Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, Излучение вне рамок
четырех измерений, *ТМФ*, 2008, том 156, номер 2, 282–
291

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6247>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 12:37:58

© 2008 г.

А. Д. Миронов^{*,†}, А. Ю. Морозов^{*}

ИЗЛУЧЕНИЕ ВНЕ РАМОК ЧЕТЫРЕХ ИЗМЕРЕНИЙ

Представлен набор формул, описывающих классическое излучение тензорного поля ранга s ускоренно движущимся точечным источником в плоском пространстве-времени произвольной четной размерности d . Эти формулы позволяют непосредственно и алгоритмически вычислить полную интенсивность и излученный импульс для любых s и d на бумаге или при помощи компьютера. Практическое применение полученных результатов для $s > 1$ ограничено из-за несохранения тензора энергии-импульса точечной частицы. Это обычно означает, что нельзя пренебрегать вкладами в излучение от напряжений сил, которые приводят к ускорению излучающего источника.

Ключевые слова: классическое излучение, старшие измерения, теория струн.

Традиционно процессы излучения рассматривались как предмет непосредственных физических приложений и, следовательно, глубоко исследовались только в пространстве-времени размерности не большей 4 [1]. Даже в размерности $d = 2$ и $d = 3$, где существуют очевидные применения, скажем, к звуковым волнам в среде, теория плохо представлена в литературе. И лишь недавно, после того как многомерные модели, инспирированные теорией струн [2], привлекли растущий интерес [3], начали появляться некоторые статьи, посвященные многомерному излучению [4]–[8]. Их, конечно, все еще слишком мало для того, чтобы исчерпать предмет на том уровне подробности, который характерен для литературы, посвященной излучению в четырех измерениях. В данной статье мы делаем шаг, который, как нам кажется, необходим для систематического изучения физических эффектов. Мы выводим общие формулы, описывающие *классическое* излучение в произвольной размерности d и для произвольного ранга s поля излучения. Это должно помочь прояснить физические и математические структуры, которые стоят за излучением в высших измерениях. В частности, используя наши результаты, можно непосредственно рассчитать силу радиационного трения в высших измерениях, к примеру методом, описанным в статье [4].

Чтобы найти интенсивность излучения, нужно выполнить следующую цепочку вычислений.

^{*}Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: mironov@itep.ru, morozov@itep.ru

[†]Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: mironov@lpi.ru

ШАГ 1. Решить волновое уравнение для точечного источника поля ранга s , движущегося вдоль мировой линии $z^\mu(\tau)$,

$$\square A_{\mu_1 \dots \mu_s}(x) = \oint u_{\mu_1} \dots u_{\mu_s} \delta^{(d)}(x - z(\tau)) d\tau, \quad (1)$$

и выделить вклад, спадающий медленнее всего на больших расстояниях. Для четных d он дается простой формулой для запаздывающего потенциала Лиенара-Вихерта:

$$\begin{aligned} A_{\mu_1 \dots \mu_s}^{\text{rad}} &= \left(\frac{1}{(Ru)} \partial_\tau \right)^{\frac{d-4}{2}} \frac{u_{\mu_1} \dots u_{\mu_s}}{Ru}, \\ \partial_\mu A_{\mu_1 \dots \mu_s}^{\text{rad}} &= R_\mu \left(\frac{1}{(Ru)} \partial_\tau \right)^{\frac{d-2}{2}} \frac{u_{\mu_1} \dots u_{\mu_s}}{Ru}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $u_\mu = \partial_\tau z_\mu$ есть d -скорость источника ($u^2 = 1$), вычисленная в момент излучения $t' = z^0(\tau)$, определенный условием $R^2 = 0$, где R_μ — d -вектор с компонентами $R^\mu \equiv x^\mu - z^\mu(\tau)$. Здесь τ — собственное время источника. В частности,

$$\frac{\partial \tau}{\partial x^\mu} = \frac{R_\mu}{(Ru)}. \quad (3)$$

Мы также вводим обозначение $n^\mu \equiv (1, -\vec{n}) = R^\mu/R$, где R — длина пространственной части R^μ , $R \equiv \sqrt{(R^i)^2}$ (n^μ не является d -вектором в противоположность R^μ ; мы определяем его в лабораторной системе).

Удобно переписать (2) в сжатых обозначениях

$$\begin{aligned} A_{\text{rad}} &= \frac{1}{R^{d-2}} \left(\frac{1}{U} \partial_\tau \right)^{p-1} \frac{S}{U} = \frac{1}{R^{d-2}} \sum_{q=0}^{p-1} (\partial_\tau^q S) A_q^{p-1}, \\ \partial_\mu A_{\text{rad}} &= \frac{n_\mu}{R^{d-2}} \sum_{q=0}^p (\partial_\tau^q S) A_q^p, \end{aligned} \quad (4)$$

где $U = (nu)$, $S = u_{\mu_1} \dots u_{\mu_s}$, $p = (d-2)/2$, и находить A_q^p , пользуясь рекуррентными соотношениями

$$A_q^{p+1} = \frac{1}{U} (\partial_\tau A_q^p + A_{q-1}^p). \quad (5)$$

ШАГ 2. Проверить поперечность. В лидирующем порядке по $1/R$, когда можно пренебречь производными по R ,

$$\partial^{\mu_s} A_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_s}^{\text{rad}} = \left(\frac{1}{(Ru)} \partial_\tau \right)^{\frac{d-2}{2}} u_{\mu_1} \dots u_{\mu_{s-1}} \quad (6)$$

не исчезает при $s \geq 2$, и это нельзя исправить вычитанием следов. Физическая причина, приводящая к непоперечности, состоит в том, что мы пренебрегаем излучением от напряжений сил, которые приводят к ускорению источника: только учет всех напряжений делает проблему излучения хорошо определенной для $s \geq 2$. Формулы данной статьи для $s \geq 2$ дают только часть полного ответа.

ШАГ 3. Построить тензор энергии-импульса в волновой зоне. Он равен

$$T_{\mu\nu}^{(s)} = R_\mu R_\nu \left\{ \left(\frac{1}{(Ru)} \partial_\tau \right)^{\frac{d-2}{2}} \frac{u_{\mu_1} \dots u_{\mu_s}}{Ru} \right\}^2 = \frac{R_\mu R_\nu}{R^d} \left\{ \sum_{q=0}^p A_q^p \partial_\tau^q S \right\}^2. \quad (7)$$

В приложениях возникают различные линейные комбинации таких тензоров энергии-импульса. К примеру, для скалярных волн

$$T_{\mu\nu}^{(\text{scalar})} = -T_{\mu\nu}^{(0)}. \quad (8)$$

Причина возникновения знака минус состоит в том, что для всех полей ненулевого спина только пространственные компоненты имеют физический смысл (т.е. сохраняются в физических калибровках), что приводит к общему знаку минус в кинетической части тензора энергии-импульса по сравнению со скалярным полем. Для гравитационных волн

$$T_{\mu\nu}^{(\text{grav})} = T_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} T_{\mu\nu}^{(0)}. \quad (9)$$

Подобное переопределение необходимо также для высших спинов $s > 2$. Результаты для таких линейно преобразованных величин могут быть легко получены с использованием формул для $T_{\mu\nu}^{(s)}$.

ШАГ 4. Вычислить поток излучаемого импульса через сферу радиуса R . Он равен

$$d\mathcal{P}_{d|s}^\mu = - \oint \{ T^{\mu i} n_i dx^0 \} dS, \quad (10)$$

где dS – инфинитезимальный элемент этой сферы (т.е. интегрирование ведется по сфере). Таким образом, окончательно получаем (используя равенство $dx^0 = U d\tau = (nu) d\tau$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}_{d|s}^\mu}{d\tau} &= - \oint T^{\mu i} n_i R^{d-2} U d\Omega_{d-2} = \\ &= \sum_{q', q''=0}^p (\partial_\tau^{q'} (u_{\mu_1} \dots u_{\mu_s}) \partial_\tau^{q''} (u^{\mu_1} \dots u^{\mu_s})) \int n^\mu U A_{q'}^p A_{q''}^p d\Omega_{d-2}(n) = \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{d-4}{2}} (\partial_\tau^k u^\mu) P_k^{(d|s)}(\kappa). \end{aligned} \quad (11)$$

где $d\Omega_{d-2}$ – телесный угол в $(d-1)$ -мерном пространстве, а $P_k^{(d|s)}$ – функции различных скалярных произведений $(\partial_\tau^l u_\nu \partial_\tau^m u^\nu)$ с $l + m \leq d - 4 - k$. В частности, потери энергии на излучение равны $(dt' = u^0 d\tau = \gamma d\tau)$

$$\frac{d\mathcal{P}_{d|s}^0}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^{\frac{d-4}{2}} (\partial_\tau^k \gamma) P_k^{(d|s)}(\kappa) \xrightarrow{\gamma=(1-v^2)^{-1/2}=\text{const}} P_0^{(d|s)}(\kappa). \quad (12)$$

Снова подчеркнем, что эта величина дает только часть полного ответа для $s \geq 2$ из-за эффектов, подобных тем, которые описываются формулами (6) и (8), (9). Более того, она может быть даже отрицательной (!): к примеру, в случае асимптотически большого ранга s лидирующий вклад в излученный импульс $\frac{d\mathcal{P}_{d|s}^\mu}{d\tau}$ ведет себя как $-(s\dot{u}^2)^{d/2-1} \sim (-1)^{d/2}$ с учетом того, что $\dot{u}^2 \leq 0$. Для $s = 0$ отрицательность исправляется изменением общего знака (см. (8)), но для $s \geq 3$ процедура должна быть более хитрой.

Иногда рассматривают также свертки $I_{d|s} = u^\mu \frac{d\mathcal{P}_{d|s}^\mu}{d\tau}$ [6], однако они не имеют прямого физического смысла, если только не верно, что $\frac{d\mathcal{P}_{d|s}^\mu}{d\tau} \sim u_\mu$, как это случается для $d = 4$. Только тогда $I_{d|s} = \frac{d\mathcal{P}_{d|s}^0}{dt}$.

ШАГ 5. Вычислить угловые интегралы по изотропным (светоподобным) единичным векторам n^μ в (11) (хотя n^μ не является d -вектором, эти интегралы лоренц-инвариантны, поскольку выражение (11) лоренц-инвариантно),

$$\int \frac{n^{\mu_1} \dots n^{\mu_m}}{(nu)^{d+m-2}} d\Omega_{d-2}(n) \sim \text{Pr}_d(u^{\mu_1} \dots u^{\mu_m}). \quad (13)$$

Интегралы выражаются через проектор на бесследовые состояния Pr_d (поскольку $n^2 = 0$ и свертка любой пары μ -индексов в левой части (13) должна давать нуль):

$$\begin{aligned} \text{spin } s = 2 : \quad & \text{Pr}_d(u_\mu u_\nu) = u_\mu u_\nu - \frac{1}{d} \eta_{\mu\nu}; \\ \text{spin } s = 3 : \quad & \text{Pr}_d(u_{\mu_1} u_{\mu_2} u_{\mu_3}) = u_{\mu_1} u_{\mu_2} u_{\mu_3} - \\ & - \frac{1}{d+2} (\eta_{\mu_1\mu_2} u_{\mu_3} + \eta_{\mu_1\mu_3} u_{\mu_2} + \eta_{\mu_2\mu_3} u_{\mu_1}); \\ \text{spin } s = 4 : \quad & \text{Pr}_d(u_{\mu_1} u_{\mu_2} u_{\mu_3} u_{\mu_4}) = u_{\mu_1} u_{\mu_2} u_{\mu_3} u_{\mu_4} - \\ & - \frac{1}{d+4} (\eta_{\mu_1\mu_2} u_{\mu_3} u_{\mu_4} + 5 \text{ перестановок}) + \\ & + \frac{1}{(d+4)(d+2)} (\eta_{\mu_1\mu_2} \eta_{\mu_3\mu_4} + \eta_{\mu_1\mu_3} \eta_{\mu_2\mu_4} + \eta_{\mu_1\mu_4} \eta_{\mu_2\mu_3}); \\ & \dots \end{aligned}$$

Для произвольного m мы имеем (здесь $[m/2]$ обозначает целую часть числа $m/2$)

$$\begin{aligned} \text{Pr}_d(u_{\mu_1} \dots u_{\mu_m}) &= \sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k \frac{(d+2m-4-2k)!!}{(d+2m-4)!!} \times \\ &\times \left(\overbrace{u_{\mu_1} \dots u_{\mu_{m-2k}} \left(\underbrace{\eta_{\mu_{m-2k+1}\mu_{m-2k+2}} \dots \eta_{\mu_{m-1}\mu_m} + \dots}_{(2k-1)!! \text{ перестановок}} \right)}^{C_{2k}^m \text{ перестановок}} + \dots \right). \end{aligned}$$

Этот проектор удобно записать при помощи производящей функции: после свертки с m копиями d -вектора x мы получим

$$\text{Pr}_d((xu)^m) = \sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k (2k-1)!! C_{2k}^m \frac{(d+2m-4-2k)!!}{(d+2m-4)!!} (xu)^{m-2k} (x^2)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k \frac{(d+2m-4-2k)!!}{(d+2m-4)!!} \frac{m!(xu)^{m-2k}(x^2)^k}{2^k k!(m-2k)!}. \quad (14)$$

Чтобы определить нормировочный множитель в (13), нужно знать сумму коэффициентов ряда (14),

$$\begin{aligned} c_d(m) &= \sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k C_{2k}^m (2k-1)!! \frac{(d+2m-4-2k)!!}{(d+2m-4)!!} = \\ &= \frac{(d+2[m/2]-3)!!(d+2(m-[m/2])-4)!!}{(d-3)!!(d+2m-4)!!}. \end{aligned} \quad (15)$$

Переписанные в терминах производящей функции с восстановленным нормировочным множителем, угловые интегралы (13) имеют вид

$$\begin{aligned} \int \frac{(nx)^m d\Omega_{d-2}(n)}{(nu)^{d+m-2}} &= \frac{S_{n-2}}{c_d(s)} \text{Pr}_d((ux)^m) = \frac{2^{\frac{d}{2}} \pi^{\frac{d-2}{2}}}{(d+2[m/2]-3)!!} \times \\ &\times \sum_{j=0}^{[m/2]} (-1)^j \frac{(d+2m-4-2j)!!}{(d+2m-2[m/2]-4)!!} \frac{m!}{2^j j!(m-2j)!} (ux)^{m-2j} (x^2)^j. \end{aligned} \quad (16)$$

Остается подставить вместо вектора x вектор $tx_0 + \sum_{k=0}^{\frac{d-2}{2}} a_k \partial_\tau^k u$ и выделить коэффициент перед подходящей комбинацией t и a_k . Заметим, что в этом вычислении используется производящая функция, что приводит к дополнительному комбинаторному коэффициенту, который необходимо явно учесть. Например, для того чтобы получить правильный коэффициент перед членом $\partial_\tau^{k_1} u \dots \partial_\tau^{k_n} u$ с различающимися значениями $k_1, \dots, k_n$, нужно разделить производящую функцию на $n!$.

Окончательный результат может быть выражен как через скалярные произведения $U_{ij} \equiv \partial_\tau^l \vec{u}_\nu \partial_\tau^m \vec{u}^\nu$, так и через кривизны Френе κ_m и их производные $\partial_\tau^l \kappa_m$. Таким образом, последний шаг состоит в следующем.

ШАГ 6. Выразить U_{ij} через кривизны Френе [9], параметризующие сопутствующий ортонормированный базис, ассоциированный с мировой линией $x^\mu(\tau)$. Он формируется из d -векторов $\vec{N}^{(\mu)}$, $\mu = 0, \dots, d-1$,

$$\vec{N}^{(\mu)} \vec{N}^{(\nu)} = \eta^{\mu\nu} \quad (17)$$

с $\vec{N}^{(0)} = \vec{u}$ (т.е. $N_\mu^{(0)} = u_\mu$), и остальных векторов, заданных рекуррентным соотношением

$$\partial_\tau \vec{N}^{(\mu)} = -k_{\mu+1} \vec{N}^{(\mu+1)} + \sum_{\nu=1}^{\mu} \beta_{\mu\nu} \vec{N}^{(\nu)}.$$

Дифференцируя по τ условие ортонормированности, мы получим

$$(\partial_\tau \vec{N}^{(\mu)}) \vec{N}^{(\nu)} + \vec{N}^{(\mu)} (\partial_\tau \vec{N}^{(\nu)}) = 0.$$

Отсюда следует, что при $\nu \leq \mu$

$$\beta_{\mu\nu} = (\partial_\tau \vec{N}^{(\mu)}) \vec{N}^{(\nu)} = -\vec{N}^{(\mu)} (\partial_\tau \vec{N}^{(\nu)}) = \kappa_\mu \delta_{\nu, \mu-1} \eta^{\mu\mu}$$

и

$$\partial_\tau \vec{N}^{(\mu)} = -k_{\mu+1} \vec{N}^{(\mu+1)} + k_\mu \vec{N}^{\mu-1}. \quad (18)$$

Параметры k_μ (это – не d -векторы!) зависят от формы мировой линии $x^\mu(\tau)$ в инфинитезимальной окрестности точки и называются кривизнами Френе.

Подведем итог. Все указанные шаги легко делаются с помощью программ MAPLE или Mathematica¹⁾. В приложении мы получаем явные формулы для излученного d -импульса $d\mathcal{P}_{d|s}^\mu$, а также несколько более простые формулы для $P_0^{(d|s)}$ – интенсивности излучения при постоянном γ ($\kappa_2^2 = \frac{\gamma^2 \kappa_1^2}{\gamma^2 - 1} = \text{const}$, $\kappa_i = 0$, $i > 2$), см. (12), и для свертков $I_{d|s} = u^\mu \frac{d\mathcal{P}_{d|s}^\mu}{d\tau}$ [6] при “реалистичных” значениях $d = 4, 6, 8, 10$ и произвольном ранге s . Сначала мы приводим результаты для случаев $d = 4, 6, 8$, для которых формулы относительно просты, и можно понять их общую структуру. Значительно более запутанные формулы в наиболее интересном случае $d = 10$ помещены в отдельный раздел.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Формулы для $d\mathcal{P}_{d|s}^\mu$ при $d = 4, 6, 8$:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}_{4|s}^\mu}{d\tau} &= \frac{4 - 12s}{3} \pi \dot{u}^2 u^\mu, \\ \frac{d\mathcal{P}_{6|s}^\mu}{d\tau} &= \pi^2 \left[\frac{19}{3} - (2s - 3)^2 \right] \dot{u}^4 u^\mu + \frac{8\pi^2}{15} (1 - 5s) \ddot{u}^2 u^\mu + \\ &\quad + \frac{16\pi^2}{35} (2 - 7s) (\dot{u}\ddot{u}) \dot{u}^\mu + \frac{16\pi^2}{105} (7s - 4) \dot{u}^2 \ddot{u}^\mu, \\ \frac{d\mathcal{P}_{8|s}^\mu}{d\tau} &= \left\{ -\frac{16\pi^3}{9} \left(\frac{7s^3}{10} - \frac{135}{14} s^2 + \frac{838}{35} s - 5 \right) \dot{u}^6 + \frac{32\pi^3}{3} \left(-s^2 + \frac{101}{35} s - \frac{41}{63} \right) (\dot{u}\ddot{u})^2 + \right. \\ &\quad + \frac{16\pi^3}{3} \left(-\frac{s^2}{5} + \frac{59}{35} s - \frac{20}{63} \right) \dot{u}^2 \ddot{u}^2 + 32\pi^3 \left(\frac{s^2}{15} - \frac{2s}{7} + \frac{11}{189} \right) \dot{u}^2 (\dot{u}\ddot{u}) - \\ &\quad \left. - \frac{16\pi^3}{15} \left(s - \frac{1}{7} \right) \dot{u}^2 \right\} u^\mu + \\ &\quad + \left\{ \frac{32\pi^3}{7} \left(-\frac{6s^2}{5} + \frac{19}{5} s - \frac{283}{297} \right) \dot{u}^2 (\dot{u}\ddot{u}) + \frac{64\pi^3}{7} \left(\frac{1}{27} - \frac{s}{5} \right) \ddot{u}\dot{u} \right\} \dot{u}^\mu + \\ &\quad + \left\{ \frac{64\pi^3}{21} \left(\frac{2s^2}{5} - 2s + \frac{65}{99} \right) \dot{u}^4 + \frac{64\pi^3}{21} \left(\frac{1}{9} - \frac{2s}{5} \right) \dot{u}\ddot{u} \right\} \ddot{u}^\mu + \\ &\quad + \frac{32\pi^3}{35} \left(s - \frac{17}{27} \right) (\dot{u}\ddot{u}) \dot{u}^\mu. \end{aligned}$$

Формулы для $P_0^{(d|s)}$ при $d = 4, 6, 8$:

$$P_0^{(4|s)} = \frac{12s - 4}{3} \pi \kappa_1^2,$$

¹⁾ Программу расчета можно найти, например, по адресу <http://thesaurus.itep.ru/project/0703mm/intens9.zip>.

$$\begin{aligned}
P_0^{(6|s)} &= -\pi^2 \left(4s^2 - \frac{28}{3}s + \frac{32}{15} \right) 4\kappa_1^4 + \frac{8\pi^2}{15} (5s-1) \kappa_1^2 \kappa_2^2, \\
P_0^{(8|s)} &= \frac{16\pi^3}{105} (7s-1) (\kappa_1^2 \kappa_2^2 \kappa_3^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^4) + \\
&\quad + \frac{8\pi^3}{315} (49s^3 - 549s^2 + 1004s - 216) \kappa_1^6 - 16\pi^3 \left(\frac{s^2}{5} - s + \frac{64}{315} \right) \kappa_1^4 \kappa_2^2.
\end{aligned}$$

Формулы для $I_{d|s}$ при $d = 4, 6, 8$:

$$\begin{aligned}
I_{4|s} &= \frac{12s-4}{3} \pi \kappa_1^2, \\
I_{6|s} &= -\pi^2 \left(4s^2 - \frac{124}{15}s + \frac{32}{21} \right) \kappa_1^4 + \frac{8\pi^2}{15} (5s-1) (\dot{\kappa}_1^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2), \\
I_{8|s} &= \frac{16\pi^3}{105} \left[\left(\frac{49}{6}s^3 - \frac{167}{2}s^2 + \frac{406}{3}s - \frac{276}{11} \right) \kappa_1^6 - \right. \\
&\quad - \left(21s^2 - 97s + \frac{172}{9} \right) \kappa_1^4 \kappa_2^2 - \left(77s^2 - 180s + \frac{109}{3} \right) \kappa_1^2 \dot{\kappa}_1^2 + \\
&\quad \left. + 2(7s^2 - 9s + 4) \kappa_1^3 \ddot{\kappa}_1 + (7s-1) \{ \kappa_1^2 \kappa_2^2 \kappa_3^2 + (\kappa_1 \kappa_2^2 - \ddot{\kappa}_1)^2 + (2\kappa_2 \dot{\kappa}_1 + \kappa_1 \dot{\kappa}_2)^2 \} \right].
\end{aligned}$$

Результаты для наиболее интересного случая $d = 10$:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{P}_{10|s}^\mu}{d\tau} &= \left\{ \frac{4\pi^4}{315} \left(19s^4 - \frac{6466}{9}s^3 + \frac{236237}{33}s^2 - \frac{1609666}{99}s + \frac{9800}{3} \right) \dot{u}^8 - \right. \\
&\quad - \frac{32\pi^4}{7} \left(s^3 - \frac{200}{9}s^2 + \frac{2147}{33}s - \frac{6230}{429} \right) \dot{u}^2 (\dot{u}\ddot{u})^2 + \\
&\quad + \frac{16\pi^4}{35} \left(s^3 - \frac{61}{27}s^2 - \frac{8316}{297}s + \frac{11690}{1287} \right) \dot{u}^4 \ddot{u}^2 + \\
&\quad + \frac{64\pi^4}{35} \left(s^3 - \frac{1037}{54}s^2 + \frac{32653}{594}s - \frac{4865}{429} \right) \dot{u}^4 (\dot{u}\ddot{u}) - \\
&\quad - \frac{16\pi^4}{105} \left(19s^2 - \frac{611}{9}s + \frac{512}{33} \right) \ddot{u}^4 - \frac{32\pi^4}{15} \left(\frac{17}{7}s^2 - 151s + \frac{34}{21} \right) (\dot{u}\ddot{u})^2 - \\
&\quad - \frac{64\pi^4}{105} \left(s^2 - \frac{53}{3}s + \frac{100}{33} \right) (\dot{u}\ddot{u})(\ddot{u}\dot{u}) - \frac{256\pi^4}{35} \left(s^2 - \frac{263}{108}s + \frac{119}{198} \right) \ddot{u}^2 (\dot{u}\ddot{u}) - \\
&\quad - \frac{32\pi^4}{105} \left(s^2 - \frac{134}{9}s + \frac{25}{11} \right) \dot{u}^2 \ddot{u}^2 + \frac{64\pi^4}{105} \left(s^2 - \frac{74}{9}s + \frac{15}{11} \right) \dot{u}^2 (\ddot{u}\dot{u}) + \\
&\quad + \frac{64\pi^4}{315} (9s^2 - 49s + 10) (\dot{u}\ddot{u})(\ddot{u}\dot{u}) + \frac{32\pi^4}{105} \left(\frac{1}{9} - s \right) \ddot{u}^4 \left. \right\} u^\mu - \\
&\quad - \left\{ \frac{32\pi^4}{63} \left(\frac{8s^3}{3} - \frac{593}{11}s^2 + \frac{72173}{429}s - \frac{5670}{143} \right) \dot{u}^4 (\dot{u}\ddot{u}) + \right. \\
&\quad + \frac{64\pi^4}{189} \left(20s^2 - \frac{829}{11}s + \frac{2664}{143} \right) \ddot{u}^2 (\dot{u}\ddot{u}) + \\
&\quad \left. + \frac{256\pi^4}{189} \left(5s^2 - \frac{133}{11}s + \frac{453}{143} \right) (\dot{u}\ddot{u})(\ddot{u}\dot{u}) - \frac{128\pi^4}{189} \left(s^2 - \frac{109}{22}s + \frac{147}{143} \right) \dot{u}^2 (\ddot{u}\dot{u}) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{320\pi^4}{819} \left(1 - \frac{208}{33}s \right) \dot{u}^2 (\ddot{u}\dot{u}) + \frac{64\pi^4}{189} \left(2s - \frac{3}{11} \right) (\dot{u}\ddot{u}) \Big\} \dot{u}^\mu + \\
& + \left\{ \frac{128\pi^4}{189} \left(s^3 - \frac{785}{44}s^2 + \frac{30843}{572}s - \frac{2065}{143} \right) \dot{u}^6 + \right. \\
& + \frac{320\pi^4}{189} \left(s^2 - \frac{53s}{11} + \frac{216}{143} \right) (\dot{u}\ddot{u})^2 - \frac{640\pi^4}{189} \left(s^2 - 4s + \frac{1569}{1430} \right) \dot{u}^2 (\dot{u}\ddot{u}) - \\
& - \frac{64\pi^4}{189} \left(4s^2 + s + \frac{123}{143} \right) \dot{u}^2 \ddot{u}^2 + \frac{128\pi^4}{189} \left(\frac{2}{11} - s \right) (\ddot{u}\ddot{u}) \Big\} \dot{u}^\mu + \\
& + \left\{ \frac{256\pi^4}{4158} \left(22s^2 - 167s + \frac{795}{13} \right) \dot{u}^2 (\dot{u}\ddot{u}) + \frac{64\pi^4}{189} \left(\frac{3}{11} - s \right) (\dot{u}\ddot{u}) \right\} \dot{u}^\mu - \\
& - \left\{ \frac{32\pi^4}{945} \left(s^2 - \frac{141}{11}s + \frac{1020}{143} \right) \dot{u}^4 - \frac{64\pi^4}{315} \left(s - \frac{23}{33} \right) \ddot{u}^2 - \right. \\
& - \left. \frac{256\pi^4}{945} \left(s - \frac{29}{44} \right) (\dot{u}\ddot{u}) \right\} \ddot{u}^\mu; \\
P_0^{(10|s)} = & \frac{32\pi^4}{315} \left[\left(-\frac{19}{8}s^4 + \frac{2747}{36}s^3 - \frac{152021}{264}s^2 + \frac{369827}{396} - 192 \right) \kappa_1^8 + \right. \\
& + \left(\frac{9}{2}s^3 - 605s^2 + 933s - 188 \right) \kappa_1^6 \kappa_2^2 - \\
& - \left(\frac{33}{2}s^2 - 325s + 28 \right) \kappa_1^4 \kappa_2^4 - \left(9s^2 - \frac{88}{3}s + \frac{43}{3} \right) \kappa_1^4 \kappa_2^2 \kappa_3^2 + \\
& + \left(3s - \frac{1}{3} \right) (\kappa_1^2 \kappa_2^6 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \kappa_3^2 \kappa_4^2 + 2\kappa_1^2 \kappa_2^4 \kappa_3^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \kappa_3^4) \Big]; \\
I_{10|s} = & \frac{16\pi^4}{945} \left[\left(81s^3 - 1693s^2 + \frac{53244}{11}s - \frac{133048}{143} \right) \kappa_1^6 \kappa_2^2 + \right. \\
& + \left(243s^3 - 4785s^2 + \frac{106818}{11}s - \frac{300280}{143} \right) \kappa_1^4 \dot{\kappa}_1^2 - \\
& - \left(99s^2 - 931s + \frac{1744}{11} \right) \kappa_1^4 \kappa_2^4 + \left(36s^2 - 220s + \frac{416}{11} \right) \kappa_1^4 \kappa_2 \ddot{\kappa}_2 + \\
& + \left(324s^2 - 1780s + \frac{3392}{11} \right) \kappa_1^3 \ddot{\kappa}_1 \kappa_2^2 - \left(468s^2 - 1160s + \frac{2812}{11} \right) \kappa_1 \ddot{\kappa}_1 \dot{\kappa}_1^2 + \\
& + \left(144s^2 - 568s + \frac{1336}{11} \right) \kappa_1^2 \dot{\kappa}_1 \ddot{\kappa}_1 - \left(171s^2 - 413s + \frac{1062}{11} \right) \kappa_1^4 - \\
& - \left(54s^2 - 488s + \frac{866}{11} \right) \kappa_1^4 \kappa_2^2 \kappa_3^2 - \\
& - \left(\frac{57}{4}s^4 - \frac{2507}{6}s^3 + \frac{125989}{44}s^2 - \frac{3644975}{858}s + \frac{111744}{143} \right) \kappa_1^8 - \\
& - \left(108s^3 - 1506s^2 + \frac{31794}{11}s - \frac{83808}{143} \right) \kappa_1^5 \ddot{\kappa}_1 - \\
& - \left(324s^2 - 822s + \frac{1878}{11} \right) \kappa_1^2 \ddot{\kappa}_1^2 - \left(432s^2 - 2752s + \frac{5760}{11} \right) \kappa_1^3 \dot{\kappa}_1 \kappa_2 \dot{\kappa}_2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(18s^2 - 268s + \frac{450}{11} \right) \kappa_1^4 \kappa_2^2 - \left(450s^2 - 3714s + \frac{7520}{11} \right) \kappa_1^2 \dot{\kappa}_1^2 \kappa_2^2 + \\
& + 2(9s - 1)[(\dot{\kappa}_1 - 3\dot{\kappa}_1 \kappa_2^2 - 3\kappa_1 \kappa_2 \dot{\kappa}_2)^2 + \\
& + (3\ddot{\kappa}_1 \kappa_2 + 3\dot{\kappa}_1 \dot{\kappa}_2 + \kappa_1 \ddot{\kappa}_2 - \kappa_1 \kappa_2^3)^2 + (2\kappa_1 \dot{\kappa}_2 \kappa_3 + \kappa_1 \kappa_2 \dot{\kappa}_3 + 3\dot{\kappa}_1 \kappa_2 \kappa_3)^2 - \\
& - \kappa_1^2 \kappa_2^2 \kappa_3^2 (2\kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2) - 2\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3^2 (3\ddot{\kappa}_1 \kappa_2 + \kappa_1 \ddot{\kappa}_2 + 3\dot{\kappa}_1 \dot{\kappa}_2)] \Big].
\end{aligned}$$

Заметим, что в выражениях для излученного импульса коэффициенты перед членами k -й степени по U_{ij} являются полиномами степени k от ранга s . Относительная простота коэффициентов этих полиномов подразумевает, что для них может существовать общая формула в произвольной размерности d . Однако хотелось бы снова подчеркнуть, что использование всех этих выражений для излучения полей старших рангов ограничено из-за необходимости учета вкладов других тензоров энергии-импульса. Кроме того, чтобы отделить вклад поля *спина* s от вклада поля *ранга* s , нужно добавить подходящую комбинацию тензоров энергии-импульса полей низших рангов. Это можно сделать непосредственно, если использовать формулы, полученных в данном тексте.

Благодарности. Мы благодарны П. Казинскому и С. Ляховичу за информативные обсуждения. Данная работа частично поддержана программой Государственного агентства по атомной энергии, РФФИ (гранты № 07-02-00878-а (А. Д. Миронов) и № 07-02-00645 (А. Ю. Морозов), совместный грант № 06-01-92059-КЭ_а), Программой поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-8004.2006.2), проектом NWO 047.011.2004.026, ИНТАС (грант № 05-1000008-7865) и проектом ANR-05-BLAN-0029-01.

Список литературы

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. II. Теория поля*, Физматлит, М., 2001; Дж. Джексон, *Классическая электродинамика*, Мир, М., 1965; А. А. Соколов, И. М. Тернов, В. Ч. Жуковский, А. Б. Борисов, *Квантовая электродинамика*, Изд-во МГУ, 1983; С. Вайнберг, *Гравитация и космология*, Мир, М., 1975; И. Хрипович, *Общая теория относительности*, РХД, Ижевск, 2001; В. Kosyakov, *Introduction to the Classical Theory of Particles and Fields*, Springer, Berlin, 2007.
- [2] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, *Phys. Lett. B*, **429**:3–4 (1998), 263–272; *Phys. Rev. D*, **59**:8 (1999), 086004; I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, *Phys. Lett. B*, **436**:3–4 (1998), 257–263.
- [3] T. Banks, W. Fischler, *A model for high energy scattering in quantum gravity*, [arXiv: hep-th/9906038](#); S. B. Giddings, S. Thomas, *Phys. Rev. D*, **65**:5 (2002), 056010; S. Dimopoulos, G. Landsberg, *Phys. Rev. Lett.*, **87**:16 (2001), 161602; P. Kanti, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:29 (2004), 4899–4951; G. Landsberg, *J. Phys. G*, **32**:9 (2006), R337–365; [arXiv: hep-ph/0607297](#); M. Cavaglia, R. Godang, L. Cremaldi, D. Summers, *Comput. Phys. Comm.*, **117**:6 (2007), 506–517; [arXiv: hep-ph/0609001](#); A. Mironov, A. Morozov, T. Tomaras, *Can Centauros or Chirons be the first observations of evaporating mini black holes?*, [arXiv: hep-ph/0311318](#); A. Cafarella, C. Corianò, T. Tomaras, *JHEP*, **06** (2005), 065; [arXiv: hep-ph/0410358](#); L. Anchordoqui, T. Paul, S. Reucroft, J. Swain, *Internat. J. Modern Phys. A*, **18**:13 (2003), 2229–2366; A. Mironov, A. Morozov, T. Tomaras, *Facta Univ. Ser. Phys. Chem. Tech.*, **4** (2006), 381–404; [arXiv: 0710.3395](#).

- [4] Б. П. Косяков, *ТМФ*, **119**:1 (1999), 119–135; [arXiv: hep-th/0207217](#).
- [5] D. Galt'sov, *Phys. Rev. D*, **66**:2 (2002), 025016; [arXiv: hep-th/0112110](#); P. O. Kazinski, S. L. Lyakhovich, A. A. Sharapov, *Phys. Rev. D*, **66**:2 (2002), 025017; [arXiv: hep-th/0201046](#); V. Cardoso, O. Dias, J. Lemos, *Phys. Rev. D*, **67**:6 (2003), 064026; [arXiv: hep-th/0212168](#); Yu. Yaremko, *J. Phys. A*, **37**:3 (2004), 1079–1091; B. Koch, M. Bleicher, *Письма в ЖЭТФ*, **87**:2 (2008), 75–80; [arXiv: hep-th/0512353](#); P. Krtouš, J. Podolský, *Classical Quantum Gravity*, **23**:5 (2006), 1603–1615; [arXiv: gr-qc/0602007](#); H. A. Morales-Técotl, O. Pedraza, L. O. Pimentel, *Low-energy effects in brane worlds: Liennard–Wiechert potentials and Hydrogen Lamb shifteprint*, [arXiv: physics/0611241](#).
- [6] M. Gürses, O. Sarioğlu, *Classical Quantum Gravity*, **19**:16 (2002), 4249–4261; **20**:2 (2003), 351–358; *J. Math. Phys.*, **44**:10 (2003), 4672–4680; [arXiv: hep-th/0303078](#).
- [7] V. Cardoso, M. Cavaglia, J.-Q. Guo, *Gravitational Larmor formula in higher dimensions*, [arXiv: hep-th/0702138](#).
- [8] А. Миронов, А. Морозов, *Письма в ЖЭТФ*, **85**:1 (2007), 9–14; [arXiv: hep-ph/0612074](#).
- [9] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, V. I, Publish or Perish, Berkeley, California, 1979.

Поступила в редакцию 23.04.2007