Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Конштейн, И. В. Тютин, Деформации центрального расширения супералгебры Пуассона, *ТМФ*, 2008, том 156, номер 2, 250–269

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6245>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 18:22:03

© 2008 г.

С. Е. Конштейн*, И. В. Тютин*

ДЕФОРМАЦИИ ЦЕНТРАЛЬНОГО РАСШИРЕНИЯ СУПЕРАЛГЕБРЫ ПУАССОНА

Супералгебра Пуассона, реализованная на гладких грассманозначных функциях с компактным носителем, имеет центральное расширение при некоторых значениях суперразмерности. Найдены формальные деформации этих центральных расширений.

Ключевые слова: алгебра Грассмана, супералгебра Пуассона, центральное расширение, когомологии, деформационное квантование, *-коммутатор.

1. ВВЕДЕНИЕ

В серии работ авторов и А. Смирнова [1]–[4] были вычислены низшие когомологии и общий вид формальных деформаций супералгебры Пуассона, реализованной на гладких грассманозначных функциях с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$. Как показано в [1], эта супералгебра имеет центральное расширение при некоторых суперразмерностях. Для этих суперразмерностей мы нашли второе пространство когомологий с коэффициентами в присоединенном представлении и формальные деформации рассматриваемого центрального расширения супералгебры Пуассона. Отметим, что центральные расширения алгебр часто возникают в квантовой теории, хорошо известным примером является алгебра Вирасоро – центральное расширение алгебры конформных преобразований в двумерном пространстве.

1.1. Супералгебра Пуассона. Пусть поле $\mathbb{K}$ – это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$. Обозначим через $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ пространство гладких $\mathbb{K}$ -значных функций с компактным носителем на $\mathbb{R}^n$. Это пространство снабжено своей стандартной топологией. Положим

$$\mathcal{D}_{n+}^{n-} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+}) \otimes \mathbb{G}^{n-}, \quad E_{n+}^{n-} = C^\infty(\mathbb{R}^{n+}) \otimes \mathbb{G}^{n-},$$

где $\mathbb{G}^{n-}$ является алгеброй Грассмана с n_- образующими; пусть $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+})$ – пространство непрерывных линейных функционалов на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+})$. Образующие алгебры Грассмана и координаты пространства $\mathbb{R}^{n+}$ обозначаются через ξ^α , $\alpha = 1, \dots, n_-$,

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: konsteyn@lpi.ru, tyutin@lpi.ru

и x^i , $i = 1, \dots, n_+$, соответственно. Мы будем также использовать коллективные переменные z^A , которые равны x^A при $A = 1, \dots, n_+$ и равны ξ^{A-n_+} при $A = n_+ + 1, \dots, n_+ + n_-$. Пространства $D_{n_+}^{n_-}$ и $E_{n_+}^{n_-}$ имеют естественную градуировку, определенную алгеброй Грассмана. Четность элемента f любого из этих пространств обозначается через $\varepsilon(f)$. Положим также $\varepsilon_A = 0$ для $A = 1, \dots, n_+$ и $\varepsilon_A = 1$ для $A = n_+ + 1, \dots, n_+ + n_-$. Каждая функция $f \in E_{n_+}^{n_-}$ может быть представлена в виде $f(z) = \sum_{\alpha_i=0,1} f_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_-}}(x) \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_{n_-}^{\alpha_{n_-}}$. Мы будем использовать обозначение $\text{supp}(f) = \bigcup_{\{\alpha_i\}} \text{supp}(f_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_-}}) \subset \mathbb{R}^{n_+}$.

Пусть $\partial/\partial z^A$ и $\overleftarrow{\partial}/\partial z^A$ являются соответственно операторами левого и правого дифференцирования. Суперскобка Пуассона определяется соотношением

$$\{f, g\}(z) = f(z) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial z^A} \omega^{AB} \frac{\partial}{\partial z^B} g(z) = -(-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} \{g, f\}(z), \quad (1)$$

где симплектическая метрика $\omega^{AB} = -(-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_B} \omega^{BA}$ является постоянной обратной матрицей. Для определенности выберем ее в виде

$$\omega^{AB} = \begin{pmatrix} \omega^{ij} & 0 \\ 0 & \lambda_\alpha \delta_\alpha^\beta \end{pmatrix}, \quad \lambda_\alpha = \pm 1, \quad i, j = 1, \dots, n_+, \quad \alpha, \beta = 1 + n_+, \dots, n_+ + n_+,$$

где ω^{ij} – симплектическая форма (если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то можно считать, что $\lambda_\alpha = 1$). Невырожденность матрицы ω^{AB} влечет, в частности, что n_+ чётно. Суперскобка Пуассона удовлетворяет тождеству Якоби

$$(-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)} \{f, \{g, h\}\}(z) + \text{cycle}(f, g, h) = 0, \quad f, g, h \in E_{n_+}^{n_-}. \quad (2)$$

Под супералгеброй Пуассона мы подразумеваем пространство $D_{n_+}^{n_-}$ со скобкой Пуассона (1) на нем. Соотношения (1) и (2) показывают, что эта скобка действительно определяет структуру супералгебры Ли на $D_{n_+}^{n_-}$.

Интеграл на $D_{n_+}^{n_-}$ определяется соотношениями $\bar{f} \stackrel{\text{def}}{=} \int dz f(z) = \int_{\mathbb{R}^{n_+}} dx \int d\xi f(z)$, где интеграл по алгебре Грассмана нормирован условием $\int d\xi \xi^1 \dots \xi^{n_-} = 1$. Отождествим $\mathbb{G}^{n_-}$ с его дуальным пространством $\mathbb{G}^{n_-}$, полагая $f(g) = \int d\xi f(\xi)g(\xi)$, $f, g \in \mathbb{G}^{n_-}$. Соответственно, пространство $D_{n_+}^{n_-}$ непрерывных линейных функционалов на $D_{n_+}^{n_-}$ отождествляется с пространством $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_+}) \otimes \mathbb{G}^{n_-}$. Как правило, значение $m(f)$ функционала $m \in D_{n_+}^{n_-}$ на пробной функции $f \in D_{n_+}^{n_-}$ будет записываться в интегральной форме: $m(f) = \int dz m(z)f(z)$.

1.2. Когомологии супералгебры Пуассона. Пусть L – супералгебра Ли, действующая на $\mathbb{Z}_2$ -градуированном пространстве V (действие $f \in L$ на $v \in V$ будет обозначаться как $f \cdot v$). Пространство $\mathcal{C}_p(L, V)$ p -коцепей состоит из всех суперкососимметричных отображений из L^p в V . Пространство $\mathcal{C}_p(L, V)$ обладает естественной $\mathbb{Z}_2$ -градуировкой: по определению $M_p \in \mathcal{C}_p(L, V)$ имеет определенную четность $\varepsilon(M_p)$, если

$$\varepsilon(M_p(f_1, \dots, f_p)) = \varepsilon(M_p) + \varepsilon(f_1) + \dots + \varepsilon(f_p)$$

для произвольных $f_j \in L$ с четностями $\varepsilon(f_j)$. Дифференциал d_p^V определен как линейный оператор из $\mathcal{C}_p(L, V)$ в $\mathcal{C}_{p+1}(L, V)$ такой, что

$$d_p^V M_p(f_1, \dots, f_{p+1}) = - \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j+\varepsilon(f_j)|\varepsilon(f)|_{1,j-1}+\varepsilon(f_j)\varepsilon_{M_p}} f_j \cdot M_p(f_1, \dots, \check{f}_j, \dots, f_{p+1}) - \\ - \sum_{i < j} (-1)^{j+\varepsilon(f_j)|\varepsilon(f)|_{i+1,j-1}} M_p(f_1, \dots, f_{i-1}, \{f_i, f_j\}, f_{i+1}, \dots, \check{f}_j, \dots, f_{p+1})$$

для произвольных $M_p \in \mathcal{C}_p(L, V)$ и $f_1, \dots, f_{p+1} \in L$, имеющих определенные четности. Знак $\check{}$ обозначает здесь, что аргумент под этим знаком опущен. Мы также использовали обозначение

$$|\varepsilon(f)|_{i,j} = \sum_{l=i}^j \varepsilon(f_l).$$

Дифференциал d^V нильпотентен (см. [5]), т.е. $d_{p+1}^V d_p^V = 0$ для любых $p = 0, 1, \dots$. Мы будем обозначать p -е пространство когомологий дифференциала d_p^V через H_p^V . Второе пространство когомологий H_{ad}^2 в присоединенном представлении тесно связано с проблемой нахождения формальных деформаций скобки Ли $\{\cdot, \cdot\}$ вида $\{f, g\}_* = \{f, g\} + \hbar^2 \{f, g\}_1 + \dots$. Условие, что $\{\cdot, \cdot\}$ является 2-коциклом, эквивалентно тождеству Якоби для $\{\cdot, \cdot\}_*$ по модулю членов порядка $\hbar^4$ и выше.

В [1] и [3] мы изучали когомологии супералгебры Пуассона D_{n+}^{n-} в четырех различных представлениях, из которых здесь нам понадобятся следующие три.

1. Тривиальное представление V_{tr} : $V_{\text{tr}} = \mathbb{K}$, $f \cdot a = 0$ для произвольных $f \in D_{n+}^{n-}$ и $a \in \mathbb{K}$. Пространство $\mathcal{C}_p(D_{n+}^{n-}, \mathbb{K})$ состоит из раздельно непрерывных суперкососимметричных полилинейных форм на $(D_{n+}^{n-})^p$. Пространства когомологий и дифференциалы обозначаются как H_{tr}^p и d_{tr}^p соответственно.

2. Представление V_E : $V_E = E_{n+}^{n-}$ и $f \cdot m = \{f, m\}$ для любых $f \in D_{n+}^{n-}$ и $m \in E_{n+}^{n-}$.

3. Присоединенное представление V_D : $V_D = D_{n+}^{n-}$ и $f \cdot g = \{f, g\}$ для произвольных $f, g \in D_{n+}^{n-}$. Пространство $\mathcal{C}_p(D_{n+}^{n-}, D_{n+}^{n-})$ содержится в пространстве $\mathcal{C}_p(D_{n+}^{n-}, E_{n+}^{n-})$. Пространства когомологий обозначаются через H_{ad}^p .

Для представлений V_E и V_D мы будем использовать одинаковый символ d_p^{ad} для дифференциала.

Введем следующие обозначения. Пусть $Z_{n+}^{n-} \stackrel{\text{def}}{=} D_{n+}^{n-} \oplus \mathcal{C}_{E_{n+}^{n-}}(D_{n+}^{n-})$, где $\mathcal{C}_{E_{n+}^{n-}}(D_{n+}^{n-})$ — централизатор D_{n+}^{n-} в E_{n+}^{n-} . Очевидно, что $\mathcal{C}_{E_{n+}^{n-}}(D_{n+}^{n-}) \simeq \mathbb{K}$. Очевидно также, что $\mathcal{C}_{E_{n+}^{n-}}(D_{n+}^{n-})$ совпадает с центром E_{n+}^{n-} . Пусть $\mathcal{Z}_{n+}^{n-} \stackrel{\text{def}}{=} E_{n+}^{n-} / Z_{n+}^{n-}$.

Определим оператор $\mathcal{E}_z$ как

$$\mathcal{E}_z \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \frac{1}{2} z^A \frac{\partial}{\partial z^A}.$$

В [1] и [3] доказаны следующие теоремы, которые мы приводим в сокращенном виде, достаточном для дальнейших рассуждений.

ТЕОРЕМА 1. Пусть билинейные формы C_2^1 и C_2^2 определены соотношениями

$$\begin{aligned} C_2^1(f, g) &= \bar{f}\bar{g}, \\ C_2^2(f, g) &= \int du (f(u)\mathcal{E}_u g(u) - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} g(u)\mathcal{E}_u f(u)), \quad f, g \in D_{n_+}^-. \end{aligned} \quad (3)$$

1. Если n_- нечетно, то общее решение уравнения $d_2^{\text{tr}} M_2(f, g, h) = 0$ имеет вид

$$M_2(f, g) = v_1 C_2^1(f, g) + d_1^{\text{tr}} \mu_1(f, g), \quad v_1 = \text{const}.$$

2. Если n_- четно, то общее решение уравнения $d_2^{\text{tr}} M_2(f, g, h) = 0$ имеет вид

$$M_2(f, g) = v_2 \delta_{n_++4}^{n_-} C_2^2(f, g) + d_1^{\text{tr}} \mu_1(f, g), \quad v_2 = \text{const}.$$

ТЕОРЕМА 2. Если $M_1(z | f) \in E_{n_+}^{n_-}$, то общее решение уравнения $d_1^{\text{ad}} M_1(z | f, g) = 0$ имеет вид

$$M_1(z | f) = u_2 m_{1|2}(z | f) + \{t(z), f(z)\}, \quad (4)$$

где

$$m_{1|2}(z | f) = \mathcal{E}_z f(z), \quad t(z) \in E_{n_+}^{n_-}, \quad u_2 = \text{const}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $n_+ = 2$. Пусть функция $\Lambda \in C^\infty(\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям $\frac{d}{dx} \Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и $\Lambda(-\infty) = 0$, $\Lambda(+\infty) = 1$. Пусть $z = (x_1, x_2, \xi_1, \dots, \xi_{n_-})$, $u = (y_1, y_2, \eta_1, \dots, \eta_{n_-})$ и

$$\begin{aligned} \Theta(x | f) &\stackrel{\text{def}}{=} \int du \delta(x_1 - u_1) \theta(x_2 - u_2) f(u), \\ \tilde{\Theta}(x^1 | f) &\stackrel{\text{def}}{=} \int du \theta(x^1 - y^1) f(u), \quad \Psi(x | f) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\Theta}(x^1 | f) \Lambda(x^2), \\ \Delta(x | f) &\stackrel{\text{def}}{=} \int du \delta(x - y) f(u), \quad \Delta_\alpha(x | f) \stackrel{\text{def}}{=} \int du \eta_\alpha \delta(x - y) f(u), \\ \tilde{\Delta}(x^1 | f) &\stackrel{\text{def}}{=} \int du \delta(x^1 - y^1) f(u), \quad \Xi(x | f) \stackrel{\text{def}}{=} \Theta(x | f) - \tilde{\Delta}(x^1 | f) \Lambda(x^2), \\ N_2^D(z | f, g) &\stackrel{\text{def}}{=} \Xi(x | \partial_2 f g) + 2\Theta(x | f) \partial_2 g(z) - 2\{f(z), \Psi(x | g)\} - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} (f \leftrightarrow g). \end{aligned}$$

Тогда билинейные отображения $L_2^{n_-}$ из $(D_2^{n_-})^2$ в $E_2^{n_-}$, определенные выражениями

$$\begin{aligned} L_2^1(z | f, g) &= N_2^D(z | f, g) - \Delta(x | f) g(z) + (-1)^{\varepsilon(f)} f(z) \Delta(x | g) - \\ &\quad - \frac{2}{3} (-1)^{\varepsilon(f)} (\xi^1 \partial_{\xi^1} f(z)) \Delta(x | g), \quad \varepsilon_{L_2^1} = 1, \\ L_2^3(z | f, g) &= N_2^D(z | f, g) - \Delta(x | f) g(z) + (-1)^{\varepsilon(f)} f(z) \Delta(x | g) + \\ &\quad + \partial_{\xi^\alpha} f(z) \Delta_\alpha(x | g) - (-1)^{\varepsilon(f)} \Delta_\alpha(z | f) \partial_{\xi^\alpha} g(z), \quad \varepsilon_{L_2^3} = 1, \end{aligned} \quad (5)$$

отображают $(D_2^{n_-})^2$ в $D_2^{n_-}$ и являются коциклами.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\zeta \in \mathcal{C}_1(D_{n_+}^{n_-}, E_{n_+}^{n_-})$ и $d_1^{\text{ad}} \zeta \in \mathcal{C}_2(D_{n_+}^{n_-}, D_{n_+}^{n_-})$. Тогда ζ представимо в виде $\zeta(z | f) = \zeta_D(z | f) + \zeta_E(z) \bar{f}$, где $\zeta_D \in \mathcal{C}_1(D_{n_+}^{n_-}, D_{n_+}^{n_-})$, $\zeta_E \in E_{n_+}^{n_-}$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\zeta \in \mathcal{C}_1(D_{n_+}^{n_-}, E_{n_+}^{n_-})$, $t \in E_{n_+}^{n_-}$ и $d_1^{\text{ad}}\zeta(f, g) + t \in D_{n_+}^{n_-}$. Тогда $t \in D_{n_+}^{n_-}$, и ζ представимо в виде $\zeta(z|f) = \zeta_D(z|f) + \zeta_E(z)\bar{f}$, где $\zeta_D \in \mathcal{C}_1(D_{n_+}^{n_-}, D_{n_+}^{n_-})$, $\zeta_E \in E_{n_+}^{n_-}$.

ТЕОРЕМА 5. Справедливы следующие утверждения.

1. Пусть $M_2 \in \mathcal{C}_2(D_{n_+}^{n_-}, E_{n_+}^{n_-})$ и $n_- \neq 0$, $n_- \neq 2$. Тогда общее решение уравнения $d_2^{\text{ad}}M_2 = 0$ имеет вид

$$M_2(z|f, g) = c_1 m_{2|1}(z|f, g) + c_2 m_{2|2}(z|f, g) + c_3 m_{2|3}(z|f, g) + c_4 m_{2|4}(z|f, g) + \\ + c_5^1 \delta_{n_+}^2 \delta_1^{n_-} L_2^1(z|f, g) + c_5^3 \delta_{n_+}^2 \delta_3^{n_-} L_2^3(z|f, g) + d_1^{\text{ad}} \varphi_E(z|f, g), \quad (6)$$

где $\varphi_E(z|f) \in E_{n_+}^{n_-}$ и

$$m_{2|1}(z|f, g) = f(z) \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial z^A} \omega^{AB} \frac{\partial}{\partial z^B} \right)^3 g(z), \quad (7)$$

$$m_{2|2}(z|f, g) = \frac{1 - (-1)^{n_-}}{2} \bar{f} \bar{g}, \quad (8)$$

$$m_{2|3}(z|f, g) = \bar{g} \mathcal{E}_z f(z) - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} \bar{f} \mathcal{E}_z g(z), \quad (9)$$

$$m_{2|4}(z|f, g) = \delta_{n_++4}^{n_-} \int du (f(u) \mathcal{E}_u g(u) - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} g(u) \mathcal{E}_u f(u)). \quad (10)$$

2. Пусть $M_2 \in \mathcal{C}_2(D_{n_+}^{n_-}, D_{n_+}^{n_-})$ и $n_- \neq 0$, $n_- \neq 2$. Тогда общее решение уравнения $d_2^{\text{ad}}M_2 = 0$ имеет вид

$$M_2(z|f, g) = c_1 m_{2|1}(z|f, g) + c_3 m_{2|3}(z|f, g) + m_{2|\zeta}(z|f, g) + \\ + c_5^1 \delta_{n_+}^2 \delta_1^{n_-} L_2^1(z|f, g) + c_5^3 \delta_{n_+}^2 \delta_3^{n_-} L_2^3(z|f, g) + d_1^{\text{ad}} \varphi_D(z|f, g),$$

где $\zeta \in \mathcal{Z}_{n_+}^{n_-}$, $\varphi_D(z|f) \in D_{n_+}^{n_-}$ и

$$m_{2|\zeta}(z|f, g) = \{\zeta(z), f(z)\} \bar{g} - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} \{\zeta(z), g(z)\} \bar{f}. \quad (11)$$

1.3. Центральные расширения. Пусть $\mathbf{L}$ является центральным расширением супералгебры L , т.е. $\mathbf{L} = L \oplus c$, $\mathbf{f} = f + a\mathcal{I} \in \mathbf{L}$, где $\mathcal{I}$ – образующий элемент алгебры c , $\varepsilon(\mathcal{I}) = 0$, $a \in \mathbb{K}$. Суперскобку в $\mathbf{L}$ мы обозначим как $[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = -(-1)^{\varepsilon(\mathbf{f})\varepsilon(\mathbf{g})} [\mathbf{g}, \mathbf{f}]$,

$$[f, g] = \{f, g\} + C(f, g)\mathcal{I}, \quad C(f, g) \in \mathbb{K}, \quad [\mathbf{f}, \mathcal{I}] = 0,$$

где $C(f, g) = -(-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} C(g, f)$, $\varepsilon(C) = 0$, является образующей второй кохомологии в тривиальном представлении супералгебры L :

$$d_2^{\text{tr}} C(f, g, h) = C(\{f, g\}, h) - (-1)^{\varepsilon(g)\varepsilon(h)} C(\{f, h\}, g) - C(f, \{g, h\}) = 0.$$

Из теоремы 1 следует, что супералгебра Пуассона $D_{n_+}^{n_-}$ имеет центральное расширение $\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$, только если n_- нечетно или $n_- = n_+ + 4$.

Рассмотрим теперь пространство $\mathcal{C}_p(\mathbf{L}, \mathbf{L})$. Если $\mathbf{M}_p \in \mathcal{C}_p(\mathbf{L}, \mathbf{L})$, то $\mathbf{M}_p(\mathbf{f}, \dots) = M_p(\mathbf{f}, \dots) + m_p(\mathbf{f}, \dots)\mathcal{I} \in \mathbf{L}$, где $M_p \in \mathcal{C}_p(\mathbf{L}, L)$, $m_p \in \mathcal{C}_p(\mathbf{L}, \mathbb{K})$, $\varepsilon(\mathbf{M}_p) = \varepsilon(M_p) = \varepsilon(m_p) = \varepsilon_{M_p}$.

Дифференциал $\mathbf{d}^{\text{ad}}$ определяется обычным образом. Для линейных форм дифференциал имеет вид

$$\mathbf{d}_1^{\text{ad}}\mathbf{M}_1(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = [\mathbf{M}_1(\mathbf{f}), \mathbf{g}] - (-1)^{\varepsilon(\mathbf{f})\varepsilon(\mathbf{g})}[\mathbf{M}_1(\mathbf{g}), \mathbf{f}] - \mathbf{M}_1([\mathbf{f}, \mathbf{g}])$$

и может быть разложен по прямым слагаемым алгебры $\mathbf{L}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_1^{\text{ad}}\mathbf{M}_1(\mathcal{I}, \mathcal{I}) &\equiv 0, \\ \mathbf{d}_1^{\text{ad}}\mathbf{M}_1(f, \mathcal{I}) &= -\{M_1(\mathcal{I}), f\} - C(M_1(\mathcal{I}), f)\mathcal{I}, \\ \mathbf{d}_1^{\text{ad}}\mathbf{M}_1(f, g) &= d_1^{\text{ad}}M_1(f, g) - M_1(\mathcal{I})C(f, g) + \gamma(f, g)\mathcal{I},\end{aligned}\tag{12}$$

где

$$\gamma(f, g) = C(M_1(f), g) - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)}C(M_1(g), f) - m_1(\{f, g\}) - m_1(\mathcal{I})C(f, g).\tag{13}$$

Для билинейных форм дифференциал имеет вид

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_2^{\text{ad}}\mathbf{M}_2(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}) &= (-1)^{\varepsilon(\mathbf{g})\varepsilon(\mathbf{h})}[\mathbf{M}_2(\mathbf{f}, \mathbf{h}), \mathbf{g}] - [\mathbf{M}_2(\mathbf{f}, \mathbf{g}), \mathbf{h}] - \\ &\quad - (-1)^{\varepsilon(\mathbf{f})\varepsilon(\mathbf{g})+\varepsilon(\mathbf{f})\varepsilon(\mathbf{h})}[\mathbf{M}_2(\mathbf{g}, \mathbf{h}), \mathbf{f}] - \mathbf{M}_2([\mathbf{f}, \mathbf{g}], \mathbf{h}) + \\ &\quad + (-1)^{\varepsilon(\mathbf{g})\varepsilon(\mathbf{h})}\mathbf{M}_2([\mathbf{f}, \mathbf{h}], \mathbf{g}) + \mathbf{M}_2(\mathbf{f}, [\mathbf{g}, \mathbf{h}])\end{aligned}$$

и в разложении по прямым слагаемым супералгебры $\mathbf{L}$ может быть представлен как

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_2^{\text{ad}}\mathbf{M}_2(f, g, h) &= d_2^{\text{ad}}M_2(f, g, h) + [M_2(f, \mathcal{I})C(g, h) - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)}M_2(g, \mathcal{I})C(f, h) + \\ &\quad + (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)+\varepsilon(g)\varepsilon(h)}M_2(h, \mathcal{I})C(f, g)] + \\ &\quad + [(-1)^{\varepsilon(g)\varepsilon(h)}C(M_2(f, h), g) - C(M_2(f, g), h) - \\ &\quad - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)+\varepsilon(f)\varepsilon(h)}C(M_2(g, h), f) + \\ &\quad + m_2(f, \mathcal{I})C(g, h) - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)}m_2(g, \mathcal{I})C(f, h) + \\ &\quad + (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)+\varepsilon(g)\varepsilon(h)}m_2(h, \mathcal{I})C(f, g) - d_2^{\text{tr}}m_2(f, g, h)]\mathcal{I},\end{aligned}\tag{14}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_2^{\text{ad}}\mathbf{M}_2(f, g, \mathcal{I}) &= d_1^{\text{ad}}\widetilde{M}_1(f, g) + [C(M_2(f, \mathcal{I}), g) - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)}C(M_2(g, \mathcal{I}), f) - \\ &\quad - m_2(\{f, g\}, \mathcal{I})]\mathcal{I},\end{aligned}\tag{15}$$

$$\mathbf{d}_2^{\text{ad}}\mathbf{M}_2(f, \mathcal{I}, \mathcal{I}) = \mathbf{d}_2^{\text{ad}}\mathbf{M}_2(\mathcal{I}, \mathcal{I}, \mathcal{I}) \equiv 0, \quad \widetilde{M}_1(f) = M_2(f, \mathcal{I}).$$

1.4. Когомологии центрального расширения супералгебры Пуассона.

В разделах 2 и 3 настоящей работы доказаны следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $n_- = 2k + 1$. Пусть билинейные отображения $\mathbf{M}_2^1$ и $\mathbf{M}_2^3$ из $(\mathbf{D}_{n_+}^{n_-})^2$ в $\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$ определены выражениями

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_2^1(z | f, g) &= m_{2|1}(z | f, g), & \mathbf{M}_2^1(f, \mathcal{I}) &= 0, \\ \mathbf{M}_2^3(z | f, g) &= m_{2|3}(z | f, g), & \mathbf{M}_2^3(f, \mathcal{I}) &= 0,\end{aligned}$$

а билинейное отображение $\mathbf{L}$ из $(\mathbf{D}_2^1)^2$ в $\mathbf{D}_2^1$ задано формулой

$$\mathbf{L}(z | f, g) = L_2^1(z | f, g) + \frac{20}{3} \left(\int dz \xi^1 f(z) \bar{g} - \int dz \xi^1 g(z) \bar{f} \right) \mathcal{I}, \quad \mathbf{L}(f, \mathcal{I}) = 0,$$

где $m_{2|1}$, $m_{2|3}$ и L_2^1 определены в (7), (9) и (5) соответственно. Пусть V_2 является подпространством $C_2(\mathbf{D}_{n+}^{n-}, \mathbf{D}_{n+}^{n-})$, порожденным билинейными отображениями $\mathbf{M}_2^1$, $\mathbf{M}_2^3$ и $\delta_1^{n-} \delta_{n+}^2 \mathbf{L}$.

Тогда $\dim V_2 = 2 + \delta_1^{n-} \delta_{n+}^2$ и существует естественный изоморфизм $V_2 \oplus \mathcal{Z}_{n+}^{n-} \simeq H_{\text{ad}}^2$, отображающий $(\mathbf{M}_2, T) \in V_2 \oplus \mathcal{Z}_{n+}^{n-}$ в когомологический класс, определенный коциклом

$$\mathbf{M}_2(z | \mathbf{f}, \mathbf{g}) + m_{2|\zeta}(z | f, g),$$

где $\zeta \in E_{n+}^{n-}$ принадлежит классу эквивалентности T .

ТЕОРЕМА 7. Пусть $n_- = n_+ + 4$. Пусть билинейные отображения $\mathbf{M}_2^3$ и $\mathbf{Q}_\zeta$ из $(\mathbf{D}_{n+}^{n-})^2$ в $\mathbf{D}_{n+}^{n-}$ определены выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_2^3(z | f, g) &= m_{2|3}(z | f, g), & \mathbf{M}_2^3(\mathbf{f}, \mathcal{I}) &= 0, \\ \mathbf{Q}_\zeta(z | f, g) &= m_{2|\zeta}(z | f, g) + (C_2^2(\zeta, g)\bar{f} - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)}C_2^2(\zeta, f)\bar{g})\mathcal{I}, \\ \mathbf{Q}_\zeta(z | \mathbf{f}, \mathcal{I}) &= 0, \end{aligned}$$

где C_2^2 , $m_{2|3}$ и $m_{2|\zeta}$ заданы формулами (3), (9) и (11) соответственно, $\zeta \in E_{n+}^{n-}$. Пусть V_2 является подпространством $C_2(\mathbf{D}_{n+}^{n-}, \mathbf{D}_{n+}^{n-})$, порожденным билинейным отображением $\mathbf{M}_2^3$.

Тогда $\dim V_2 = 1$ и существует естественный изоморфизм $V_2 \oplus \mathcal{Z}_{n+}^{n-} \simeq H_{\text{ad}}^2$, отображающий $(\mathbf{M}_2, T) \in V_2 \oplus \mathcal{Z}_{n+}^{n-}$ в когомологический класс, определенный коциклом

$$\mathbf{M}_2(z | \mathbf{f}, \mathbf{g}) + \mathbf{Q}_\zeta(z | \mathbf{f}, \mathbf{g}),$$

где $\zeta \in E_{n+}^{n-}$ принадлежит классу эквивалентности T .

1.5. Деформации супералгебр Ли. В этом пункте мы напомним некоторые понятия, связанные с формальными деформациями алгебр (см., например, [6]), применительно к случаю топологических супералгебр Ли. Пусть L является топологической супералгеброй Ли над $\mathbb{K}$ с суперскобкой Ли $\{\cdot, \cdot\}$, а $\mathbb{K}[[\hbar^2]]$ – кольцо формальных степенных рядов по $\hbar^2$ над $\mathbb{K}$, и $L[[\hbar^2]] - \mathbb{K}[[\hbar^2]]$ -модуль формальных степенных рядов по $\hbar^2$ с коэффициентами в L . Мы снабдим $\mathbb{K}[[\hbar^2]]$ и $L[[\hbar^2]]$ топологией прямого произведения. Градуировка L естественно определяет градуировку $L[[\hbar^2]]$: элемент $f = f_0 + \hbar^2 f_1 + \dots$ имеет определенную четность $\varepsilon(f)$, если $\varepsilon(f) = \varepsilon(f_j)$ для всех $j = 0, 1, \dots$. Всякое p -линейное раздельно непрерывное отображение из L^p в L (в частности, суперскобка $\{\cdot, \cdot\}$) единственным образом продолжается в силу $\mathbb{K}[[\hbar^2]]$ -линейности до p -линейного раздельно непрерывного отображения над $\mathbb{K}[[\hbar^2]]$ из $L[[\hbar^2]]^p$ в $L[[\hbar^2]]$. По определению (непрерывной) формальной деформацией L является $\mathbb{K}[[\hbar^2]]$ -билинейная раздельно непрерывная суперскобка $C(\cdot, \cdot)$ на $L[[\hbar^2]]$ такая, что для произвольных $f, g \in L[[\hbar^2]]$ имеет место $C(f, g) = \{f, g\} \pmod{\hbar^2}$. Очевидно, что всякая формальная деформация C может быть представлена в виде

$$C(f, g) = C_0(f, g) + \hbar^2 C_1(f, g) + \hbar^2 C_2(f, g) + \dots, \quad f, g \in L,$$

где C_j – раздельно непрерывные суперкососимметричные билинейные отображения из $L \times L$ в L (2-коцепи с коэффициентами в присоединенном представлении L) и

$C_0(f, g) = \{f, g\}$. Деформация C является четной, если все C_j четны. Формальные деформации C^1 и C^2 называются эквивалентными, если существует такой непрерывный $\mathbb{K}[[\hbar^2]]$ -линейный оператор $T: L[[\hbar^2]] \rightarrow L[[\hbar^2]]$, что $TC^1(f, g) = C^2(Tf, Tg)$, $f, g \in L[[\hbar^2]]$.

Здесь, как и в [2], [4], мы используем определение, налагающее больше ограничений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Формальные деформации C^1 и C^2 называются *подобными*, если существуют непрерывные $\mathbb{K}[[\hbar^2]]$ -линейные операторы $T, T_1: L[[\hbar^2]] \rightarrow L[[\hbar^2]]$, такие что $TC^1(f, g) = C^2(Tf, Tg)$, $f, g \in L[[\hbar^2]]$, и $Tf = f + \hbar^2 T_1 f$.

1.6. Деформации центрального расширения супералгебры Пуассона. В разделах 2 и 3 настоящей работы доказаны следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $n_- = 2k + 1$. Пусть $\mathcal{M}_\varkappa(z | f, g)$ – суперскобка Мойяла,

$$\mathcal{M}_\varkappa(z | f, g) = \frac{1}{\hbar \varkappa} f(z) \operatorname{sh} \left(\hbar \varkappa \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial z^A}} \omega^{AB} \frac{\partial}{\partial z^B} \right) g(z), \quad \varkappa \in \mathbb{K}[[\hbar^2]].$$

Для произвольного $\varkappa \in \mathbb{K}[[\hbar^2]]$ суперскобка Мойяла суперкососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби. Пусть $c_1 = \hbar^2 \varkappa^2 / 6 \in \hbar^2 \mathbb{K}[[\hbar^2]]$, $\zeta(z) \in \hbar^2 E_{n_+}^{2k+1}[[\hbar^2]]$, $w(z) \in \hbar^4 E_{n_+}^{2k+1}[[\hbar^2]]$, $\psi_{\varkappa, \zeta, w}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}_\varkappa(z | \zeta, \zeta) + w(z)$, а $\zeta(z)$ и $w(z)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\varepsilon(\zeta) = 1, \quad \varepsilon(w) = 0, \quad (16)$$

$$\psi_{\varkappa, \zeta, w}(z) \in D_{n_+}^{2k+1}[[\hbar^2]]. \quad (17)$$

Пусть $\mathbf{N}_{c_1, \zeta, w}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = N_{c_1, \zeta, w}(z | \mathbf{f}, \mathbf{g}) + n(\mathbf{f}, \mathbf{g})\mathcal{I}$, где

$$N_{c_1, \zeta, w}(z | f, g) = \mathcal{N}_{c_1, \zeta}(z | f, g) + w(z) \bar{f} \bar{g}, \quad \mathcal{N}_{c_1, \zeta}(z | f, g) = \mathcal{M}_\varkappa(z | f + \zeta \bar{f}, g + \zeta \bar{g}),$$

$$N_{c_1, \zeta, w}(z | f, \mathcal{I}) = \mathcal{M}_\varkappa(z | w, f + \zeta \bar{f}),$$

$$n(f, g) = \bar{f} \bar{g}, \quad n(f, \mathcal{I}) = 0, \quad \mathbf{N}_{c_1, \zeta, w}(z | \mathcal{I}, \mathcal{I}) = 0.$$

Тогда

1) всякая четная непрерывная формальная деформация $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_*$ супералгебры $\mathbf{D}_{n_+}^{2k+1}$ подобна суперскобке

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_{c_1, \zeta, w} = \mathbf{N}_{c_1, \zeta, w}(\mathbf{f}, \mathbf{g})$$

с некоторыми $c_1 \in \hbar^2 \mathbb{K}[[\hbar^2]]$, $\zeta(z) \in \hbar^2 E_{n_+}^{2k+1}[[\hbar^2]]$ и $w(z) \in \hbar^4 E_{n_+}^{2k+1}[[\hbar^2]]$, удовлетворяющими (16), (17);

2) суперскобка $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_{c_1, \zeta^1, w^1}$ подобна суперскобке $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_{c_1, \zeta, w}$, если $\zeta^1(z) - \zeta(z) \in D_{n_+}^{n_-}[[\hbar^2]] + \mathbb{K}[[\hbar^2]]$ и $w^1(z) - w(z) \in D_{n_+}^{n_-}[[\hbar^2]]$.

¹⁾В работе [2] показано, что если ζ^1 и ζ принадлежат одному классу эквивалентности $E_{n_+}^{2k+1}[[\hbar^2]]/Z_{n_+}^{2k+1}[[\hbar^2]]$, то билинейные формы $\mathcal{N}_{c_1, \zeta^1}(z | f, g)$ и $\mathcal{N}_{c_1, \zeta}(z | f, g)$ подобны с некоторым преобразованием подобия T , отображающим $D_{n_+}^{2k+1}[[\hbar^2]]$ в $D_{n_+}^{2k+1}[[\hbar^2]]$: $\mathcal{N}_{c_1, \zeta^1}(z | Tf, Tg) = T \mathcal{N}_{c_1, \zeta}(z | f, g)$.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $n_- = n_+ + 4$. Пусть $\zeta(z) \in \hbar^2 E_{n_+}^{n_+ + 4}[[\hbar^2]]$, $\varepsilon(\zeta) = 0$, $c_3 \in \hbar^2 \mathbb{K}[[\hbar^2]]$, $C(f, g) = \int dz (f(z) \mathcal{E}_z g(z) - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} g(z) \mathcal{E}_z f(z))$ и

$$\mathbf{C}_{c_3, \zeta}^{(3)}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = C_{c_3, \zeta}^{(3)}(z | \mathbf{f}, \mathbf{g}) + c_{c_3, \zeta}^{(3)}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \mathcal{I},$$

где

$$\begin{aligned} C_{c_3, \zeta}^{(3)}(z | f, g) &= \{f(z), g(z)\} + c_3 m_{2|3}(z | f, g) + m_{2|\zeta}(z | f, g), \\ c_{c_3, \zeta}^{(3)}(f, g) &= C(f, g) + C(\zeta, g) \bar{f} - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} C(\zeta, f) \bar{g}, \\ C_{c_3, \zeta}^{(3)}(\mathbf{f}, \mathcal{I}) &= c_{c_3, \zeta}^{(3)}(\mathbf{f}, \mathcal{I}) = 0. \end{aligned}$$

Тогда

1) всякая четная непрерывная формальная деформация $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_*$ супералгебры $\mathbf{D}_{n_+}^{n_+ + 4}$ подобна суперскобке

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_{\zeta, c_3} = \mathbf{C}_{c_3, \zeta}^{(3)}(\mathbf{f}, \mathbf{g})$$

с некоторыми $\zeta(z) \in \hbar^2 E_{n_+}^{n_+ + 4}[[\hbar^2]]$, $\varepsilon(\zeta) = 0$, и $c_3 \in \hbar^2 \mathbb{K}[[\hbar^2]]$;

2) суперскобка $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_{\zeta^1, c_3}$ подобна суперскобке $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_{\zeta, c_3}$, если

$$\zeta^1(z) - \zeta(z) \in \hbar^2 D_{n_+}^{n_-}[[\hbar^2]].$$

2. СУПЕРАЛГЕБРА $\mathbf{D}_{n_+}^{2k+1}$

2.1. Пространство H_{ad}^2 . Для рассматриваемой супералгебры мы имеем $C(f, g) = \bar{f}\bar{g}$ и $[f, g] = \{f, g\} + \bar{f}\bar{g}\mathcal{I}$.

Рассмотрим когомологическое уравнение $\mathbf{d}_2^{\text{ad}} \mathbf{M}_2(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}) = 0$, $M_2(z | \mathbf{f}, \mathbf{g}) \in D_{n_+}^{2k+1}$. Из (15) следует, что $d_1^{\text{ad}} \widetilde{M}_1(z | f, g) = 0$ и, таким образом, в силу теоремы 2

$$M_2(z | f, \mathcal{I}) = t^0 \mathcal{E}_z f(z) + \{t'(z), f(z)\}, \quad t'(z) \in E_{n_+}^{2k+1}, \quad \varepsilon(t^0) = \varepsilon(t') = \varepsilon_{M_2}. \quad (18)$$

Из (15) следует также, что $m_2(\{f, g\}, \mathcal{I}) = (2 + n_+ - n_-) t^0 \bar{f}\bar{g}$, откуда $t^0 = 0$ и $m_2(\{f, g\}, \mathcal{I}) = 0$. В свою очередь, это дает $m_2(f, \mathcal{I}) = m_2 \bar{f}$, $m_2 = \text{const}$, $\varepsilon(m_2) = \varepsilon_{M_2} + 1$.

Таким образом, мы доказали

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} M_2(z | f, \mathcal{I}) &= \{t'(z), f(z)\}, & m_2(f, \mathcal{I}) &= m_2 \bar{f}, & t'(z) &\in E_{n_+}^{2k+1}, \\ \varepsilon(t') &= \varepsilon_{M_2}, & \varepsilon(m_2) &= \varepsilon_{M_2} + 1. \end{aligned}$$

Далее, из (14) следует, что $d_2^{\text{ad}} M'_2(z | f, g, h) = 0$, где $M'_2(z | f, g) = M_2(z | f, g) - \bar{f}\bar{g}t'(z)$.

Из теоремы 5, условия $M_2(z | f, g) \in D_{n_+}^{2k+1}$ и следствия из теоремы 4 вытекает включение $t^D = c_2 + t'(z) \in D_{n_+}^{2k+1}$ и

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Имеет место следующее:*

$$M_2(z|f, g) = c_1 m_{2|1}(z|f, g) + t_D(z) m_{2|2}(z|f, g) + c_3 m_{2|3}(z|f, g) + m_{2|\zeta}(z|f, g) + \\ + c_5^{2k+1} L_2^{2k+1}(z|f, g) + d_1^{\text{ad}} \varphi_D(z|f, g), \quad c_5^{2k+1} = 0, \quad k \geq 2,$$

где

$$\zeta(z) \in E_{n_+}^{2k+1}/Z_{n_+}^{2k+1}, \quad \varepsilon(\zeta) = \varepsilon_{M_2} + n_-, \\ \varphi_D(z|f) \in \mathcal{C}_1(D_{n_+}^{2k+1}, D_{n_+}^{2k+1}), \quad \varepsilon_{\varphi_D} = \varepsilon_{M_2},$$

$$\overline{M_2(|f, g)} = \overline{t_D \bar{f} \bar{g}} + c_5^{2k+1} a_{2k+1} \omega(f, g) - \overline{\varphi_D(|\{f, g\})},$$

$$\omega(f, g) = \delta_{n_+}^2 \int dx d\eta d\xi f(x, \xi) g(x, \eta), \quad a_{2k+1} = \begin{cases} 20/3, & k = 0, \\ 6, & k = 1, \\ 0, & k \geq 2, \end{cases}$$

а билинейные формы L_2^i определены в теореме 3.

Для того чтобы найти $m_2(f, g)$ и соотношения между параметрами в предложении 2, рассмотрим уравнение (14). Оно дает

$$d_2^{\text{tr}} m'_2(f, g, h) = 3(m_2 - \overline{t_D}) \bar{f} \bar{g} \bar{h} - c_5^{2k+1} a_{2k+1} [\omega(f, g) \bar{h} + \omega(f, h) \bar{g} + \omega(g, h) \bar{f}], \quad (19)$$

где

$$m'_2(f, g) = m_2(f, g) - [\overline{\varphi_D(|f)} \bar{g} - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} \overline{\varphi_D(|g)} \bar{f}].$$

Очевидно, что существуют такие функции $f, g, h \in D_{n_+}^{2k+1}$, что $\bar{f} \bar{g} \bar{h} \neq 0$, $\{f, g\} = \{g, h\} = \{h, f\} = 0$ и $\omega(f, g) = \omega(g, h) = \omega(h, f) = 0$. Например, это функции, удовлетворяющие условию

$$\text{supp}(f) \cap \text{supp}(g) = \text{supp}(g) \cap \text{supp}(h) = \text{supp}(h) \cap \text{supp}(f) = \emptyset.$$

Таким образом, уравнение (19) влечет, что $m_2 = \overline{t_D}$ и, как следствие,

$$d_2^{\text{tr}} m'_2(f, g, h) = -c_5^{2k+1} a_{2k+1} [\omega(f, g) \bar{h} + \omega(f, h) \bar{g} + \omega(g, h) \bar{f}]. \quad (20)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Справедливо равенство $c_5^3 = 0$, т.е. $c_5^{2k+1} = c_5 \delta_0^k$, где $c_5 \in \mathbb{K}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно рассмотреть уравнение (20) для функций $f = g = h = \varphi(x) \xi^1 \dots \xi^{n_-}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть $k = 0$. Тогда*

$$\omega(f, g) \bar{h} + \omega(f, h) \bar{g} + \omega(g, h) \bar{f} = \frac{3}{20} d_2^{\text{tr}} \chi_2(f, g, h), \quad (21)$$

где

$$\chi_2(f, g) = \frac{20}{3} \delta_{n_+}^2 \left(\int dz \xi f(z) \bar{g} - \int dz \xi g(z) \bar{f} \right). \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \omega(f, g)\bar{h} + \omega(f, h)\bar{g} + \omega(g, h)\bar{f} &= \delta_{n+} 2 \left(\int dx f_{n-}(x) g_{n-}(x) \int dy h_{n-}(y) + \right. \\ &\quad \left. + \int dx f_{n-}(x) h_{n-}(x) \int dy g_{n-}(y) + \int dx g_{n-}(x) h_{n-}(x) \int dy f_{n-}(y) \right) = \\ &= \delta_{n+}^2 \left(\int dz \xi \{f(z), g(z)\} \bar{h} + \text{cycle}(f, g, h) \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} M_2(z | f, g) &= c_1 m_{2|1}(z | f, g) + c_3 m_{2|3}(z | f, g) + m_{2|\zeta}(z | f, g) + c_5 \delta_0^k \delta_{n+}^2 L_2^1(z | f, g) + \\ &\quad + t_D(z) m_{2|2}(z | f, g) + d_1^{\text{ad}} \varphi(z | f, g), \\ m_2(f, g) &= \overline{\varphi_D(|f)\bar{g}} - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} \overline{\varphi_D(|g)\bar{f}} + c_5 \delta_0^k \chi_2(f, g) + b_2 \bar{f}\bar{g} + \mu_1(\{f, g\}), \\ M_2(z | f, \mathcal{I}) &= \{t_D(z), f(z)\}, \quad m_2(f, \mathcal{I}) = \bar{t}_D \bar{f}, \end{aligned}$$

где $\mu_1 \in \mathcal{C}_1(D_{n+}^{2k+1}, \mathbb{K})$, $t_D \in D_{n+}^{2k+1}$, $\varphi_D \in \mathcal{C}_1(D_{n+}^{2k+1}, D_{n+}^{2k+1})$.

Пусть $\mathbf{M}_{1D}(f) = \varphi_D(z | f) - \mu_1(f)\mathcal{I}$, $\mathbf{M}_{1D}(\mathcal{I}) = -t_D(z) - b_2\mathcal{I}$. Тогда

$$\mathbf{M}_2(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \mathbf{M}_{2|1}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) + \mathbf{d}_1^{\text{ad}} \mathbf{M}_{1D}(\mathbf{f}, \mathbf{g}), \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{2|1}(f, g) &= c_1 m_{2|1}(z | f, g) + c_3 m_{2|3}(z | f, g) + m_{2|\zeta}(z | f, g) + c_5 \delta_0^k \delta_{n+}^2 L_2^1(z | f, g) + \\ &\quad + c_5 \delta_0^k \chi_2(f, g)\mathcal{I}, \quad \mathbf{M}_{2|1}(f, \mathcal{I}) = 0. \end{aligned}$$

Окончательно мы имеем, что с точностью до кограницы коцикл $\mathbf{M}_2(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ имеет вид

$$\begin{aligned} M_2(z | f, g) &= c_1 m_{2|1}(z | f, g) + c_3 m_{2|3}(z | f, g) + m_{2|\zeta}(z | f, g) + c_5 \delta_0^k \delta_{n+}^2 L_2^1(z | f, g), \\ m_2(f, g) &= \delta_0^k c_5 \chi_2(f, g), \quad \mathbf{M}_2(f, \mathcal{I}) = 0. \end{aligned}$$

2.1.1. Независимость и нетривиальность. Пусть $\mathbf{M}_2(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \mathbf{d}_1^{\text{ad}} \mathbf{M}_1(\mathbf{f}, \mathbf{g})$. Это соотношение дает

$$\begin{aligned} c_1 m_{2|1}(z | f, g) + c_3 m_{2|3}(z | f, g) + c_5 \delta_0^k \delta_{n+}^2 L_2^1(z | f, g) &= \\ = d_1^{\text{ad}} M_1(z | f, g) - \bar{f}\bar{g} M_1(z | \mathcal{I}). \end{aligned} \quad (24)$$

Пусть

$$z \cap [\text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)] = \text{supp}(f) \cap \text{supp}(g) = \emptyset.$$

Из (24) следует, что

$$\begin{aligned} \bar{f}\bar{g} M_1(z | \mathcal{I}) = 0 &\implies M_1(z | \mathcal{I}) = 0 \implies \\ \implies c_1 m_{2|1}(z | f, g) + c_3 m_{2|3}(z | f, g) + c_5 \delta_0^k \delta_{n+}^2 L_2^1(z | f, g) &= d_1^{\text{ad}} M_1(z | f, g). \end{aligned}$$

Это уравнение имеет решение только при $c_1 = c_3 = c_5 = 0$ (см. [1] и [3]).

2.2. Деформации супералгебры Ли $\mathbf{D}_{n+}^{2k+1}$. В этом пункте мы найдем общий вид формальной деформации супералгебры Ли $\mathbf{D}_{n+}^{2k+1}$ с четной суперскобкой $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_*$,

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_* = M_2^*(z | \mathbf{f}, \mathbf{g}) + m_2^*(\mathbf{f}, \mathbf{g})\mathcal{I} = \sum_{l=0}^{\infty} \hbar^{2l} \mathbf{M}_{2l}(\mathbf{f}, \mathbf{g}),$$

$$M_2^*(z | \mathbf{f}, \mathbf{g}) \in D_{n+}^{2k+1}[[\hbar^2]], \quad m_2^*(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathbb{K}[[\hbar^2]], \quad \varepsilon_{M_2^*} = \varepsilon_{m_2^*} = 0,$$

удовлетворяющей тождеству Якоби

$$(-1)^{\varepsilon(\mathbf{f})\varepsilon(\mathbf{h})}[[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_*, \mathbf{h}]_* + (-1)^{\varepsilon(\mathbf{g})\varepsilon(\mathbf{h})}[[\mathbf{h}, \mathbf{f}]_*, \mathbf{g}]_* + (-1)^{\varepsilon(\mathbf{f})\varepsilon(\mathbf{h})}[[\mathbf{g}, \mathbf{h}]_*, \mathbf{f}]_* = 0. \quad (25)$$

Мы имеем $M_{20}(f, g) = \{f(z), g(z)\}$, $m_{20}(f, g) = \bar{f}\bar{g}$, $M_{20}(\mathbf{f}, \mathcal{I}) = m_{20}(\mathbf{f}, \mathcal{I}) = 0$.

2.2.1. *Порядок $\hbar^2$.* В порядке $\hbar^2$ из (25) получаем уравнение

$$\mathbf{d}_2^{\text{ad}} \mathbf{M}_{21}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}) = 0, \quad \varepsilon_{\mathbf{M}_{21}} = 0,$$

общее решение которого имеет вид²⁾

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{21}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) &= \mathbf{M}_{2|11}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) + \mathbf{d}_1^{\text{ad}} \mathbf{M}_{1D1}(\mathbf{f}, \mathbf{g}), \\ M_{2|11}(z | f, g) &= c_{11}m_{2|1}(z | f, g) + m_{2|\zeta_1}(z | f, g), \\ \varepsilon(\zeta_1) &= 1, \quad \zeta_1(z) \in E_{n+}^{2k+1}/Z_{n+}^{2k+1}, \\ m_{2|11}(f, g) &= \mathbf{M}_{2|11}(f, \mathcal{I}) = 0. \end{aligned}$$

Выполняя преобразование подобия³⁾ $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_* \rightarrow [\mathbf{f}, \mathbf{g}]_{*T}$ с $\mathbf{T}(\mathbf{f}) = \mathbf{f} - \hbar^2 \mathbf{M}_{1D1}(\mathbf{f}) + O(\hbar^4)$, мы можем переписать $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_*$ в виде

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}, \mathbf{g}]_* &= \mathbf{N}_{c_{1[1]}, \zeta_{[1]}}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) - \mathcal{L}_{22}(z | \mathbf{f}, \mathbf{g}) + \hbar^4 \mathbf{M}_{22}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) + O(\hbar^6), \\ \mathbf{N}_{c_{1[1]}, \zeta_{[1]}}(f, g) &= \mathcal{N}_{c_{1[1]}, \zeta_{[1]}}(z | f, g) + \bar{f}\bar{g}\mathcal{I}, \\ \mathcal{L}_{22} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}_{\varkappa_{[1]}}(z | \zeta_{[1]}, \zeta_{[1]})_2 \bar{f}\bar{g}, \\ \overline{\mathcal{N}}_{c_{1[1]}, \zeta_{[1]}}(|f, g) - \overline{\mathcal{M}}_{\varkappa_{[1]}}(|\zeta_{[1]}, \zeta_{[1]})_2 \bar{f}\bar{g} &= O(\hbar^6), \\ \mathbf{N}_{c_{1[1]}, \zeta_{[1]}}(f, \mathcal{I}) &= \mathbf{N}_{c_{1[1]}, \zeta_{[1]}}(\mathcal{I}, \mathcal{I}) = 0, \\ \varkappa_{[n]} &= \sum_{k=1}^n \hbar^{2(k-1)} \varkappa_k, \quad c_{1[n]} = \sum_{k=1}^n \hbar^{2k} c_{1k} = \hbar^2 \frac{\varkappa_{[n]}^2}{6} + O(\hbar^{2(n+1)}), \quad \zeta_{[n]} = \sum_{k=1}^n \hbar^{2k} \zeta_k, \end{aligned}$$

причем $\mathcal{M}_{\varkappa_{[n]}}(z | \zeta_{[n]}, \zeta_{[n]})_{n+1}$ являются членами порядка $\hbar^{2(n+1)}$ в разложении $\mathcal{M}_{\varkappa_{[n]}}(z | \zeta_{[n]}, \zeta_{[n]})$ в ряд по степеням $\hbar^2$.

Условие $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_* \in \mathbf{D}_{n+}^{2k+1}$ влечет, что $\mathbf{M}_{22}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathbf{D}_{n+}^{2k+1}$.

²⁾Мы должны положить $c_3 = c_5 = 0$, потому что $\varepsilon_{m_{2|3}} = \varepsilon_{L^{\frac{1}{2}}_2} = 1$. Индекс D у любой формы означает, что эта форма принимает значения в пространстве гладких функций с компактным носителем.

³⁾Заметим, что $\mathbf{T} = 1 + \hbar^2 \mathbf{M}_1 + O(\hbar^4)$ представляет собой преобразование подобия, если $M_1(z | f), M_1(z | \mathcal{I}) \in D_{n+}^{2k+1}[[\hbar^2]]$ для любых $f \in D_{n+}^{2k+1}[[\hbar^2]]$.

2.2.2. Порядок $\hbar^4$. Тожество Якоби (25) в порядке $\hbar^4$ дает для $\mathbf{M}_{22}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = M_{22}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) + m_{22}(\mathbf{f}, \mathbf{g})\mathcal{I}$ уравнение $\mathbf{d}_2^{\text{ad}}\mathbf{M}'_{22} = 0$, где $\mathbf{M}'_{22} = \mathbf{M}_{22} - \mathcal{L}_{22}$, или

$$d_1^{\text{ad}}\widetilde{M}_{12}(z | f, g) = 0, \quad \widetilde{M}_{12}(z | f) = M_{22}(z | f, \mathcal{I}), \quad (26)$$

$$\bar{f}\bar{M}_{22}(|g, \mathcal{I}) - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)}\bar{g}\bar{M}_{22}(|f, \mathcal{I}) + m_{22}(\{f, g\}, \mathcal{I}) = 0, \quad (27)$$

$$d_2^{\text{ad}}M'_{22}(z | f, g, h) + \bar{f}\bar{g}M_{22}(z | h, \mathcal{I}) - \\ - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)}\bar{f}\bar{h}M_{22}(z | g, \mathcal{I}) + \bar{g}\bar{h}M_{22}(z | f, \mathcal{I}) = 0, \quad (28)$$

$$M'_{22}(z | f, g) = M_{22}(z | f, g) - \mathcal{M}_{\varkappa_{[1]}}(z | \zeta_{[1]}, \zeta_{[1]})_2 \bar{f}\bar{g}, \quad (29)$$

$$d_2^{\text{tr}}m_{22}(f, g, h) = (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)}[(-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)}\bar{f}\bar{M}_{22}(|g, h) + \\ + (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)}\bar{f}\bar{g}m_{22}(h, \mathcal{I}) + \text{cycle}(f, g, h)]. \quad (30)$$

Общее решение уравнения (26) имеет вид

$$M_{22}(z | f, \mathcal{I}) = t_2^0 \mathcal{E}_z f(z) + \{t_2(z), f(z)\}, \\ \varepsilon(t_2^0) = \varepsilon(t_2) = 0, \quad t_2(z) \in E_{n_+}^{2k+1}.$$

Далее, уравнение (27) дает

$$t_2^0 = 0, \quad m_{22}(f, \mathcal{I}) = m_{22}\bar{f}, \quad m_{22} = \text{const},$$

так что

$$M_{22}(z | f, \mathcal{I}) = \{t_2(z), f(z)\}, \quad m_{22}(f, \mathcal{I}) = m_{22}\bar{f}.$$

Из условия $\varepsilon_{m_{22}} = 0$ следует, что $m_{22} = 0$ и $m_{22}(f, \mathcal{I}) = 0$. Далее, из уравнения (28) мы находим

$$M_{22}(z | f, g) = c_{12}m_{2|1}(z | f, g) + m_{2|\zeta_2}(z | f, g) + \\ + (\mathcal{M}_{\varkappa_{[1]}}(z | \zeta_{[1]}, \zeta_{[1]})_2 + t_2(z) + c_{22})\bar{f}\bar{g} + d_1^{\text{ad}}\varphi_{D2}(z | f, g), \\ \mathcal{M}_{\varkappa_{[1]}}(z | \zeta_{[1]}, \zeta_{[1]})_2 + t_2(z) + c_{22} \in D_{n_+}^{2k+1}, \quad \varphi_{D2}(z | f) \in D_{n_+}^{2k+1}, \\ \zeta_2(z) \in E_{n_+}^{2k+1}/Z_{n_+}^{2k+1}.$$

Окончательно из уравнения (30) мы получаем

$$m_{22}(f, g) = \overline{\varphi_{D2}(|f)\bar{g}} - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)}\overline{\varphi_{D2}(|g)\bar{f}} - b_{22}\bar{f}\bar{g} - \mu_{12}(\{f, g\}).$$

Введем $t_{D2}(z)$ и $w_2(z)$ такие, что

$$t_2(z) + c_{22} = t_{D2}(z) + w_2(z), \quad t_{D2}(z) \in D_{n_+}^{2k+1}, \quad w_2(z) \in E_{n_+}^{2k+1}/D_{n_+}^{2k+1}.$$

Тогда мы можем записать

$$\mathbf{M}_{22}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \mathbf{M}_{22|\text{co}}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) + \mathbf{d}_1^{\text{ad}}\mathbf{M}_{1D2}(\mathbf{f}, \mathbf{g}),$$

$$M_{22|\text{co}}(f, g) = c_{12}m_{2|1}(z | f, g) + m_{2|\zeta_2}(z | f, g) + (\mathcal{M}_{\varkappa_{[1]}}(z | \zeta_{[1]}, \zeta_{[1]})_2 + w_2(z))\bar{f}\bar{g},$$

$$\mathcal{M}_{\varkappa_{[1]}}(z | \zeta_{[1]}, \zeta_{[1]})_2 + w_2(z) \in D_{n_+}^{2k+1},$$

$$M_{22|\text{co}}(z | f, \mathcal{I}) = \{w_2(z), f(z)\}, \quad m_{22|\text{co}}(f, g) = m_{22|\text{co}}(f, \mathcal{I}) = 0,$$

$$M_{1D2}(z | f) = \varphi_{D2}(z | f), \quad M_{12}(z | \mathcal{I}) = t_{D2}(z), \quad m_{12}(f) = \mu_{12}(f), \quad m_{12}(\mathcal{I}) = b_{22}.$$

2.2.3. *Высшие порядки.* Из тождества Якоби для формы $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}(z | f, g)$ следует, что $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}(z | \mathcal{M}_{\mathcal{K}}(|\zeta, \zeta), \zeta) \equiv 0$, так что

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{K}}(z | w, \zeta) &= \mathcal{M}_{\mathcal{K}}(z | \psi_{\mathcal{K}, \zeta, w}, \zeta) \in \hbar^6 D_{n+}^{2k+1}[[\hbar^2]], \\ \overline{\mathcal{M}_{\mathcal{K}}(|\psi_{\mathcal{K}, \zeta, w}, \zeta)} &= \overline{\mathcal{M}_{\mathcal{K}}(|\omega, \zeta)} = 0. \end{aligned}$$

Аналогично, из условия

$$\mathcal{M}_{\mathcal{K}_{[n+1]}}(z | (\psi_{\mathcal{K}_{[n+1]}, \zeta_{[n]}, w_{[n+1]}})_{[n+1]}, \zeta_{[n+1]}) \in \hbar^6 D_{n+}^{2k+1}[[\hbar^2]],$$

где

$$\zeta(z)_{[n]} = \sum_{k=1}^n \hbar^{2k} \zeta_k(z), \quad w(z)_{[n]} = \sum_{k=2}^n \hbar^{2k} w_k(z),$$

следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{K}_{[n+1]}}(z | w(z)_{[n+1]}, \zeta_{[n+1]})_{[n+2]} &\in \hbar^6 D_{n+}^{2k+1}[[\hbar^2]], \\ \overline{\mathcal{M}_{\mathcal{K}_{[n+1]}}(|w(z)_{[n+1]}, \zeta_{[n+1]})_{[n+2]}} &= 0. \end{aligned}$$

С помощью прямых выкладок можно показать, что форма $\mathbf{N}_{c_1, \zeta, w}(\mathbf{f}, \mathbf{g})$, определенная в теореме 8, удовлетворяет тождеству Якоби,

$$(-1)^{\varepsilon(\mathbf{f})\varepsilon(\mathbf{h})} \mathbf{N}_{c_1, \zeta, w}(\mathbf{f}, \mathbf{N}_{c_1, \zeta, w}(\mathbf{g}, \mathbf{h})) + \text{cycle}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}) = 0.$$

Выполняя преобразование подобия $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_* \rightarrow [\mathbf{f}, \mathbf{g}]_{*T}$ с $\mathbf{T}(\mathbf{f}) = \mathbf{f} - \hbar^4 \mathbf{M}_{1D2}(\mathbf{f}) + O(\hbar^6)$, можно переписать $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_*$ в виде

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}, \mathbf{g}]_* &= \mathbf{N}_{c_1[2], \zeta[2], w[2]}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) - \mathcal{L}_{23}(z | \mathbf{f}, \mathbf{g}) + \hbar^6 \mathbf{M}_{23}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) + O(\hbar^8), \\ \mathcal{L}_{23}(z | f, g) &= \mathcal{M}_{\mathcal{K}[2]}(z | \zeta[2], \zeta[2])_3 \bar{f} \bar{g}, \quad \mathcal{L}_{23}(z | f, \mathcal{I}) = \mathcal{M}_{\mathcal{K}[2]}(z | w[2], \zeta[2])_3 \bar{f}, \\ \mathcal{L}_{23}(z | \mathcal{I}, \mathcal{I}) &= 0. \end{aligned}$$

Условие $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_* \in \mathbf{D}_{n+}^{2k+1}[[\hbar^2]]$ влечет, что $\mathbf{M}_{23}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathbf{D}_{n+}^{2k+1}$.

В порядке $\hbar^6$ уравнение (25) приводит к четырем уравнениям. Первые два из них имеют вид

$$\begin{aligned} d_1^{\text{ad}} \widetilde{M}_{13}(z | f, g) &= 0, \\ \widetilde{M}_{13}(z | f) &= M'_{23}(z | f, \mathcal{I}) = \\ &= M_{23}(z | f, \mathcal{I}) - \mathcal{M}_{\mathcal{K}[2]}(z | w[2], \zeta[2])_3 \bar{f}, \end{aligned} \tag{31}$$

$$m_{23}(\{f, g\}, \mathcal{I}) = \bar{f} \bar{M}_{23}(|g, \mathcal{I}) - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} \bar{g} \bar{M}_{23}(|f, \mathcal{I}). \tag{32}$$

Из уравнения (31) следует (если учесть, что $M_{23}(z | f, \mathcal{I}) \in D_{n+}^{2k+1}$, $\varepsilon_{M'_{23}} = 0$)

$$M_{23}(z | f, \mathcal{I}) = \mathcal{M}_{\mathcal{K}[2]}(z | w[2], \zeta[2])_3 \bar{f} + t_3^0 \mathcal{E}_z f(z) + \{t_3(z), f(z)\}.$$

Уравнение (32) преобразуется в

$$m_{23}(\{f, g\}, \mathcal{I}) = (2 + n_+ - n_-) t_3^0 \bar{f} \bar{g}$$

и дает

$$t_3^0 = 0, \quad m_{23}(f, \mathcal{I}) = m_{23}\bar{f} = 0.$$

Теперь третье уравнение, соответствующее (25) в порядке $\hbar^6$, приобретает вид

$$d_2^{\text{ad}} M'_{23}(z | f, g, h) = 0,$$

где

$$M'_{23}(z | f, g, h) = M_{23}(z | f, g, h) - [\mathcal{M}_{\varkappa_{[2]}}(z | \zeta_{[2]}, \zeta_{[2]})_3 + t_3(z)]\bar{f}\bar{g},$$

и мы имеем

$$\begin{aligned} M_{23}(z | f, g) &= c_{13}m_{2|1}(z | f, g) + m_{2|\zeta_3}(z | f, g) + \\ &+ [\mathcal{M}_{\varkappa_{[2]}}(z | \zeta_{[2]}, \zeta_{[2]})_3 + t_3(z) + c_{23}]\bar{f}\bar{g} + d_1^{\text{ad}}\varphi_{D3}(z | f, g), \\ \mathcal{M}_{\varkappa_{[2]}}(z | \zeta_{[2]}, \zeta_{[2]})_3 + t_3(z) + c_{23} &\in D_{n+}^{2k+1}, \\ \varphi_{D3}(z | f) &\in D_{n+}^{2k+1}, \quad \zeta_3(z) \in E_{n+}^{2k+1}/Z_{n+}^{2k+1}. \end{aligned}$$

Последнее уравнение $d_2^{\text{tr}} m'_{23}(f, g, h) = 0$, где $m'_{23}(f, g, h) = m_{23}(f, g, h) - [\overline{\varphi_{D3}(|f|)}\bar{g} - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)}\overline{\varphi_{D3}(|g|)}\bar{f}]$, дает

$$m_{23}(f, g) = \overline{\varphi_{D3}(|f|)}\bar{g} - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)}\overline{\varphi_{D3}(|g|)}\bar{f} - b_{23}\bar{f}\bar{g} - \mu_{13}(\{f, g\}).$$

Введем $t_{D3}(z)$ и $w_3(z)$ такие, что

$$t_3(z) + c_{23} = t_{D3}(z) + w_3(z), \quad t_{D3}(z) \in D_{n+}^{2k+1}, \quad w_3(z) \in E_{n+}^{2k+1}/D_{n+}^{2k+1}.$$

Тогда мы можем записать

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{23}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) &= \mathbf{M}_{23|\text{co}}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) + \mathbf{d}_1^{\text{ad}}\mathbf{M}_{1D3}(\mathbf{f}, \mathbf{g}), \\ M_{23|\text{co}}(f, g) &= c_{13}m_{2|1}(z | f, g) + m_{2|\zeta_3}(z | f, g) + (\mathcal{M}_{\varkappa_{[2]}}(z | \zeta_{[2]}, \zeta_{[2]})_3 + w_3(z))\bar{f}\bar{g}, \\ &(\psi_{\varkappa_{[2]}, \zeta_{[2]}, w_{[3]}}(z))_3 \in D_{n+}^{2k+1}, \\ M_{23|\text{co}}(z | f, \mathcal{I}) &= \{w_3(z), f(z)\} + \mathcal{M}_{\varkappa_{[2]}}(z | w_{[2]}, \zeta_{[2]})_3\bar{f}, \\ m_{23|\text{co}}(f, g) &= m_{23|\text{co}}(f, \mathcal{I}) = 0, \\ M_{1D3}(z | f) &= \varphi_{D3}(z | f), \quad M_{13}(z | \mathcal{I}) = t_{D3}(z), \\ m_{13}(f) &= \mu_{13}(f), \quad m_{13}(\mathcal{I}) = b_{23}. \end{aligned}$$

Выполняя преобразование подобия $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_* \rightarrow [\mathbf{f}, \mathbf{g}]_{*T}$ с $\mathbf{T}(\mathbf{f}) = \mathbf{f} - \hbar^6\mathbf{M}_{1D3}(\mathbf{f}) + O(\hbar^8)$, мы переписываем $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_*$ в виде

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_* = \mathbf{N}_{c_{1[3]}, \zeta_{[3]}, w_{[3]}}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) + O(\hbar^8).$$

Продолжая аналогичные рассуждения, мы окончательно находим, что с точностью до преобразования подобия общий вид формальной деформации супералгебры $\mathbf{D}_{n+}^{2k+1}$ задается выражением

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}, \mathbf{g}]_* &= \mathbf{N}_{c_{1[\infty]}, \zeta_{[\infty]}, w_{[\infty]}}(\mathbf{f}, \mathbf{g}), \\ \zeta_{[\infty]}(z) &\in \hbar^2 E_{n+}^{2k+1}[[\hbar^2]]/Z_{n+}^{2k+1}[[\hbar^2]], \quad \psi_{\varkappa_{[\infty]}, \zeta_{[\infty]}, w_{[\infty]}}(z) \in \hbar^4 D_{n+}^{2k+1}[[\hbar^2]], \\ w_{[\infty]} &\in \hbar^4 E_{n+}^{2k+1}[[\hbar^2]]/D_{n+}^{2k+1}[[\hbar^2]]. \end{aligned}$$

3. СУПЕРАЛГЕБРА D_{n+}^{n++4}

В рассматриваемом случае мы имеем

$$C(f, g) = \int du ([\mathcal{E}_u f(u)]g(u) - f(u)\mathcal{E}_u g(u)) = 2 \int du [\mathcal{E}_u f(u)]g(u), \quad \mathcal{E}_u = 1 - \frac{1}{2}u^A \partial_A^u.$$

3.1. Пространство H_{ad}^2 . В этом пункте мы решаем когомологическое уравнение

$$d_2^{\text{ad}} M_2(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}) = 0, \quad M_2(z | \mathbf{f}, \mathbf{g}) \in D_{n+}^{n++4}. \quad (33)$$

Из (15) следует, что $d_1^{\text{ad}} \widetilde{M}_1(z | f, g) = 0$. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$M_2(z | f, \mathcal{I}) = t^0 \mathcal{E}_z f(z) + \{t'(z), f(z)\},$$

где

$$t'(z) \in E_{n+}^{n++4}, \quad \varepsilon(t^0) = \varepsilon(t'(z)) = \varepsilon_{M_2}.$$

Так как $C(f, \mathcal{E}g) - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} C(g, \mathcal{E}f) = 0$, мы имеем

$$C(M_2(|f, \mathcal{I}), g) - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} C(M_2(|g, \mathcal{I}), f) = C(t', \{f, g\}).$$

Из (15) следует также, что $m_2(\{f, g\}, \mathcal{I}) = C(t', \{f, g\})$, и это дает $m_2(f, \mathcal{I}) = C(t', f) + m\bar{f}$.

Далее, из (14) следует, что

$$d_2^{\text{ad}} M'_2(z | f, g, h) = -t^0 [C(f, g)\mathcal{E}_z h(z) - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} C(f, h)\mathcal{E}_z g(z) + C(g, h)\mathcal{E}_z f(z)], \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} M'_2(z | f, g) &= M_2(z | f, g) - \widetilde{C}_2(z | f, g), \\ \widetilde{C}_2(z | f, g) &= t'(z)C(f, g). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали соотношение

$$\begin{aligned} M_2(z | h, \mathcal{I})C(f, g) - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} M_2(z | g, \mathcal{I})C(f, h) + M_2(z | f, \mathcal{I})C(g, h) = \\ = t^0 [\mathcal{E}_z h(z)C(f, g) - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} \mathcal{E}_z g(z)C(f, h) + \mathcal{E}_z f(z)C(g, h)] - \\ - d_2^{\text{ad}} \widetilde{C}_2(z | f, g, h). \end{aligned}$$

Для того чтобы решить уравнение (34), рассмотрим его в следующих областях:

$$z \cap [\text{supp}(f) \cup \text{supp}(g) \cup \text{supp}(h)] = \text{supp}(f) \cap [\text{supp}(g) \cup \text{supp}(h)] = \emptyset, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} z \cap [\text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)] &= \text{supp}(f) \cap [\text{supp}(g) \cup \text{supp}(h)] = \\ &= \text{supp}(g) \cap \text{supp}(h) = \emptyset, \end{aligned} \quad (36)$$

$$z \cap [\text{supp}(f) \cup \text{supp}(g) \cup \text{supp}(h)] = \emptyset, \quad (37)$$

$$[z \cup \text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)] \cap \text{supp}(h) = \emptyset. \quad (38)$$

В каждой из этих областей правая часть уравнения (34) равна нулю, и мы имеем (детали см. в [1])

$$\begin{aligned} M'_2(z | f, g) = & \int du a(u) [\mathcal{E}_z f(z) g(u) - f(u) \mathcal{E}_z g(z)] + \\ & + \int du (\{m^1(z | u), f(z)\} g(u) - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} \{m^1(z | u), g(z)\} f(u)) + \\ & + \mu(z) \int du ([\mathcal{E}_u f(u)] g(u) - f(u) \mathcal{E}_u g(u)) + \\ & + d_1^{\text{ad}} \zeta^2(z | f, g) + M_{2| \text{loc}}(z | f, g). \end{aligned}$$

Пусть

$$[z \cup \text{supp}(h)] \cap [\text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)] = \emptyset.$$

Тогда

$$\{M_{2|2}(z | f, g), h(z)\} + \widehat{M}_{2|2}(z | \{f, g\}, h) = 0,$$

и это дает

$$\begin{aligned} \{h(z), \mu(z)\} \int du ([\mathcal{E}_u f(u)] g(u) - f(u) \mathcal{E}_u g(u)) + \mathcal{E}_z h(z) \int du a(u) \{f(u), g(u)\} + \\ + \int du \{\widehat{m}^1(z | u), h(z)\} \{f(u), g(u)\} = t^0 C(f, g) \mathcal{E}_z h(z). \end{aligned}$$

Выбирая $h(z) = \text{const}$, мы получаем

$$\int du a(u) \{f(u), g(u)\} = -t^0 C(f, g) \implies t^0 = 0.$$

Итак, мы имеем

$$\begin{aligned} M_2(z | f, g) = & c_1 m_{2|1}(z | f, g) + c_3 m_{2|3}(z | f, g) + t_D(z) C(f, g) + \\ & + m_{2|\zeta}(z | f, g) + d_1^{\text{ad}} \varphi_D(z | f, g), \\ t_D(z) = & t'(z) + c_4 \in D_{n_+}^{n_++4}, \quad \varepsilon(t_D(z)) = \varepsilon_{M_2}, \\ \zeta(z) \in & E_{n_+}^{n_++4} / Z_{n_+}^{n_++4}, \quad \varepsilon(\zeta(z)) = \varepsilon_{M_2}, \quad \varepsilon_{\varphi_D} = \varepsilon_{M_2}, \\ M_2(z | f, \mathcal{I}) = & \{t_D(z), f(z)\}, \quad m_2(f, \mathcal{I}) = C(t_D, f) + m\bar{f}, \end{aligned}$$

где билинейные формы $m_{2|1}$, $m_{2|3}$ и $m_{2|\zeta}$ те же, что и в пункте 2.1.

Для того чтобы определить параметры, используем соотношения

$$\begin{aligned} & (-1)^{\varepsilon(g)\varepsilon(h)} C(m_{2|1}(|f, h), g) - C(m_{2|1}(|f, g), h) - \\ & - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)+\varepsilon(f)\varepsilon(h)} C(m_{2|1}(|g, h), f) = \\ & = -4 \int du [f(u) (\overleftarrow{\partial}_A \omega^{AB} \partial_B)^3 g(u)] h(u), \\ & (-1)^{\varepsilon(g)\varepsilon(h)} C(m_{2|3}(|f, h), g) - C(m_{2|3}(|f, g), h) - \\ & - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)+\varepsilon(f)\varepsilon(h)} C(m_{2|3}(|g, h), f) = 0, \\ & (-1)^{\varepsilon(g)\varepsilon(h)} C(d_1^{\text{ad}} \varphi(|f, h), g) - C(d_1^{\text{ad}} \varphi(|f, g), h) - \\ & - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)+\varepsilon(f)\varepsilon(h)} C(d_1^{\text{ad}} \varphi(|g, h), f) = \\ & = d_2^{\text{tr}} [D_\zeta + C_{\varphi_D}](f, g, h), \end{aligned} \tag{39}$$

где

$$D_\zeta(f, g) = C(\zeta, g)\bar{f} - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)}C(\zeta, f)\bar{g}, \quad (40)$$

$$C_{\varphi_D}(f, g) = C(\varphi_D(|f|), g) - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)}C(\varphi_D(|g|), f). \quad (41)$$

Чтобы получить эти соотношения, мы использовали следующее:

$$\begin{aligned} \int dz f(z) \mathcal{E}_z g(z) &= - \int dz [\mathcal{E}_z f(z)] g(z), \quad n_- = n_+ + 4, \\ C(\{t, f\}, g) - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)}C(\{t, g\}, f) &= C(t, \{f, g\}), \\ \int dz f(z) [g(z) (\overleftarrow{\partial}_A \omega^{AB} \partial_B)^p h(z)] &= \int dz [f(z) (\overleftarrow{\partial}_A \omega^{AB} \partial_B)^p g(z)] h(z), \quad p = 0, 1, \dots, \\ \mathcal{E}_z [f(z) (\overleftarrow{\partial}_A \omega^{AB} \partial_B)^3 g(z)] - [\mathcal{E}_z f(z)] (\overleftarrow{\partial}_A \omega^{AB} \partial_B)^3 g(z) - f(z) (\overleftarrow{\partial}_A \omega^{AB} \partial_B)^3 \mathcal{E}_z g(z) &= \\ &= 2f(z) (\overleftarrow{\partial}_A \omega^{AB} \partial_B)^3 g(z). \end{aligned}$$

Из (14) следует также, что

$$\begin{aligned} d_2^{\text{tr}} m'_2(f, g, h) &= m[C(g, h)\bar{f} - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)}C(f, h)\bar{g} + C(f, g)\bar{h}] - \\ &\quad - 4c_1 \int dz [f(z) (\overleftarrow{\partial}_A \omega^{AB} \partial_B)^3 g(z)] h(z), \\ m'_2(f, g) &= m_2(f, g) - [D_\zeta + C_{\varphi_D}](f, g). \end{aligned}$$

Пусть теперь

$$[\text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)] \cap \text{supp}(h) = \emptyset, \quad g(z) = 1, \quad z \in \text{supp}(f).$$

Тогда мы имеем $mC(f, g)\bar{h} = -d_2^{\text{tr}} \hat{m}'_2(f, g, h)$ и поэтому $m = 0$. Таким же образом получаем

$$d_2^{\text{tr}} m'_2(f, g, h) = -4c_1 \int dz [f(z) (\overleftarrow{\partial}_A \omega^{AB} \partial_B)^3 g(z)] h(z).$$

Вследствие нетривиальности коцикла $\int dz [f(z) (\overleftarrow{\partial}_A \omega^{AB} \partial_B)^3 g(z)] h(z) \in \mathcal{C}_3(D_{n_+}^-, \mathbb{K})$ (см. [1]) мы имеем $c_1 = 0$.

Итак,

$$m_2(f, g) = D_\zeta(f, g) + C_{\varphi_D}(f, g) - bC(f, g) - d_1^{\text{tr}} \mu_1(f, g).$$

Окончательно, общим решением уравнения (33) является

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_2(\mathbf{f}, \mathbf{g}) &= \mathbf{M}_{2|1}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) + \mathbf{d}_1^{\text{ad}} \mathbf{M}_{1D}(f, g), \\ M_{2|1}(f, g) &= c_3 m_{2|3}(z|f, g) + m_{2|\zeta}(z|f, g), \quad m_{2|1}(f, g) = D_\zeta(f, g), \\ \mathbf{M}_{2|1}(\mathbf{f}, \mathcal{I}) &= 0, \\ M_{1D}(z|f) &= \varphi_D(z|f), \quad M_1(z|\mathcal{I}) = -t_D(z), \quad m_1(f) = \mu_1(f), \quad m_1(\mathcal{I}) = b. \end{aligned}$$

3.1.1. *Независимость и нетривиальность.* Предположим, что

$$\mathbf{M}_{2|1}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \mathbf{d}_1^{\text{ad}} \mathbf{M}_1(f, g).$$

Из этого уравнения следует, что

$$c_3 m_{2|3}(z | f, g) = d_1^{\text{ad}} M'_1(z | f, g) - C(f, g) M_1(\mathcal{I}) \quad (42)$$

для некоторой формы $M'_1(z | f)$. Пусть

$$z \cap [\text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)] = \emptyset, \quad g(z) = 1, \quad z \in \text{supp}(f).$$

Из уравнения (38) следует, что

$$\widehat{M}'_1(z | \{f, g\}) + C(f, g) M_1(\mathcal{I}) = 0 \implies M_1(\mathcal{I}) = 0,$$

но тогда уравнение (38) имеет решения только при $c_3 = 0$.

3.2. Деформации супералгебры Ли $\mathbf{D}_{n+}^{n++4}$. В этом пункте мы находим общий вид формальной деформации супералгебры Ли $\mathbf{D}_{n+}^{n++4}$ со скобкой $[f, g]_*$,

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_* = M_2^*(z | \mathbf{f}, \mathbf{g}) + m_2^*(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \mathcal{I} = \sum_{l=0}^{\infty} \hbar^{2l} \mathbf{M}_{2l}(\mathbf{f}, \mathbf{g}),$$

где

$$M_2^*(z | \mathbf{f}, \mathbf{g}) \in D_{n+}^{n++4}[[\hbar^2]], \quad m_2^*(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathbb{K}[[\hbar^2]], \quad \varepsilon_{M_2^*} = \varepsilon_{m_2^*} = 0.$$

3.2.1. *Порядок $\hbar^0$.* Мы имеем

$$M_{20}(f, g) = \{f(z), g(z)\}, \quad m_{20}(f, g) = C(f, g), \quad M_{20}(\mathbf{f}, \mathcal{I}) = m_{20}(\mathbf{f}, \mathcal{I}) = 0.$$

3.2.2. *Порядок $\hbar^2$.* Тожество Якоби дает уравнение $\mathbf{d}_2^{\text{ad}} \mathbf{M}_{21}(f, g, h) = 0$. Общее решение этого уравнения найдено в предыдущем разделе:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{21}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) &= \mathbf{M}_{2|11}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) + \mathbf{d}_1^{\text{ad}} \mathbf{M}_{1D1}(f, g), \\ M_{2|11}(f, g) &= c_3 m_{2|3}(z | f, g) + m_{2|\zeta_1}(z | f, g), \quad \varepsilon(\zeta_1) = 0, \\ m_{2|11}(f, g) &= D_{\zeta_1}(f, g), \quad \mathbf{M}_{2|11}(\mathbf{f}, \mathcal{I}) = 0. \end{aligned}$$

3.2.3. *Высшие порядки.* Введем форму

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{c_3, \zeta}^{(3)}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) &= C_{c_3, \zeta}^{(3)}(z | \mathbf{f}, \mathbf{g}) + c_{c_3, \zeta}^{(3)}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \mathcal{I}, \\ C_{c_3, \zeta}^{(3)}(z | f, g) &= \{f(z), g(z)\} + c_3 m_{2|3}(z | f, g) + m_{2|\zeta}(z | f, g), \\ c_{c_3, \zeta}^{(3)}(f, g) &= C(f, g) + D_{\zeta}(f, g), \\ C_{c_3, \zeta}^{(3)}(\mathbf{f}, \mathcal{I}) &= c_{c_3, \zeta}^{(3)}(\mathbf{f}, \mathcal{I}) = 0. \end{aligned}$$

Форма $\mathbf{C}_{c_3, \zeta}^{(3)}(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ удовлетворяет тождеству Якоби

$$(-1)^{\varepsilon(\mathbf{f})\varepsilon(\mathbf{h})} \mathbf{C}_{c_3, \zeta}^{(3)}(\mathbf{C}_{c_3, \zeta}^{(3)}(\mathbf{f}, \mathbf{g}), \mathbf{h}) + \text{cycle}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}) = 0.$$

Для доказательства этого факта нужно учесть, что форма $C_{c_3, \zeta}^{(3)}(z | f, g)$ удовлетворяет тождеству Якоби (см. [2]), и воспользоваться соотношением (35) и соотношениями

$$\begin{aligned} (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)} C(\{f, g\}, h) + \text{cycle}(f, g, h) &= (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)} d_2^{\text{tr}} C(f, g, h) = 0, \\ (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)} C(m_{2|\zeta}(|f, g), h) + \text{cycle}(f, g, h) &= -(-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)} d_2^{\text{tr}} D_\zeta(f, g, h), \\ (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)} D_\zeta(\{f, g\}, h) + \text{cycle}(f, g, h) &= (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)} d_2^{\text{tr}} D_\zeta(f, g, h), \\ (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)} C(m_{2|\zeta}(|f, g), h) + (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)} D_\zeta(\{f, g\}, h) + \text{cycle}(f, g, h) &= 0, \\ (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)} D_\zeta(m_{2|3}(|f, g), h) + \text{cycle}(f, g, h) &= 0, \\ (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)} D_\zeta(m_{2|\zeta}(|f, g), h) + \text{cycle}(f, g, h) &= 0. \end{aligned}$$

Выполняя преобразование подобия $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_* \rightarrow [\mathbf{f}, \mathbf{g}]_{*T}$ с $\mathbf{T}(\mathbf{f}) = \mathbf{f} - \hbar^2 \mathbf{M}_{11}(\mathbf{f}) + O(\hbar^4)$, можно переписать $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_*$ в виде

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_* = \mathbf{C}_{c_3[1], \zeta[1]}^{(3)}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) + \hbar^4 \mathbf{M}_{22}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) + O(\hbar^6).$$

В порядке $\hbar^4$ тождество Якоби дает уравнение $\mathbf{d}_2 \mathbf{M}_{22}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = 0$.

Действуя аналогично, мы находим окончательно, что с точностью до преобразования подобия общий вид формальной деформации центрально расширенной супералгебры Пуассона задается формулой

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_* = \mathbf{C}_{c_3[\infty], \zeta[\infty]}^{(3)}(\mathbf{f}, \mathbf{g}).$$

Благодарности. Работа поддержана РФФИ (гранты № 02-02-16944 (И. В. Т.) и № 02-02-17067 (С. Е. К.)), и Программой поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1578.2003.2).

Список литературы

- [1] С. Е. Конштейн, А. Г. Смирнов, И. В. Тютин, *ТМФ*, **143**:2 (2005), 163–194.
- [2] С. Е. Конштейн, А. Г. Смирнов, И. В. Тютин, *ТМФ*, **148**:2 (2006), 163–178.
- [3] С. Е. Конштейн, И. В. Тютин, *ТМФ*, **145**:3 (2005), 291–320.
- [4] С. Е. Конштейн, И. В. Тютин, *ТМФ*, **155**:2 (2008), 265–286; *General form of the deformation of the Poisson superbracket on $(2, n)$ -dimensional superspace*, [arXiv:hep-th/0610308](#).
- [5] M. Scheunert, R. B. Zhang, *J. Math. Phys.*, **39**:9 (1998), 5024–5061; [arXiv:q-alg/9701037](#).
- [6] M. Gerstenhaber, *Ann. of Math.* (2), **79**:1 (1964), 59–103; **99**:2 (1974), 257–276.

Поступила в редакцию 24.04.2007