Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Пименов, К. В. Степаньянц, Проверка нового тождества для функций Грина в $N = 1$ суперсимметричной неабелевой теории Янга–Миллса с полями материи, *ТМФ*, 2008, том 156, номер 2, 270–281

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6246>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 14:38:49

© 2008 г.

А. Б. Пименов*, К. В. Степаньянц*

ПРОВЕРКА НОВОГО ТОЖДЕСТВА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА В $N = 1$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ НЕАБЕЛЕВОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА С ПОЛЯМИ МАТЕРИИ

С использованием регуляризации высшими ковариантными производными исследуется новое тождество для функций Грина. Оно связывает между собой некоторые коэффициенты в вершинной функции суперполя материи, у которой одна из внешних линий материи не является киральной. С помощью вычисления в первом нетривиальном порядке (для двухпетлевой вершинной функции) показано, что новое тождество справедливо также и в неабелевой теории Янга–Миллса с полями материи. Продемонстрировано, что новое тождество следует из того, что трехпетлевые интегралы, определяющие функцию Гелл-Манна–Лоу, представляют собой интегралы от полных производных.

Ключевые слова: суперсимметрия, высшие ковариантные производные, диаграммы Фейнмана, тождества Славнова–Тейлора.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование структуры квантовых поправок в суперсимметричных теориях представляет собой интересную и часто нетривиальную задачу. Например, в теориях с $N = 1$ суперсимметрией было сделано предложение о форме точной во всех порядках β -функции [1]. Одним из методов, позволяющих получить точную β -функцию, является метод, предложенный в работах [2], [3], который заключается в подстановке решений тождеств Славнова–Тейлора в уравнения Швингера–Дайсона. При этом точную β -функцию можно получить, если предположить существование некоторого дополнительного тождества, которому удовлетворяют функции Грина [2], [3]. Благодаря этому тождеству исчезают несколько вкладов в функцию Гелл-Манна–Лоу начиная с трехпетлевого приближения.

Существование нового тождества связано с интересным наблюдением [4], [5], которое было сделано при использовании регуляризации высшими производными [6], [7] в суперсимметричных теориях. Оказывается, что все вклады в функцию

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: pimenov.phys.msu@mail.ru, stepan@phys.msu.ru

Гелл-Манна–Лоу являются интегралами от полных производных. Частично эта закономерность может быть объяснена подстановкой решений тождеств Уорда в уравнения Швингера–Дайсона, а в абелевом случае и путем непосредственного суммирования диаграмм [8]. Но в неабелевом случае появляются новые типы диаграмм, и метод, который был использован в работе [8], уже не работает. Поэтому в неабелевом случае необходимо дополнительно проверить справедливость нового тождества. Такая проверка производится в настоящей работе.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 напоминаются основные сведения о $N = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, методе фонового поля и регуляризации с помощью высших ковариантных производных. Проверка нового тождества производится в разделе 3. Краткое обсуждение полученных результатов приводится в заключении. Ряд технических деталей вынесен в приложение.

2. $N = 1$ СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ ТЕОРИЯ ЯНГА–МИЛЛСА, МЕТОД ФОНОВОГО ПОЛЯ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ ВЫСШИХ КОВАРИАНТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Мы будем рассматривать $N = 1$ суперсимметричную теорию Янга–Миллса с безмассовыми полями материи, которая в суперпространстве описывается следующим действием:

$$S = \frac{1}{4e^2} \text{Re tr} \int d^4x d^2\theta W_a C^{ab} W_b + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\phi^+ e^{2V} \phi + \tilde{\phi}^+ e^{-2V} \tilde{\phi}). \quad (1)$$

При этом ϕ и $\tilde{\phi}$ – киральные суперполя материи, а V – вещественное скалярное суперполе, которое в качестве одной из компонент содержит калибровочное поле A_μ . Суперполе W_a представляет собой суперсимметричный аналог тензора напряженности калибровочного поля и определяется как

$$W_a = \frac{1}{32} \bar{D}(1 - \gamma_5) D[e^{-2V}(1 + \gamma_5) D_a e^{2V}]. \quad (2)$$

В наших обозначениях калибровочное суперполе V разлагается по генераторам калибровочной группы t^a как $V = eV^a t^a$, где e – константа связи. При этом генераторы фундаментального представления мы будем нормировать условием

$$\text{tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (3)$$

Действие (1) инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$\phi \rightarrow e^{i\Lambda} \phi, \quad \tilde{\phi} \rightarrow e^{-i\Lambda} \tilde{\phi}, \quad e^{2V} \rightarrow e^{i\Lambda^+} e^{2V} e^{-i\Lambda}, \quad (4)$$

где Λ – произвольное киральное суперполе.

Для квантования этой модели удобно использовать метод фонового поля в связи с тем, что данный метод позволяет строить эффективное действие, которое является инвариантным относительно некоторых фоновых калибровочных преобразований. В применении к суперсимметричному случаю он может быть сформулирован

следующим образом [9], [10]. Осуществим в действии (1) замену

$$e^{2V} \rightarrow e^{2V'} \equiv e^{\Omega^+} e^{2V} e^{\Omega}, \quad (5)$$

где Ω – фоновое скалярное суперполе. Получившаяся теория будет инвариантна относительно фоновых калибровочных преобразований

$$V \rightarrow e^{iK} V e^{-iK}, \quad e^{\Omega} \rightarrow e^{iK} e^{\Omega} e^{-i\Lambda}, \quad e^{\Omega^+} \rightarrow e^{i\Lambda^+} e^{\Omega^+} e^{-iK}, \quad (6)$$

где K – произвольное вещественное суперполе, а Λ – произвольное киральное суперполе.

Построим фоновые киральные ковариантные производные

$$\mathbf{D} \equiv e^{-\Omega^+} \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) D e^{\Omega^+}, \quad \bar{\mathbf{D}} \equiv e^{\Omega} \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) D e^{-\Omega}. \quad (7)$$

При действии на некоторое поле X , которое преобразуется по закону $X \rightarrow e^{iK} X$, эти ковариантные производные будут меняться точно так же. Можно определить фоновую ковариантную производную с лоренцевым индексом

$$\mathbf{D}_\mu \equiv -\frac{i}{4} (C\gamma^\mu)^{ab} \{\mathbf{D}_a, \bar{\mathbf{D}}_b\}, \quad (8)$$

которая будет иметь точно такое же свойство. Несложно убедиться, что после замены (5) действие (1) перейдет в

$$S = \frac{1}{2e^2} \text{tr Re} \int d^4x d^2\theta \mathbf{W}^a \mathbf{W}_a - \frac{1}{64e^2} \text{tr Re} \int d^4x d^4\theta [16(e^{-2V} \mathbf{D}^a e^{2V}) \mathbf{W}_a + (e^{-2V} \mathbf{D}^a e^{2V}) \bar{\mathbf{D}}^2 (e^{-2V} \mathbf{D}_a e^{2V})], \quad (9)$$

где

$$\mathbf{W}_a = \frac{1}{32} e^{\Omega} \bar{\mathbf{D}} (1 - \gamma_5) D (e^{-\Omega} e^{-\Omega^+} (1 + \gamma_5) D_a e^{\Omega^+} e^{\Omega}) e^{-\Omega} \quad (10)$$

и используются обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2 &\equiv \frac{1}{2} \bar{\mathbf{D}} (1 + \gamma_5) \mathbf{D}, & \bar{\mathbf{D}}^2 &\equiv \frac{1}{2} \bar{\mathbf{D}} (1 - \gamma_5) \mathbf{D}, \\ \mathbf{D}^a &\equiv \left[\frac{1}{2} \bar{\mathbf{D}} (1 + \gamma_5) \right]^a, & \mathbf{D}_a &\equiv \left[\frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \mathbf{D} \right]_a, \\ \bar{\mathbf{D}}^a &\equiv \left[\frac{1}{2} \bar{\mathbf{D}} (1 - \gamma_5) \right]^a, & \bar{\mathbf{D}}_a &\equiv \left[\frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \mathbf{D} \right]_a. \end{aligned} \quad (11)$$

При этом действие фоновых ковариантных производных на поле V , лежащее в присоединенном представлении, определяется стандартным образом.

Заметим, что действие (9) также является инвариантным относительно квантовых преобразований

$$e^{2V} \rightarrow e^{-\lambda^+} e^{2V} e^{-\lambda}, \quad \Omega \rightarrow \Omega, \quad \Omega^+ \rightarrow \Omega^+, \quad (12)$$

где λ – произвольное фоновое-киральное суперполе, которое удовлетворяет условию

$$\bar{\mathbf{D}}\lambda = 0. \quad (13)$$

Такое суперполе может быть представлено в виде $\lambda = e^{\Omega}\Lambda e^{-\Omega}$, где Λ – обычное киральное суперполе.

Удобно выбрать регуляризацию и фиксацию калибровки так, чтобы инвариантность преобразований (6) не нарушалась. Мы проведем фиксацию калибровки с помощью добавления в действие слагаемых

$$S_{\text{gf}} = -\frac{1}{32e^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta (V\mathbf{D}^2\bar{\mathbf{D}}^2V + V\bar{\mathbf{D}}^2\mathbf{D}^2V). \quad (14)$$

В этом случае слагаемые, квадратичные по суперполю V , будут иметь наиболее простой вид

$$\frac{1}{2e^2} \text{tr Re} \int d^4x d^4\theta V\mathbf{D}_\mu^2V. \quad (15)$$

Также необходимо добавить [9] действие духов Фаддеева–Попова и действие духов Нильсена–Каллош. Поскольку в этой работе мы будем вычислять вклад суперполей материи, то конкретный вид этих слагаемых нас интересовать не будет. При фиксации калибровки нарушается инвариантность действия относительно квантовых калибровочных преобразований (12), однако существует остаточная инвариантность относительно BRST-преобразований. BRST-инвариантность приводит к тождествам Славнова–Тейлора, которые связывают между собой вершинные функции квантового калибровочного поля и духов.

Отметим, что для упрощения вычислений регуляризацию удобно выбирать так, чтобы она нарушала инвариантность относительно BRST-преобразований. Мы будем добавлять к действию следующее слагаемое с высшими ковариантными производными:

$$S_\Lambda = \frac{1}{2e^2} \text{tr Re} \int d^4x d^4\theta V \frac{(\mathbf{D}_\mu^2)^{n+1}}{\Lambda^{2n}} V \quad (16)$$

(используемый здесь метод несколько отличается от описанного в работе [11]). В силу неинвариантности регуляризации относительно BRST-преобразований необходимо использовать специальную схему перенормировки, которая благодаря некоторым дополнительным вычитаниям в каждом порядке теории возмущений гарантирует выполнение тождеств Славнова–Тейлора. Такая схема перенормировки была предложена в работах [12], [13], а затем обобщена на суперсимметричный случай в работах [14], [15].

При этом важно заметить, что функция Гелл-Манна–Лоу является схемно независимой и не зависит от способа перенормировки и регуляризации (доказательство этого утверждения можно найти, например, в работе [5]).

Производящий функционал записывается как

$$\begin{aligned} Z[J, \Omega] = \int D\mu \exp \Big\{ & iS + iS_\Lambda + iS_{\text{gf}} + iS_{\text{gh}} + iS_{\phi_0} + \\ & + i \int d^4x d^4\theta (J + J[\Omega])(V'[V, \Omega] - \mathbf{V}) \Big\}, \end{aligned} \quad (17)$$

где суперполе $\mathbf{V}$ задается равенством

$$e^{2\mathbf{V}} \equiv e^{\mathbf{\Omega}^+} e^{\mathbf{\Omega}}, \quad (18)$$

$J[\mathbf{\Omega}]$ – некоторый произвольный функционал, S_{gf} – это члены, фиксирующие калибровку (14), а $S_{\text{gh}} = S_c + S_B$ – соответствующее действие для духов Фаддеева–Попова и Нильсена–Каллош. Кроме того, мы добавили слагаемые с дополнительными источниками ϕ_0 :

$$\begin{aligned} S_{\phi_0} = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta & (\phi_0^+ e^{\mathbf{\Omega}^+} e^{2V} e^{\mathbf{\Omega}} \phi + \phi^+ e^{\mathbf{\Omega}^+} e^{2V} e^{\mathbf{\Omega}} \phi_0 + \\ & + \tilde{\phi}_0^+ e^{-\mathbf{\Omega}^*} e^{-2V^t} e^{-\mathbf{\Omega}^t} \tilde{\phi} + \tilde{\phi}^+ e^{-\mathbf{\Omega}^*} e^{-2V^t} e^{-\mathbf{\Omega}^t} \tilde{\phi}_0). \end{aligned} \quad (19)$$

В отличие от полей ϕ и $\tilde{\phi}$, поля ϕ_0 и $\tilde{\phi}_0$ не являются киральными. Добавлять такие слагаемые, вообще говоря, не обязательно, однако новое тождество удобно формулировать в терминах вариационных производных по этим дополнительным источникам.

С помощью функционала $Z[J, \mathbf{\Omega}]$ можно построить производящий функционал для связанных функций Грина

$$W[J, \mathbf{\Omega}] = -i \ln Z[J, \mathbf{\Omega}] = - \int d^4x d^4\theta (J + J[\mathbf{\Omega}]) \mathbf{V} + W_0[J + J[\mathbf{\Omega}], \mathbf{\Omega}] \quad (20)$$

и соответствующее эффективное действие

$$\Gamma[V, \mathbf{\Omega}] = - \int d^4x d^4\theta (J \mathbf{V} + J[\mathbf{\Omega}] \mathbf{V}) + W_0[J + J[\mathbf{\Omega}], \mathbf{\Omega}] - \int d^4x d^4\theta J V, \quad (21)$$

где источники должны быть выражены через поля с помощью соотношений

$$V = \frac{\delta}{\delta J} W[J, \mathbf{\Omega}] = -\mathbf{V} + \frac{\delta}{\delta J} W_0[J + J[\mathbf{\Omega}], \mathbf{\Omega}]. \quad (22)$$

Для того чтобы понять, как $\Gamma[V, \mathbf{\Omega}]$ связано с обычным эффективным действием, совершим в производящем функционале Z замену переменной $V \rightarrow V'$. Тогда получим, что

$$Z[J, \mathbf{\Omega}] = \exp \left\{ -i \int d^4x d^4\theta (J + J[\mathbf{\Omega}]) \mathbf{V} \right\} Z_0[J + J[\mathbf{\Omega}], \mathbf{\Omega}], \quad (23)$$

где

$$Z_0[J, \mathbf{\Omega}] = \int D\mu \exp \left\{ iS + iS_\Lambda + iS_{\text{gf}} + iS_{\text{gh}} + i \int d^4x d^4\theta J V \right\}. \quad (24)$$

Как следствие,

$$\Gamma[V, \mathbf{\Omega}] = W_0[J + J[\mathbf{\Omega}], \mathbf{\Omega}] - \int d^4x d^4\theta \left(J[\mathbf{\Omega}] \mathbf{V} + J \frac{\delta}{\delta J} W_0[J + J[\mathbf{\Omega}], \mathbf{\Omega}] \right). \quad (25)$$

Положим теперь $V = 0$, так что

$$\mathbf{V} = \frac{\delta}{\delta J} W_0[J + J[\Omega], \Omega], \quad (26)$$

и учтем, что в этом случае суперполе K нетривиальным образом будет влиять только на закон калибровочного преобразования (6) для полей Ω и Ω^+ , а единственной инвариантной комбинацией окажется выражение (18) (оно инвариантно в том смысле, что в соответствующем законе калибровочного преобразования будет отсутствовать суперполе K). Поэтому при $V = 0$ также можно положить

$$\Omega = \Omega^+ = \mathbf{V}. \quad (27)$$

При этом эффективное действие оказывается равным

$$\Gamma[0, \mathbf{V}] = W_0[J + J[\mathbf{V}], \mathbf{V}] - \int d^4x d^4\theta (J + J[\mathbf{V}]) \frac{\delta}{\delta J} W_0[J + J[\mathbf{V}], \mathbf{V}] \quad (28)$$

и не зависит от конкретного вида функционала $J[\Omega]$.

Если бы члены, фиксирующие калибровку, духи и члены с высшими ковариантными производными зависели только от V' , то выражение (28) совпало бы с обычным эффективным действием. Однако в предлагаемом нами способе регуляризации и фиксации калибровки зависимость от V , Ω и Ω^+ не сводится к зависимости от V' . В соответствии с результатами работ [16], [17] инвариантный заряд (а следовательно, и функция Гелл-Манна–Лоу) являются калибровочно-независимыми, а зависимость эффективного действия от калибровки может быть ликвидирована путем перенормировки волновых функций калибровочного поля, духов и полей материи. Поэтому для вычисления функции Гелл-Манна–Лоу мы можем использовать описанную выше фоновую калибровку.

Тем не менее производящий функционал (17) построен пока еще не полностью. Дело в том, что введение слагаемого с высшими производными не устраняет расходимости в однопетлевых диаграммах. Для их регуляризации необходимо вставить в производящий функционал детерминанты полей Паули–Вилларса [7]:

$$\prod_i (\det PV(V, \mathbf{V}, M_i))^{c_i}, \quad (29)$$

где коэффициенты c_i удовлетворяют условиям

$$\sum_i c_i = 1, \quad \sum_i c_i M_i^2 = 0. \quad (30)$$

Поля Паули–Вилларса строятся для квантового калибровочного поля, духов и полей материи. Поскольку в данной работе мы рассматриваем только вклад суперполей материи, приведем явное выражение только для них:

$$(\det PV(\mathbf{V}, M))^{-1} = \int D\Phi D\tilde{\Phi} e^{S_{PV}}, \quad (31)$$

где (с учетом условия (27))

$$S_{\text{PV}} \equiv Z \left(e, \frac{\Lambda}{\mu} \right) \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta (\Phi^+ e^{\mathbf{V}} e^{2V} e^{\mathbf{V}} \Phi + \tilde{\Phi}^+ e^{-\mathbf{V}^t} e^{-2V^t} e^{-\mathbf{V}^t} \tilde{\Phi}) + \\ + \frac{1}{2} \int d^4x d^2\theta M \tilde{\Phi}^t \Phi + \frac{1}{2} \int d^4x d^2\bar{\theta} M \tilde{\Phi}^+ \Phi^*. \quad (32)$$

При этом мы предполагаем, что $M_i = a_i \Lambda$, где a_i – некоторые постоянные. Вставка детерминантов Паули–Вилларса позволяет сократить остаточные расходимости во всех однопетлевых диаграммах.

3. НОВОЕ ТОЖДЕСТВО ДЛЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА И ЕГО ПРОВЕРКА В НЕАБЕЛЕВОЙ ТЕОРИИ

В безмассовом случае новое тождество для функций Грина можно сформулировать следующим образом [2], [3].

Несложно убедиться, что двухточечная функция Грина суперполя материи записывается в виде

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_x^+ \delta \phi_y} = \frac{D_x^2 \bar{D}_x^2}{16} G(\partial^2) \delta_{xy}^8, \quad (33)$$

где G – некоторая функция. Тогда из тождеств Славнова–Тейлора в пределе нулевого импульса калибровочного поля можно определить вершину

$$\left. \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \mathbf{V}_y^a \delta \phi_{0z}^+ \delta \phi_x} \right|_{p=0} = e \left[-2\partial^2 \Pi_{1/2y} (\bar{D}_y^2 \delta_{xy}^8 \delta_{yz}^8) F(q^2) + \frac{1}{8} D^b C_{bc} \bar{D}_y^2 (\bar{D}_y^2 \delta_{xy}^8 D_y^c \delta_{yz}^8) f(q^2) - \right. \\ \left. - \frac{1}{16} q^\mu G'(q^2) \bar{D} \gamma^\mu \gamma_5 D_y (\bar{D}_y^2 \delta_{xy}^8 \delta_{yz}^8) - \frac{1}{4} \bar{D}_y^2 \delta_{xy}^8 \delta_{yz}^8 G(q^2) \right] T^a, \quad (34)$$

где T^a — генераторы калибровочной группы в том представлении, в котором находятся суперполя материи. Функции f и F из тождеств Славнова–Тейлора не определяются. Новое тождество может быть записано в виде равенства

$$\int d^4q \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \frac{f(q^2)}{q^2 G(q^2)} = 0. \quad (35)$$

При этом возникающая здесь производная по $\ln \Lambda$ необходима для того, чтобы получающиеся интегралы были хорошо определены. В конце этого раздела мы поясним необходимость наличия этой производной на конкретном примере.

В абелевом случае такое тождество можно проверять непосредственным суммированием диаграмм Фейнмана [8]. Однако в неабелевой теории правила Фейнмана существенно меняются вследствие наличия вершин самодействия калибровочного поля, что существенно усложняет применение этого метода. Для диаграмм, которые не содержат таких вершин, отличие вычислений от абелевого случая весьма незначительны. Но уже при наличии диаграмм с тройной вершиной калибровочного поля доказательство, проведенное в работе [8], становится неприменимым или,

по крайней мере, требует существенной модификации. Встает вопрос о том, будет ли новое тождество по-прежнему справедливо и в этом случае. Для ответа на этот вопрос нет необходимости вычислять все диаграммы Фейнмана в том или ином порядке теории возмущений. В работах [4], [18] было замечено, что если зафиксировать произвольную диаграмму с петлей суперполя материи без внешних линий, то новое тождество должно выполняться и для суммы диаграмм, которые получаются при разрезании петли суперполя материи всеми возможными способами (для получения вершинной функции необходимо добавить к ним одну линию фонового калибровочного поля всеми возможными способами).

Рис. 1. Диаграмма, которая генерирует рассматриваемый вклад в новое тождество.

Рис. 2. Способ разреза диаграммы.

Поэтому в качестве исходной точки мы рассмотрим диаграмму, приведенную на рис. 1. С топологической точки зрения существует единственный способ разрезать петлю суперполя материи (см. рис. 2), который приводит к необходимости вычислить набор диаграмм, изображенных на рис. 3. При этом во всех этих диаграммах на одной внешней прямой подразумевается киральное поле ϕ , а на другой – не киральное поле ϕ_0^* . Как следствие, все изображенные диаграммы оказываются топологически неэквивалентными.

Функция f может быть определена путем вычисления этих диаграмм, а функцию G в низшем приближении нужно положить равной 1. Действительно, в древесном приближении $G = 1$. Поэтому в заданном порядке теории возмущений для рассматриваемого класса диаграмм мы имеем

$$G(q^2) = 1 + O(\alpha^2), \quad f(q^2) = \alpha^2 f^{(2)}(q^2) + O(\alpha^3). \quad (36)$$

Отсюда

$$\int d^4 q \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \frac{f(q^2)}{q^2 G(q^2)} = \int d^4 q \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \frac{\alpha^2 f^{(2)}(q)}{q^2} + O(\alpha^3). \quad (37)$$

Рис. 3. Диаграммы, определяющие функцию f , которая соответствует рассматриваемым диаграммам.

Поэтому искомый вклад фактически определяется двухпетлевым значением лишь одной функции $f^{(2)}$.

Для того чтобы найти двухпетлевое значение функции $f^{(2)}$, необходимо произвести явное вычисление диаграмм Фейнмана, изображенных на рис. 3. При этом используется стандартная техника вычисления суперграфов. В результате мы получаем, что (в евклидовом пространстве после поворота Вика)

$$f^{(2)}(q) = -2\pi^2 C_2 \left(C_2(R) - \frac{1}{2} C_2 \right) \int \frac{d^4 k d^4 l}{(2\pi)^8} \left(\frac{l^\mu}{(k+q+l)^2} + \frac{(k+q)^\mu}{(k+q)^2} \right) \times \\ \times \frac{(k+q+l)_\mu}{(k+q)^2 (k+q+l)^2 k^2 (1+k^{2n}/\Lambda^{2n}) l^2 (1+l^{2n}/\Lambda^{2n}) (k+l)^2 (1+(k+l)^{2n}/\Lambda^{2n})}, \quad (38)$$

где величины $C_2(R)$ и C_2 определяются следующим образом:

$$T^a T^a = C_2(R), \quad (39)$$

$$f^{amn} f^{bmn} = C_2 \delta^{ab}. \quad (40)$$

Подставляя это выражение в формулу (37), получаем (технические детали приведены в приложении), что в рассматриваемом приближении для исследуемых диаграмм

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \frac{f(q^2)}{q^2 G(q^2)} = \\ = \alpha^2 \pi^2 C_2 \left(C_2(R) - \frac{1}{2} C_2 \right) \int \frac{d^4 q d^4 k d^4 l}{(2\pi)^{12}} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \left\{ \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \left[\frac{(k+q+l)^\mu}{q^2 (k+q)^2 (k+q+l)^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{1}{k^2 (1+k^{2n}/\Lambda^{2n}) l^2 (1+l^{2n}/\Lambda^{2n}) (k+l)^2 (1+(k+l)^{2n}/\Lambda^{2n})} \right] \right\} = 0. \quad (41)$$

Это и означает справедливость нового тождества для функций Грина в неабелевой теории.

На рассмотренном примере удобно пояснить необходимость наличия производной

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} = \frac{d}{d \ln \Lambda} \quad (42)$$

в подынтегральном выражении. Для этого мы сначала предположим, что эти производные отсутствуют. Тогда после взятия хорошо определенных интегралов по d^4k и d^4l из размерных соображений мы должны получить интеграл

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{a(q^2/\Lambda^2)}{q^4}, \quad (43)$$

где a – некоторая безразмерная функция, которая достаточно быстро убывает при $q \rightarrow \infty$. При этом, вообще говоря, может оказаться, что $a(0) \neq 0$. Несложно заметить, что значение $a(0)$ представляет собой некоторую конечную постоянную. Но если $a(0) \neq 0$, то интеграл в формуле (43) оказывается плохо определенным: он расходится в инфракрасной области. Для того чтобы избежать появления этой расходимости, добавляется дополнительное дифференцирование по $\ln \Lambda$. Оно приводит к тому, что слагаемое $a(0)$, которое не зависит от Λ , исчезает, а интеграл становится конечным в инфракрасной области.

В соответствии с результатами работ [2], [3] левая часть равенства (35) фактически представляет собой вклад в двухточечную функцию Грина калибровочного поля, а все остальные вклады являются интегралами от полных производных. Поэтому возникновение полной производной в формуле (41) подтверждает предположение, что в суперсимметричных теориях при использовании регуляризации высшими производными все вклады в функцию Гелл-Манна–Лоу представляют собой интегралы от полных производных.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы продемонстрировали, что новое тождество (35) справедливо также и в неабелевой теории. Как и в случае электродинамики, оно следует из того, что все интегралы, которые определяют функцию Гелл-Манна–Лоу, записываются как полные производные. Причиной появления рассматриваемого тождества, по-видимому, является некоторая весьма нетривиальная симметрия теории. Вывод этого тождества из первых принципов представляет собой достаточно интересную и непростую задачу.

Проведенные вычисления подтверждают гипотезу о том, что в суперсимметричных теориях все вклады в функцию Гелл-Манна–Лоу представляют собой интегралы от полных производных. Причина такой закономерности также пока остается невыясненной.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Получение интеграла от полной производной

Приведем подробный вывод формулы (41) из формулы (38), поскольку он является не совсем тривиальным.

После подстановки выражения для функции f левая часть нового тождества запишется в виде

$$\begin{aligned} \int d^4q \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \frac{f^{(2)}(q)}{q^2} &= -2\pi^2 C_2 \left(C_2(R) - \frac{1}{2} C_2 \right) \int \frac{d^4q d^4k d^4l}{(2\pi)^{12}} \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \times \\ &\times \left[\frac{l^\mu}{(k+q+l)^2} + \frac{(k+q)^\mu}{(k+q)^2} \right] \frac{(k+q+l)_\mu}{q^2(k+q)^2(k+q+l)^2 k^2 (1+k^{2n}/\Lambda^{2n})} \times \\ &\times \frac{1}{l^2(1+l^{2n}/\Lambda^{2n})(k+l)^2(1+(k+l)^{2n}/\Lambda^{2n})}. \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

В первом слагаемом совершим следующую последовательность замен переменных интегрирования: $q \rightarrow q - k - l$; $k \rightarrow -k$; $l \rightarrow -l$. В результате

$$\frac{(k+q+l)_\mu l^\mu}{q^2(k+q)^2(k+q+l)^4} \rightarrow -\frac{q_\mu l^\mu}{q^4(q+l)^2(q+k+l)^2}, \quad (\text{П.2})$$

а все остальные множители останутся неизменными. На следующем шаге совершим последовательность замен $l \rightarrow l - k$; $k \rightarrow -k$; $k \rightarrow l$, в результате которой указанные в (П.2) члены перейдут в

$$-\frac{q_\mu(k+l)^\mu}{q^4(q+k)^2(q+k+l)^2}, \quad (\text{П.3})$$

а все остальные множители вновь останутся неизменными. Наконец, добавим к выражению в квадратных скобках в (П.1) слагаемое

$$0 = -2 + \frac{q^\mu q_\mu}{q^2} + \frac{(k+q+l)^\mu(k+q+l)_\mu}{(k+q+l)^2}. \quad (\text{П.4})$$

В итоге интересующий нас вклад в двухточечную функцию Грина калибровочного поля может быть тождественно переписан как

$$\begin{aligned} \int d^4q \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \frac{f^{(2)}(q)}{q^2} &= -2\pi^2 C_2 \left(C_2(R) - \frac{1}{2} C_2 \right) \int \frac{d^4q d^4k d^4l}{(2\pi)^{12}} \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \left[-2 + \right. \\ &+ \frac{q^\mu(k+q+l)_\mu}{q^2} + \frac{(k+q)^\mu(k+q+l)_\mu}{(k+q)^2} + \left. \frac{(k+q+l)^\mu(k+q+l)_\mu}{(k+q+l)^2} \right] \frac{1}{(k+q)^2} \times \\ &\times \frac{1}{q^2(k+q+l)^2 k^2 (1+k^{2n}/\Lambda^{2n}) l^2 (1+l^{2n}/\Lambda^{2n}) (k+l)^2 (1+(k+l)^{2n}/\Lambda^{2n})}. \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

От этой формы записи переход к формуле (41) уже является очевидным.

Благодарности. Эта работа была поддержана РФФИ (грант № 05-01-00541).

Список литературы

- [1] V. Novikov, M. Shifman, A. Vainstein, V. Zakharov, *Phys. Lett. B*, **166**:3 (1986), 329–333.
- [2] К. В. Степаньянц, *ТМФ*, **142**:1 (2005), 37–57.
- [3] К. В. Степаньянц, *ТМФ*, **150**:3 (2007), 441–460.
- [4] А. А. Солошенко, К. В. Степаньянц, *ТМФ*, **140**:3 (2004), 437–459.
- [5] A. B. Pimenov, K. V. Stepanyantz, *Two-loop Gell–Mann–Low function of $N=1$ supersymmetric Yang–Mills theory, regularized by higher covariant derivatives*, [arXiv: 0707.4006](#).
- [6] А. А. Славнов, *ТМФ*, **23**:1 (1975), 3–10.
- [7] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, Наука, М., 1988.
- [8] К. В. Степаньянц, *ТМФ*, **146**:3 (2006), 385–401.
- [9] П. Уэст, *Введение в суперсимметрию и супергравитацию*, Мир, М., 1989.
- [10] J. Gates, M. Grisaru, M. Roček, W. Siegel, *Superspace, or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry*, With a Foreword by David Pines, Front. Phys., **58**, Benjamin, Reading, MA, 1983.
- [11] P. West, *Nucl. Phys. B*, **268**:1 (1986), 113–124.
- [12] A. A. Slavnov, *Phys. Lett. B*, **518**:1–2 (2001), 195–200.
- [13] А. А. Славнов, *ТМФ*, **130**:1 (2002), 3–14.
- [14] А. А. Славнов, К. В. Степаньянц, *ТМФ*, **135**:2 (2003), 265–279.
- [15] А. А. Славнов, К. В. Степаньянц, *ТМФ*, **139**:2 (2003), 179–191.
- [16] H. Kluberg-Stern, J.-B. Zuber, *Phys. Rev. D*, **12**:2 (1975), 467–481.
- [17] H. Kluberg-Stern, J.-B. Zuber, *Phys. Rev. D*, **12**:2 (1975), 482–488.
- [18] А. Б. Пименов, К. В. Степаньянц, *ТМФ*, **147**:2 (2006), 290–302.

Поступила в редакцию 29.08.2007