Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Л. Курнявко, И. В. Широков, Построение инвариантных волновых уравнений скалярных частиц на римановых многообразиях с внешними калибровочными полями, *ТМФ*, 2008, том 156, номер 2, 237–249

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6244>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 13:33:23

© 2008 г.

О. Л. Курнявко*, И. В. Широков†

ПОСТРОЕНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ СКАЛЯРНЫХ ЧАСТИЦ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ С ВНЕШНИМИ КАЛИБРОВОЧНЫМИ ПОЛЯМИ

Рассмотрена задача построения волновых уравнений для скалярных частиц в римановых пространствах с внешними калибровочными полями, группой симметрии которых является группа движений данного риманова пространства.

Ключевые слова: группа Ли, алгебра Ли, риманово пространство, группа движений, скалярные частицы, уравнение Клейна–Гордона, калибровочные поля.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из актуальных задач теоретической физики является интегрирование квантово-полевых уравнений с внешними полями. Известно достаточно большое количество работ, в которых рассматриваются задачи классификации внешних полей, допускающих точное решение квантово-полевых уравнений (см. [1], [2] и цитированную там литературу). Специфика этих работ состоит в том, что преимущественно рассматривается класс уравнений, допускающих реализацию схемы разделения переменных, т.е., как минимум, обладающих коммутативной группой симметрий. Отметим также, что наряду с квантово-полевыми системами активно исследуются аналогичные классические системы (см., например, [3]–[5]).

В работе [6] был предложен метод интегрирования уравнений с некоммутативной группой симметрии. Этот метод дает возможность расширить классификацию полей, допускающих существование точных решений, включив в нее такие поля, наличие которых позволяет рассматривать уравнения, интегрируемые в некоммутативном смысле.

В настоящей работе предлагается метод нахождения внешних (неабелевых в общем случае) полей, наличие которых допускает в качестве группы симметрии уравнения скалярного поля во внешнем калибровочном поле группу движений данного

*Омский филиал Института физики полупроводников СО РАН, Омск, Россия.
E-mail: kurnyavko@mail.ru

†Иртышский филиал Новосибирской государственной академии водного транспорта, Омск, Россия. E-mail: iv_shirokov@mail.ru

пространства. Рассмотренные в работе конструкции позволяют свести решение исходных задач к решению некоторых алгебраических уравнений.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.1. Пусть имеется риманово пространство M с метрикой $g_{ab} = g_{ab}(x)$, $x \in M$, $a = 1, \dots, \dim M$, допускающее группу движений G , $\mathcal{G}$ – алгебра Ли генераторов действия группы G на M , т.е.

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k, \quad X_i = X_i^a(x) \partial_a, \quad X \in \mathcal{G}, \quad x \in M, \quad i = 1, \dots, \dim \mathcal{G}. \quad (1)$$

Тогда метрика удовлетворяет уравнению Киллинга

$$\mathcal{L}_{X_i} g(x) = 0, \quad (2)$$

где $\mathcal{L}_{X_i} g(x)$ – производная Ли вдоль векторного поля X_i .

Рассмотрим модель скалярного поля, взаимодействующего с калибровочным (неабелевым в общем случае) полем, описываемого лагранжианом

$$\mathcal{L} = g^{ab}(\nabla_a + \bar{\mathcal{A}}_a)\bar{\psi}(\nabla_b + \mathcal{A}_b)\psi - m^2\bar{\psi}\psi,$$

где $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ – скалярные полевые (в общем случае n -компонентные) функции, $\mathcal{A}_a$ – калибровочное поле. Этот лагранжиан обладает инвариантностью относительно группы K калибровочных преобразований вида

$$\psi \rightarrow \psi' = g(x)\psi, \quad g(x) \in T(K), \quad (3)$$

$$\mathcal{A}_a \rightarrow \mathcal{A}'_a = g(x)\mathcal{A}_a g^{-1}(x) - \partial_a g(x)g^{-1}(x), \quad \mathcal{A}_a \in T(\mathcal{K}), \quad (4)$$

где $T(K)$ – некоторое матричное представление группы K , $\mathcal{K}$ и $T(\mathcal{K})$ – алгебра Ли группы K и ее представление, реализованное в виде матриц; при этом полевые функции следует рассматривать как элементы пространства представления алгебры $\mathcal{K}$. Полевые уравнения модели скалярного поля, взаимодействующего с неабелевым калибровочным полем, имеют вид

$$(H + m^2)\psi(x) = 0, \quad (5)$$

$$H = g^{ab}(x)(\nabla_a + \mathcal{A}_a)(\nabla_b + \mathcal{A}_b). \quad (6)$$

Наличие взаимодействия с калибровочным полем в общем случае приводит к тому, что полевые уравнения теряют имевшиеся симметрии. В связи с этим возникает вопрос о существовании калибровочных полей, наличие которых допускает в качестве группы симметрии уравнения (5) группу движений данного риманова пространства. Очевидно, что искомые калибровочные поля определяются из условия инвариантности оператора H относительно G . Заметим, что в этом случае оператор симметрии имеет вид $\hat{X} = A^a(x)\partial_a + A(x)$. Тогда получаем следующую систему уравнений, определяющих данные поля:

$$[H, \hat{X}_i] = 0, \quad (7)$$

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = C_{ij}^k \hat{X}_k, \quad \hat{X}_i = X_i + \chi_i(x), \quad (8)$$

где C_{ij}^k – структурные константы, определяемые в (1), χ_i – функции на M , принимающие значения в множестве матриц, действующих в пространстве представления $T(\mathcal{K})$. При калибровочных преобразованиях (3), (4) оператор симметрии преобразуется по закону

$$\widehat{X}_i \rightarrow \widehat{X}'_i = g \widehat{X}_i g^{-1} = X_i + \chi'_i(x), \quad (9)$$

где $\chi'_i(x) = X_i^a g \partial_a (g^{-1}) + g \chi_i(x) g^{-1}$. Система уравнений (7) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} \nabla_a(X_{ib}) + \nabla_b(X_{ia}) &= 0, \\ g^{ab} \nabla_a(\chi_i) + g^{ac} \nabla_c(X_i^b) \mathcal{A}_a - g^{ab} X_i^c \nabla_c(\mathcal{A}_a) + g^{ab} [\mathcal{A}_a, \chi_i] &= 0, \\ g^{ab} \nabla_a \nabla_b(\chi_i) - g^{ab} X_i^c \nabla_{a,c}^2(\mathcal{A}_b) - g^{ab} X_i^c \nabla_c(\mathcal{A}_a \mathcal{A}_b) + 2g^{ab} \nabla_b(\chi_i) \mathcal{A}_a + \\ + g^{ab} [\nabla_a(\mathcal{A}_b), \chi_i] + g^{ab} [\mathcal{A}_a \mathcal{A}_b, \chi_i] &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $X_{ia} = g_{ab} X_i^b$. Заметим, что система (10) обладает инвариантностью относительно преобразований (4), (9).

2.2. В общем случае система уравнений (10) позволяет решать задачу о классификации римановых пространств, допускающих существование калибровочных полей специального вида, т.е. по заданной группе преобразований некоторого многообразия (точнее по генераторам X_i данной группы), действующей транзитивно, необходимо найти функции g^{ab} , χ_i , $\mathcal{A}_a$. Непосредственное интегрирование системы (10) является весьма сложной задачей. Практически некоторое упрощение достигается в силу того, что первое из уравнений данной системы есть уравнение Киллинга, поэтому задача нахождения метрики сводится к классификации римановых пространств по группам движений, полученной в [7]. Однако даже с учетом этого интегрирование оставшихся уравнений является непростой задачей. Настоящая работа посвящена построению общего метода интегрирования системы (10).

2.3. Предлагаемый метод состоит в том, что функции g^{ab} и χ_i однозначно определяются группой преобразований, действующей на данном однородном пространстве, и могут быть найдены независимо друг от друга, а затем с их помощью определяются калибровочные поля $\mathcal{A}_a$.

Функции χ_i могут быть найдены с помощью теории $\mathfrak{gl}(V)$ -продолжений, предложенной в [6]. Данная теория предлагает способ построения для заданной алгебры дифференциальных операторов первого порядка $\{X_i\}$ всех возможных алгебр дифференциальных операторов первого порядка $\{\widehat{X}_i = X_i + \chi_i\}$, удовлетворяющих тем же коммутационным соотношениям (заметим, что подобные объекты представляют собой частный случай так называемых однородных расслоений, общее определение которых можно найти в [8]). Таким образом, для заданной алгебры $\mathcal{G} = \{X_i\}$ могут быть найдены все возможные функции χ_i .

В случае, если однородное пространство является группой Ли, задача нахождения функций g^{ab} и $\mathcal{A}_a$ решается относительно просто. В общем случае однородного пространства данная задача может быть сведена в некотором смысле к случаю группы Ли. Используется тот факт, что всякой функции на однородном пространстве M однозначно соответствует некоторая функция из подпространства функционального

пространства гладких функций на группе G , а всякому оператору на M однозначно соответствует оператор из некоторого множества операторов на группе G . Если группа действует справа на данном однородном пространстве, то генераторы правых сдвигов на данной группе (левоинвариантные поля) при канонической проекции переходят в генераторы действия группы на данном однородном пространстве, а оператор, инвариантный относительно правых сдвигов, удовлетворяющий некоторому (и что существенно, алгебраическому) дополнительному условию, переходит в оператор на однородном пространстве, инвариантный относительно действия группы. При таком подходе необходимость знания явного вида правоинвариантных полей несколько не усложняет исходную задачу, так как способы их построения известны. Таким образом, в рассматриваемом подходе построение инвариантных операторов является задачей, решаемой методами линейной алгебры.

В зависимости от того, какое именно дополнительное условие было использовано, из инвариантного оператора общего вида на группе G мы можем получить инвариантный оператор R_M на однородном пространстве M либо с условием инвариантности $[R_M, X_i] = 0$, либо $[R_M, X_i + \chi_i(x)] = 0$. Первому из этих условий могут удовлетворять только дифференциальные операторы, в которых коэффициентами при производных являются скалярные функции. Второму условию в общем случае удовлетворяют операторы с коэффициентами, являющимися матричными функциями. В связи с этим в первом случае мы будем говорить о *скалярных инвариантных операторах*, а во втором о *матричных*.

Получив таким образом инвариантный оператор вида $R_M = g^{ab}(x)\partial_a\partial_b + P^a(x)\partial_a + P(x)$, мы затем докажем, что g^{ab} – инвариантная метрика на некотором римановом пространстве, а сравнив его вид с (6), получим выражения для $\mathcal{A}_a$.

2.4. С методической точки зрения целесообразно сначала рассмотреть задачу построения скалярного инвариантного оператора на данном однородном пространстве, а затем решить аналогичную задачу для матричного инвариантного оператора. В заключение будет приведен пример использования данного метода для построения неабелева калибровочного поля.

3. ПОСТРОЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ИНВАРИАНТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

3.1. Пусть M – однородное правое G -пространство, где G – группа Ли, действующая на пространстве M , H – подгруппа изотропии некоторой точки $x_0 \in M$, а $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ – алгебры Ли групп G и H соответственно, причем $\mathcal{G} = \mathcal{H} + \mathcal{P}$, $\mathcal{P} \simeq T_{x_0}M$, т.е. базис в алгебре Ли $\mathcal{G}$ имеет вид

$$\{e_i\} = \{e_\alpha, e_a\}, \quad i = 1, \dots, \dim \mathcal{G}, \quad a = 1, \dots, \dim M, \quad \alpha = 1, \dots, \dim H, \quad (11)$$

где $\{e_\alpha\}$ – базис алгебры $\mathcal{H}$, $\{e_a\}$ – базис пространства $\mathcal{P}$. Обозначим $\mathcal{G}^L$ и $\mathcal{G}^R$ алгебры Ли соответственно левоинвариантных и правоинвариантных полей на G , реализованные однородными линейными дифференциальными операторами первого порядка, действующими в пространстве $C^\infty(G)$, т.е.

$$\mathcal{G}^L = \{\xi_i = (L_g)_* e_i\}, \quad \mathcal{G}^R = \{\eta_i = -(R_g)_* e_i\}, \quad [\xi_i, \xi_j] = C_{ij}^k \xi_k, \quad [\eta_i, \eta_j] = C_{ij}^k \eta_k,$$

где $i, j, k = 1, \dots, \dim G$, причем алгебра Ли правоинвариантных полей $\mathcal{H}^R = \{\eta_\alpha \in \mathcal{G}^R, \alpha = 1, \dots, \dim H\}$ является реализацией алгебры $\mathcal{H}$.

Группа G является главным расслоением над M , т.е. $G = G(M = G/H, H, \pi)$. Задавая (локально) гладкое сечение $s: M \rightarrow G$ расслоения G , произвольный элемент группы $g \in G$ можно представить в виде $g = hs(x)$. Над областями тривиализации в расслоении G можно ввести координаты прямого произведения

$$H \times U = \{(h^\alpha, x^a), a = 1, \dots, \dim M, \alpha = 1, \dots, \dim H\}, \quad (12)$$

где $U \subset M$ – область в M (область тривиализации). Тогда имеет место локальное расщепление координат элемента группы на координаты слоя и базы, т.е. $g = (h^\alpha, x^a)$.

3.2. Рассмотрим на группе G функциональное пространство $\mathcal{F} \subset C^\infty(G)$, определяемое следующим образом:

$$\mathcal{F} = \{\phi \in C^\infty(G) \mid \phi(hg) = \phi(g), g \in G, h \in H\},$$

т.е. $\mathcal{F}$ – есть пространство функций на группе, постоянных на слоях главного расслоения $G(M = G/H, H, \pi)$. Для связной группы G определение пространства $\mathcal{F}$ может быть записано эквивалентным образом:

$$\mathcal{F} = \{\phi \in C^\infty(G) \mid \eta_\alpha \phi(g) = 0, g \in G, \eta_\alpha \in \mathcal{H}^R, \alpha = 1, \dots, \dim H\}. \quad (13)$$

Каждой функции из заданного функционального пространства соответствует некоторая функция на однородном пространстве из класса $C^\infty(M)$, т.е. имеет место изоморфизм $\mathcal{F} \cong C^\infty(M)$. Условие постоянства функций из $\mathcal{F}$ на слоях главного расслоения позволяет получить явный вид данного изоморфизма. Действительно, если $\phi(g) \in \mathcal{F}$, то в локальных координатах (h, x) имеем $\phi(hs(x)) = \phi(h's(x))$, следовательно, $\phi(g) = \phi(h, x) = \phi(e_H, x) \equiv \phi(x)$, т.е. вместо произвольного элемента группы H мы можем выбрать единицу.

Введем на $\mathcal{F}$ пространство линейных операторов $L(\mathcal{F})$. Тогда в соответствии с условием (13) это пространство состоит из линейных операторов R , действующих в пространстве $C^\infty(G)$ и удовлетворяющих равенству

$$[R, \eta_\alpha]\phi(g) = 0, \quad \text{т.е.} \quad [R, \eta_\alpha]|_{\mathcal{F}} = 0, \quad \phi(g) \in \mathcal{F}, \quad \eta_\alpha \in \mathcal{H}^R, \quad R \in L(C^\infty(G)). \quad (14)$$

В силу изоморфизма $\mathcal{F} \cong C^\infty(M)$ имеет место изоморфизм $L(\mathcal{F}) \cong L(C^\infty(M))$. Тогда для каждого оператора из пространства $L(\mathcal{F})$ корректно определяется проекция на однородное пространство, которую обозначим так же, как дифференциал канонической проекции π_* . Таким образом, всякий оператор на M может быть получен из некоторого оператора в пространстве $L(\mathcal{F})$ следующим образом: $R_M = \pi_* R$, $R \in L(\mathcal{F})$, $R_M \in L(C^\infty(M))$, причем $\pi_* R \approx R|_{\mathcal{F}}$, $R \in L(\mathcal{F})$.

3.3. Из коммутативности левоинвариантных и правоинвариантных полей вытекает, что $[\xi_i, \eta_\alpha] = 0$. Следовательно, каждое левоинвариантное поле проецируется в поле X_i на M

$$X_i = \pi_* \xi_i = \xi_i|_{\mathcal{F}}, \quad \xi_i \in \mathcal{G}^L, \quad (15)$$

являющееся генератором действия группы G на многообразии M . Тогда очевидно, что дифференциальный оператор $R_M \in L(C^\infty(M))$, инвариантный относительно действия группы G на M , имеет вид

$$R_M = \pi_* R, \quad R \in L(\mathcal{F}), \quad (16)$$

где

$$[R, \xi_i] = 0. \quad (17)$$

Рассмотрим в качестве $R \in L(\mathcal{F})$ дифференциальный оператор второго порядка, удовлетворяющий условию (17). Тогда

$$R = B^{ij} \eta_i \eta_j + B^i \eta_i + B, \quad (18)$$

где B^{ij} , B^i и B – некоторые действительные постоянные, значения которых определяются из (14). Таким образом, в соответствии с выражением (16) оператор R вида (18) определяет оператор $R_M = R|_{\mathcal{F}}$, который является скалярным дифференциальным оператором второго порядка, инвариантным относительно действия группы G на M . В силу того, что правоинвариантные поля η_α в координатах (h, x) и базисе (11) имеют вид $\eta_\alpha = \eta_\alpha^\beta(h) \partial_\beta$, получаем

$$R_M = (B^{ij} \eta_i \eta_j + B^i \eta_i + B)|_{\mathcal{F}} = (B^{ab} \eta_a \eta_b + \tilde{B}^a \eta_a + B)|_{\mathcal{F}},$$

где $\tilde{B}^a = B^a + B^{b\alpha} C_{\alpha b}^a$. Тогда без ограничения общности вместо оператора (18) рассмотрим оператор вида

$$R = B^{ab} \eta_a \eta_b + B^a \eta_a + B. \quad (19)$$

Нетрудно видеть, что условие (14), примененное к оператору (19), приводит к системе линейных уравнений относительно переменных B^{ab} и B^a вида

$$\begin{aligned} B^{ab} C_{a\alpha}^c + B^{ac} C_{a\alpha}^b &= 0, \\ B^{ab} C_{a\alpha}^\beta C_{\beta b}^c + B^a C_{a\alpha}^c &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где C_{jk}^i – структурные константы алгебры Ли группы Ли G относительно базиса (11), $a, b, c = 1, \dots, \dim M$, $\alpha, \beta = 1, \dots, \dim H$, $i, j, k = 1, \dots, \dim G$. В результате имеет место следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Всякий скалярный линейный дифференциальный оператор второго порядка R_M , действующий в пространстве $C^\infty(M)$ на однородном правом G -пространстве M и инвариантный относительно действия группы G , имеет вид*

$$R_M = (B^{ab} \eta_a \eta_b + B^a \eta_a)|_{\mathcal{F}}, \quad (21)$$

причем B^{ab} и B^a удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (20).

3.4. Пусть $R_M \in L(C^\infty(M))$ есть дифференциальный оператор, инвариантный относительно действия группы G на пространстве M , вида

$$R_M = g^{ab}(x)\partial_a\partial_b + P^a(x)\partial_a, \quad (22)$$

где $g^{ab}(x)$, $P^a(x)$ – некоторые скалярные функции. По определению оператор R_M удовлетворяет условию

$$[R_M, X_i] = 0,$$

где X_i – генератор действия G на M . Нетрудно видеть, что данное условие приводит к уравнению Киллинга (2) относительно $g^{ab}(x)$. Тогда $g^{ab}(x)$ есть инвариантная метрика на пространстве M , а само пространство M есть риманово многообразие с группой движений G . Согласно утверждению 1 оператор R_M определяется выражением (21). Отсюда имеем

$$\begin{aligned} R_M &= (B^{ab}\eta_a^i\eta_b^j\partial_i\partial_j + B^{ab}\eta_a^i\partial_i(\eta_b^j)\partial_j + B^a\eta_a^j\partial_j)|_{\mathcal{F}} = \\ &= B^{ab}\eta_a^c\eta_b^d\partial_c\partial_d + (B^{ab}\eta_a^c\partial_c(\eta_b^d) + B^a\eta_a^d)\partial_d, \end{aligned} \quad (23)$$

где $i, j = 1, \dots, \dim G$, $a, b, c, d = 1, \dots, \dim M$. Сравнивая выражения (23) и (22), получим, что метрика $g^{ab}(x)$ имеет вид

$$g^{ab}(x) = B^{cd}\eta_c^a(h, x)\eta_d^b(h, x), \quad a, b, c, d = 1, \dots, \dim M, \quad (24)$$

где B^{ab} – величины, удовлетворяющие системе (20), $\eta_b^a(h, x)$ – компоненты правоинвариантных полей в координатах (h^α, x^a) и относительно базиса (11) алгебры Ли $\mathcal{G}$. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Всякое правое однородное G -пространство M является римановым многообразием с группой движений G тогда и только тогда, когда существует решение системы (20), при этом инвариантная метрика данного риманова пространства имеет вид (24).*

Согласно сформулированным выше утверждениям построение скалярного инвариантного оператора, равно как и построение инвариантной метрики, есть задача выбора величин B^{ab} и B^a , состоящая в решении системы линейных уравнений (20).

4. ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЧНОГО ИНВАРИАНТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

4.1. Рассмотрим задачу построения матричного дифференциального оператора, инвариантного относительно группы преобразований, действующей на некотором однородном пространстве. Как и выше, рассмотрим однородное пространство $M = G/H$ и группу G , действующую на нем. При этом на данной группе по-прежнему будут использоваться базис (11) и координаты прямого произведения (12). Кроме того, введем еще один необходимый в дальнейшем объект – линейное пространство V , являющееся пространством представления $T(\mathcal{K})$, и будем считать, что левоинвариантные и правоинвариантные поля реализованы однородными линейными операторами, действующими в пространстве функций $C^\infty(G, V)$,

т.е. в пространстве функций на G , принимающих значение в линейном пространстве V (n -компонентные функции).

Введем функциональное пространство $\widehat{\mathcal{F}}$, определяемое следующим образом:

$$\widehat{\mathcal{F}} = \{\phi(g) \in C^\infty(G, V) \mid \phi(hg) = U(h)\phi(g)\},$$

где $U(h)$ – некоторое представление подгруппы изотропии H . Инфинитезимальным критерием, определяющим данное пространство, является выражение

$$(\eta_\alpha + \Lambda_\alpha)\phi(g) = 0, \quad (25)$$

где $\alpha = 1, \dots, \dim H$, η_α – правоинвариантные поля на G , образующие алгебру $\mathcal{H}$, Λ_α – генератор представления алгебры $\mathcal{H}$. Каждой функции из данного функционального пространства соответствует некоторая функция на однородном пространстве из класса $C^\infty(M, V)$, т.е. имеет место изоморфизм $\widehat{\mathcal{F}} \cong C^\infty(M, V)$. Явный вид данного изоморфизма можно получить следующим образом: $\phi(g) = \phi(hs(x)) = U(h)\phi(x)$, где $\phi(s(x)) \equiv \phi(x)$.

Введем на $\widehat{\mathcal{F}}$ пространство линейных операторов $L(\widehat{\mathcal{F}})$. Тогда согласно (25) данное пространство состоит из линейных операторов R , действующих в пространстве $C^\infty(G)$ и удовлетворяющих условию $[R, \eta_\alpha + \Lambda_\alpha]\phi(g) = 0$, т.е.

$$[R, \eta_\alpha + \Lambda_\alpha]|_{\widehat{\mathcal{F}}} = 0, \quad \phi(g) \in \widehat{\mathcal{F}}, \quad \eta_\alpha \in \mathcal{H}^R, \quad R \in L(C^\infty(G)). \quad (26)$$

Условие (26) равносильно условию $[U^{-1}(h)RU(h), \eta_\alpha]|_{\mathcal{F}} = 0$. Тогда каждому оператору $R \in L(\widehat{\mathcal{F}})$ соответствует оператор R_M на однородном пространстве:

$$R_M = \pi_*(U^{-1}(h)RU(h)) = U^{-1}(h)RU(h)|_{\mathcal{F}}, \quad R \in L(\widehat{\mathcal{F}}). \quad (27)$$

Заметим, что условию (26) удовлетворяют левоинвариантные векторные поля на G , так как $[\xi_i, \eta_\alpha] = 0$, т.е. оператор ξ_i , действуя на функцию из $\widehat{\mathcal{F}}$, переводит ее снова в некоторую функцию из $\widehat{\mathcal{F}}$. Нетрудно видеть, что в терминах введенного функционального пространства $\widehat{\mathcal{F}}$ оператор симметрии вида (8) может быть получен следующим образом:

$$\widehat{X}_i = \pi_*(U^{-1}(h)\xi_i U(h)) = U^{-1}(h)\xi_i U(h)|_{\mathcal{F}}. \quad (28)$$

Тогда матричный дифференциальный оператор $R_M \in L(C^\infty(M))$, инвариантный относительно действия группы G на M , имеет вид (27), где R удовлетворяет условию (17). Действительно,

$$\pi_*(U^{-1}[R, \xi_i]U) = [\pi_*(U^{-1}RU), \pi_*(U^{-1}\xi_i U)] = [\pi_*(U^{-1}RU), \widehat{X}_i] = 0, \quad R \in L(\widehat{\mathcal{F}}).$$

4.2. Рассмотрим в качестве $R \in L(\widehat{\mathcal{F}})$ дифференциальный оператор второго порядка, удовлетворяющий условию (17). Тогда

$$R = B^{ij}\eta_i\eta_j + B^i\eta_i + B, \quad (29)$$

где B^{ij} – некоторые действительные постоянные, B^i , B – действительные матрицы, значения которых определяются из условия (26). Таким образом, согласно формуле (27) оператор R вида (29) определяет оператор $R_M = U^{-1}(h)RU(h)|_{\mathcal{F}}$, который

является матричным дифференциальным оператором второго порядка, инвариантным относительно действия группы G на M . Можно показать, что имеет место равенство

$$R_M = U^{-1}(h)(B^{ij}\eta_i\eta_j + B^i\eta_i + B)U(h)|_{\mathcal{F}} = U^{-1}(h)(B^{ab}\eta_a\eta_b + \tilde{B}^a\eta_a + \tilde{B})U(h)|_{\mathcal{F}},$$

где

$$\tilde{B}^a = B^a - 2B^{\alpha a}U(h)\Lambda_\alpha U^{-1}(h) + B^{b\alpha}C_{b\alpha}^a,$$

$$\tilde{B} = B^{\alpha\beta}U(h)\Lambda_\alpha\Lambda_\beta U^{-1}(h) - B^\alpha U(h)\Lambda_\alpha U^{-1}(h) - B^{b\beta}C_{b\beta}^\alpha U(h)\Lambda_\alpha U^{-1}(h) + B.$$

Тогда без ограничения общности вместо оператора (29) можно рассматривать оператор вида

$$R = B^{ab}\eta_a\eta_b + B^a\eta_a + B. \quad (30)$$

Нетрудно видеть, что условие (26), примененное к оператору (30), приводит к системе линейных уравнений относительно неизвестных B^{ab} , B^a и B вида

$$\begin{aligned} B^{ab}C_{a\alpha}^c + B^{ac}C_{a\alpha}^b &= 0, \\ B^{ab}C_{a\alpha}^\beta C_{\beta b}^c - 2B^{ac}C_{a\alpha}^\beta \Lambda_\beta + B^a C_{a\alpha}^c + [B^c, \Lambda_\alpha] &= 0, \\ -(B^{ab}C_{a\alpha}^\beta C_{\beta b}^\gamma + B^a C_{a\alpha}^\gamma) \Lambda_\gamma + [B, \Lambda_\alpha] &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

В результате можно сформулировать следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Всякий матричный линейный дифференциальный оператор второго порядка R , действующий в пространстве $C^\infty(M, V)$ на однородном правом G -пространстве M и инвариантный относительно действия группы G , имеет вид*

$$R_M = U^{-1}(h)(B^{ab}\eta_a\eta_b + B^a\eta_a + B)U(h)|_{\mathcal{F}}, \quad (32)$$

причем B^{ab} , B^a и B удовлетворяют системе матричных линейных алгебраических уравнений (31).

Таким образом, мы показали, что построение матричного инвариантного оператора фактически есть задача нахождения величин B^{ab} , B^a и B , решаемая методами линейной алгебры.

5. ПОСТРОЕНИЕ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

5.1. Приведенные в разделе 4 построения позволяют решить поставленную исходную задачу, т.е. найти решение системы (10) без ее непосредственного интегрирования. Сформулируем главную в данной работе теорему о существовании искомых метрик и калибровочных полей, на основе которой решается исходная задача.

ТЕОРЕМА. *Уравнение Клейна–Гордона (5) на римановом многообразии M с метрикой g^{ab} и некоторой группой движений G допускает калибровочное поле $\mathcal{A}_a$, сохраняющее в качестве группы симметрии данного уравнения группу движений данного пространства, т.е. условия (7) и (8) выполняются тогда и только тогда, когда существует решение системы линейных алгебраических уравнений (31) при*

заданных структурных константах алгебры Ли $\mathcal{G}$ в специальном базисе (11). При этом χ_i , инвариантная метрика $g^{ab}(x)$ и калибровочное поле A_a определяются выражениями

$$\chi_i = \xi_i^\alpha(e_H, x)\Lambda_\alpha, \quad (33)$$

$$g^{ab}(x) = B^{cd}\eta_c^a\eta_d^b, \quad (34)$$

$$A_a = g_{ab}g^{b\alpha}\Lambda_\alpha + \frac{1}{2}g_{ab}\left((B^{cd}\eta_c^i\partial_i(\eta_d^b) + B^c\eta_c^b)|_{h=0} - \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_c(\sqrt{g}g^{cb})\right), \quad (35)$$

где e_H – единица группы H , являющейся подгруппой изотропии группы G , B^{ab} , B^a и B – величины, удовлетворяющие системе (31), $\xi_b^a(h, x)$ и $\eta_b^a(h, x)$ – компоненты левоинвариантных и правоинвариантных полей соответственно, $g = \det g_{ab}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произвольный матричный дифференциальный оператор $R_M \in L(C^\infty(M))$, инвариантный относительно действия группы G на M , имеет вид

$$R_M = g^{ab}(x)\partial_a\partial_b + P^a(x)\partial_a + P(x), \quad (36)$$

где $g^{ab}(x)$, $P^a(x)$, $P(x)$ – некоторые матричные функции. По определению оператора R_M удовлетворяет условию

$$[R_M, \hat{X}_i] = 0, \quad (37)$$

где $\hat{X}_i = X_i + \chi_i$ – оператор симметрии, соответствующий действию G на M . Согласно теореме о $\mathfrak{gl}(V)$ -продолжениях [9] на всяком однородном пространстве функции χ_i определяются с точностью до калибровочного преобразования формулой (33).

Нетрудно видеть, что условие (37) приводит к уравнению Киллинга (2) относительно $g^{ab}(x)$, т.е. $g^{ab}(x)$ – инвариантная метрика на пространстве M .

Согласно утверждению 3 произвольный инвариантный матричный дифференциальный оператор имеет вид (32). Отсюда вытекает, что

$$R_M = (B^{ab}U^{-1}(h)\eta_a U(h)U^{-1}(h)\eta_b U(h) + B^a U^{-1}(h)\eta_a U(h) + U^{-1}(h)BU(h))|_{\mathcal{F}}, \quad (38)$$

где $a, b = 1, \dots, \dim M$. Для оператора $U^{-1}(h)\eta_a U(h)$ нетрудно получить выражение

$$U^{-1}(h)\eta_a U(h) = \eta_a^b(h, x)\partial_b + \eta_\alpha^\beta(h, x)U^{-1}(h)\frac{\partial U(h)}{\partial h^\beta} + \eta_\alpha^\beta(h, x)\partial_\beta.$$

С помощью условия (25) для производной в последнем выражении имеем

$$\frac{\partial U(h)}{\partial h^\beta} = -\eta^{-1\alpha}_\beta(h, x)\Lambda_\alpha U(h).$$

В результате получим

$$U^{-1}(h)\eta_a U(h) = \eta_a^b(h, x)\partial_b - \eta_\alpha^\beta(h, x)\eta^{-1\alpha}_\beta(h, x)U^{-1}(h)\Lambda_\alpha U(h) + \eta_\alpha^\beta(h, x)\partial_\beta. \quad (39)$$

В силу H -инвариантности оператора R_M после подстановки выражения (39) в формулу (38) в коэффициентах можно положить $h = e_H$. Таким образом, компоненты

инвариантной метрики g^{ab} имеют вид (34), а P^a и P в формуле (36) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} P^a(x) &= 2g^{\alpha a}\Lambda_\alpha + (B^{cd}\eta_c^i\partial_i(\eta_d^a) + B^c\eta_c^a)|_{h=0}, \\ P(x) &= g^{\alpha\beta}\Lambda_\alpha\Lambda_\beta + (B^{cd}\eta_c^i\partial_i(\eta_d^\alpha)\Lambda_\alpha + B^c\eta_c^\alpha\Lambda_\alpha)|_{h=0} + B, \end{aligned}$$

где $g^{\alpha b} = B^{cd}\eta_c^\alpha\eta_d^b|_{h=0}$, $g^{\alpha\beta} = B^{cd}\eta_c^\alpha\eta_d^\beta|_{h=0}$. Отметим, что B^{cd} как решения системы (31) обеспечивают независимость величин g^{ab} , являющихся компонентами инвариантной метрики, от переменных h .

Очевидно, что произвольный дифференциальный оператор второго порядка всегда может быть приведен к виду

$$R_M = \frac{1}{\sqrt{g}}(\partial_a + \mathcal{A}_a)\sqrt{g}g^{ab}(\partial_b + \mathcal{A}_b) + \varphi, \quad (40)$$

где

$$\mathcal{A}_a = \frac{1}{2}g_{ab}\left[P^b - \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_a(\sqrt{g}g^{ab})\right], \quad \varphi = P - \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_a(\sqrt{g}g^{ab}\mathcal{A}_b) - g^{ab}\mathcal{A}_a\mathcal{A}_b, \quad g = |g_{ab}|.$$

Тогда калибровочный потенциал $\mathcal{A}_a$ имеет вид (40). Можно показать, что φ является постоянной диагональной матрицей и справедливо представление

$$\varphi = \frac{1}{4}(B^{ab}C_{ac}^cC_{bd}^d - B_{ab}B^aB^b),$$

которое обеспечивает инвариантность оператора

$$H = \frac{1}{\sqrt{g}}(\partial_a + \mathcal{A}_a)\sqrt{g}g^{ab}(\partial_b + \mathcal{A}_b), \quad H \in L(C^\infty(M)).$$

Таким образом, теорема доказана.

5.2. Приведем общий алгоритм решения поставленной задачи. Пусть дано гладкое вещественное однородное пространство $M = G/H$, где G – вещественная группа Ли, действующая транзитивно на M , $H \subset G$ – подгруппа Ли группы G , которая является подгруппой изотропии некоторой точки пространства M . Пусть задана группа $GL(m) \supseteq T(K)$, где K – группа калибровочных преобразований. Тогда последовательность действий, составляющих рассматриваемый алгоритм, следующая:

- 1) строим левоинвариантные и правоинвариантные поля на группе G ;
- 2) выбираем некоторое представление подалгебры изотропии $\mathcal{H}$, действующее в пространстве представления $\mathbb{R}^m$ алгебры K ;
- 3) вычисляем функции χ_i согласно формуле (33);
- 4) решаем систему (31) и строим инвариантный оператор, удовлетворяющий условию (26);
- 5) находим инвариантную метрику и калибровочное поле с помощью выражений (34) и (35).

Рассмотрим пример применения данного алгоритма. Пусть G – группа Ли, $\dim G = 5$, алгебра Ли которой имеет следующие ненулевые коммутационные соотношения:

$$[e_1, e_5] = e_1, \quad [e_2, e_4] = e_1, \quad [e_3, e_4] = e_2, \quad [e_3, e_5] = -e_3, \quad [e_4, e_5] = e_4,$$

H – подгруппа Ли группы G , $\dim H = 2$, алгебра Ли которой имеет базис e_4, e_5 , и пусть размерность пространства представления группы калибровочных преобразований $m = 2$.

Введем на группе G канонические координаты второго рода, тогда алгебры Ли левоинвариантных и правоинвариантных полей на данной группе соответственно имеют вид

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \partial_1, & \xi_2 &= \partial_2, & \xi_3 &= \partial_3, \\ \xi_4 &= x_2\partial_1 + x_3\partial_2 + \partial_4, & \xi_5 &= x_1\partial_1 - x_3\partial_3 + x_4\partial_4 + \partial_5; \\ \eta_1 &= -e^{x_5}\partial_1, & \eta_2 &= -x_4\partial_1 - \partial_2, & \eta_3 &= -\frac{1}{2}x_4^2e^{-x_5}\partial_1 - x_4e^{-x_5}\partial_2 - e^{-x_5}\partial_3, \\ \eta_4 &= -e^{x_5}\partial_4, & \eta_5 &= -\partial_5.\end{aligned}$$

Напомним, что данные операторы действуют в пространстве n -компонентных функций и являются диагональными матрицами (здесь и далее единичные матрицы явно не указываются).

Выберем в качестве двумерного представления подалгебры изотропии $\mathcal{H}$ в пространстве $\mathbb{R}^2$ матрицы присоединенного представления данной алгебры, т.е.

$$T(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \Lambda_1, \quad T(e_5) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \Lambda_2.$$

Рассматривая G как расслоение над многообразием $M = G/H$, отождествим x_1, x_2, x_3 с координатами базы (т.е. с координатами на M), а x_4, x_5 – с координатами слоя (т.е. с координатами на H , $x_4 \equiv h_1, x_5 \equiv h_2$). Генераторы действия группы G на M имеют вид

$$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_3 = \partial_3, \quad X_4 = x_2\partial_1 + x_3\partial_2, \quad X_5 = x_1\partial_1 - x_3\partial_3,$$

а $\mathfrak{gl}(V)$ -продолжениями данных операторов являются операторы вида

$$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_3 = \partial_3, \quad X_4 = x_2\partial_1 + x_3\partial_2 + \Lambda_1, \quad X_5 = x_1\partial_1 - x_3\partial_3 + \Lambda_2.$$

Решая систему (31), получаем

$$\begin{aligned}(G^{ab}) &= a(\text{diag}(1, -1, 1))^T, & G^1 &= -b^2\sigma_3, \\ G^2 &= b^2\sigma_2, & G^3 &= -2b^2\sigma_1, & G &= c \text{diag}(1, 1),\end{aligned}$$

где a, b, c – некоторые действительные постоянные, а матрицы

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

образуют базис двумерного представления алгебры $sl(2)$. Отсюда получаем метрику и потенциал калибровочного поля:

$$\begin{aligned}ds^2 &= a(2dx^1dx^3 - (dx^2)^2), \\ A_1 &= \frac{b^2}{a}\sigma_1, & A_2 &= \frac{b^2}{2a}\sigma_2, & A_3 &= \frac{b^2}{2a}\sigma_3.\end{aligned}$$

Форма напряженности данного калибровочного поля имеет вид

$$F = -\frac{b^4}{a^2}\sigma_1 dx^1 \wedge dx^2 - \frac{b^4}{2a^2}\sigma_2 dx^1 \wedge dx^3 - \frac{b^4}{2a^2}\sigma_3 dx^2 \wedge dx^3.$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный в работе подход позволяет с помощью методов линейной алгебры решать задачу о построении на однородных римановых многообразиях релятивистских волновых уравнений (в данном случае рассматривалось уравнение Клейна–Гордона) с калибровочными полями (неабелевыми в общем случае) такими, что группой симметрии полученных уравнений является группа движений данного пространства.

Условие интегрируемости данных уравнений на однородном римановом многообразии совпадает с условием интегрируемости геодезического потока с G -инвариантной метрикой на однородном многообразии M и имеет вид $d(M) < 2$ [10], где $d(M)$ – дефект данного многообразия (в частности, для симметрических и слабосимметрических пространств $d(M) = 0$).

Авторами была проделана работа по классификации римановых пространств и калибровочных полей, допускающих в качестве группы симметрии уравнения Клейна–Гордона группу движений данного пространства для случая четырехмерных пространств с пятимерными группами движения. В каждом из этих случаев уравнение Клейна–Гордона является интегрируемым. В общей сложности найдено двадцать два пространства с абелевыми калибровочными полями. Авторы предполагают опубликовать полученную классификацию в ближайшее время.

Список литературы

- [1] В. Г. Багров, Д. М. Гитман, И. М. Тернов и др., *Точные решения релятивистских волновых уравнений*, Наука, Новосибирск, 1982.
- [2] V. G. Bagrov, D. M. Gitman, *Exact Solutions of Relativistic Wave Equations*, Math. Appl., **39**, Kluwer, Dordrecht etc., 1990.
- [3] Д. И. Ефимов, *Сиб. матем. журн.*, **45**:3 (2004), 566–576.
- [4] Д. И. Ефимов, *Сиб. матем. журн.*, **46**:1 (2005), 106–118.
- [5] A. V. Bolsinov, B. Jovanovic, *J. Phys. A*, **39**:16 (2006), L247–L252; [arXiv: math-ph/0602016](#).
- [6] А. В. Шаповалов, И. В. Широков, *ТМФ*, **104**:2 (1995), 195–213.
- [7] А. З. Петров, *Пространства Эйнштейна*, Физматлит, М., 1961.
- [8] В. В. Горбачевич, А. Л. Онищик, “Группы Ли преобразований”, *Группы Ли и алгебры Ли*, 1, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Итоги науки и техники, **20**, ред. Р. В. Гамкрелидзе, ВИНТИ АН СССР, М., 1988, 103–240.
- [9] С. П. Барановский, И. В. Широков, *ТМФ*, **135**:1 (2003), 70–81.
- [10] А. А. Магазев, И. В. Широков, *ТМФ*, **136**:3 (2003), 365–379.

Поступила в редакцию 19.07.2007,
после доработки 17.10.2007