e^{2\tilde{k}L}}{e^{2\tilde{k}L} - 1} \frac{\hat{\kappa}\tilde{k}}{12\pi} \frac{M}{r} e^{-\mu r}, \quad (50)$$

где $r = \sqrt{\vec{x}^2}$, $\mu^2 = 2(\beta_2^2 - u)\hat{\kappa}^2\phi_1^2 u^2 / (3(\beta_2^2 + 4\tilde{k}))$. Отметим, что, как и следовало ожидать, значение параметра μ совпадает со значением массы радиона, т.е. низшего возбуждения скалярного поля [7].

Используя (46), выпишем полное выражение для ньютоновского (в приближении нулевых мод для тензорных гравитонов) потенциала

$$V \approx -G_2 \frac{M}{r} \left(1 + \frac{e^{2\tilde{k}L}}{3} e^{-\mu r} \right), \quad (51)$$

где

$$G_2 = \frac{\hat{G}\tilde{k}}{e^{2\tilde{k}L} - 1};$$

первое слагаемое в формуле (51) соответствует вкладу тензорного поля $v_{\mu\nu}$. Последнее выражение мы можем переписать в виде

$$M_{\text{Pl}}^2 = \frac{M^3}{\tilde{k}} (e^{2\tilde{k}L} - 1),$$

где M_{Pl} – четырехмерная масса Планка. В случае $\tilde{k}L \approx 35$, $M \sim \tilde{k} \sim 1$ ТэВ получаем $M_{\text{Pl}} \sim 10^{19}$ ГэВ, т.е. слабую гравитацию на бране при сильной пятимерной гравитации. Параметр u может быть порядка десятков ГэВ, а масса низшего возбуждения поля радиона μ в этом случае порядка сотен ГэВ (см. [7]).

С одной стороны, в соответствии с (8) при $u \rightarrow 0$ гравитационная часть действия (2) переходит в действие нестабилизированной модели Рэндалл–Сундрума с двумя бранами (см. (13)). С другой стороны, в этом случае $\mu \rightarrow 0$ и (51) переходит в выражение, описывающее ньютоновский потенциал в модели Рэндалл–Сундрума [9]. Последнее обстоятельство указывает на корректность использованных приближений при расчете вклада поля радиона в ньютоновский потенциал.

Наконец, отметим, что формула (51) справедлива только при $\mu r \gg 1$, так как при малых μr неприменимо используемое в работе линейное приближение. В частности, на субмиллиметровых расстояниях, на которых сейчас экспериментально изучается гравитационное взаимодействие, вклад второго члена в этой формуле практически равен нулю.

Благодарности. И. Волобуев и М. Смоляков выражают благодарность Д. Левкову, М. Либанову и В. Рубакову за полезные обсуждения. Настоящая работа была выполнена в рамках Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-8122.2006.2). Работа М. Смолякова была также поддержана грантом Президента Российской Федерации МК-8718.2006.2, грантом фонда “Династия” и стипендией для молодых преподавателей и ученых Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Список литературы

- [1] L. Randall, R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.*, **83**:17 (1999), 3370–3373.
- [2] В. А. Рубаков, *УФН*, **171**:9 (2001), 913–938.
- [3] Yu. A. Kubyshin, *Models with extra dimensions and their phenomenology*, [arXiv: hep-ph/0111027](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0111027).
- [4] Э. Э. Боос, И. П. Волобуев, Ю. А. Кубышин, М. Н. Смоляков, *ТМФ*, **131**:2 (2002), 216–230.
- [5] W. D. Goldberger, M. B. Wise, *Phys. Rev. Lett.*, **83**:24 (1999), 4922–4925.
- [6] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser, A. Karch, *Phys. Rev. D*, **62**:4 (2000), 046008.
- [7] Э. Э. Боос, И. П. Волобуев, Ю. С. Михайлов, М. Н. Смоляков, *ТМФ*, **149**:3 (2006), 339–353.
- [8] R. Arnowitt, J. Dent, *Phys. Rev. D*, **75**:6 (2007), 064001.
- [9] И. П. Волобуев, М. Н. Смоляков, *ТМФ*, **139**:1 (2004), 12–28.
- [10] A. Brandhuber, K. Sfetsos, *JHEP*, 1999, № 10, 013.
- [11] I. Ya. Aref'eva, M. G. Ivanov, W. Mück et al., *Nucl. Phys. B*, **590**:1–2 (2000), 273–286.

Поступила в редакцию 14.06.2007