Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

У. А. Розиков, М. М. Рахматуллаев, Описание слабо периодических мер Гиббса модели Изинга на дереве Кэли, *ТМФ*, 2008, том 156, номер 2, 292–302

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6248>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 14:29:56

© 2008 г.

У. А. Розиков*, М. М. Рахматуллаев†

ОПИСАНИЕ СЛАБО ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕР ГИББСА МОДЕЛИ ИЗИНГА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Введено понятие слабо периодической меры Гиббса. Для модели Изинга описано множество таких мер, соответствующих нормальным делителям индекса 2 и индекса 4 группового представления дерева Кэли. В частности, на дереве Кэли порядка 4 доказано, что существуют критические значения $T_c < T_{cr}$ температуры $T > 0$ такие, что при $0 < T < T_c$ или $T > T_{cr}$ существуют пять слабо периодических мер Гиббса, при $T = T_c$ существуют три слабо периодических меры Гиббса, при $T_c < T \leq T_{cr}$ существует одна слабо периодическая мера Гиббса.

Ключевые слова: дерево Кэли, мера Гиббса, модель Изинга, слабо периодические меры.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одна из основных проблем для гамильтониана модели Изинга – это описание всех отвечающих ему предельных мер Гиббса. Известно, что для модели Изинга такие меры образуют непустое выпуклое компактное подмножество в множестве всех вероятностных мер. Задача полного описания элементов этого множества далека от своего завершения. Описаны трансляционно-инвариантные (см., например, [1]–[3]), периодические [4], [5] и континуальные множества непериодических [1], [6] мер Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли.

Описанию периодических мер Гиббса для некоторых моделей с конечным радиусом взаимодействия посвящены работы [4], [5], [7]–[11], в которых в основном рассматриваются трансляционно-инвариантные или периодические с периодом два меры. В настоящей работе мы введем более общее понятие периодической меры Гиббса и проверим существование таких мер для модели Изинга.

Структура работы такова. В разделе 2 мы даем необходимые определения и постановку задачи. Раздел 3 посвящен описанию слабо периодических мер. В

*Институт математики и информационных технологий АН РУз, Ташкент, Узбекистан.
E-mail: rozikovu@yandex.ru

†Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан.
E-mail: mrahmatullaev@rambler.ru

п. 3.1 изучаются слабо периодические меры, соответствующие нормальным делителям индекса 2, а в п. 3.2 рассматривается один нормальный делитель индекса 4, выбор которого обеспечивает минимум числа неизвестных в соответствующей системе уравнений. В разделе 4 мы обсуждаем полученные результаты и формулируем несколько проблем, оставшихся открытыми.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\tau^k = (V, L)$, $k \geq 1$, есть дерево Кэли порядка k , т.е. бесконечное дерево, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер, V – множество вершин, L – множество ребер τ^k . Известно, что τ^k можно представить как G_k – свободное произведение $k + 1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$.

Для произвольной точки $x^0 \in V$ положим $W_n = \{x \in V \mid d(x^0, x) = n\}$, $V_n = \bigcup_{m=0}^n W_m$, $L_n = \{\langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n\}$, где $d(x, y)$ – расстояние между x и y на дереве Кэли, т.е. число ребер пути, соединяющего x и y (здесь и далее $\langle x, y \rangle$ означает, что вершины x и y являются ближайшими соседями).

Пусть $\Phi = \{-1, 1\}$ и σ – конфигурация на V , т.е. $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$, $\Omega = \Phi^V$. Пусть $A \subset V$. Обозначим через Ω_A пространство конфигураций, определенных на множестве A и принимающих значения из Φ .

Рассмотрим гамильтониан модели Изинга

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y), \quad J \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Пусть $h_x \in \mathbb{R}$, $x \in V$. Для каждого n определим меру μ_n на Ω_{V_n} , полагая

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp \left\{ -\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_x \sigma(x) \right\}, \quad (2)$$

где $\beta = T^{-1}$ – обратная температура, $T > 0$, $\sigma_n = \{\sigma(x), x \in V_n\} \in \Omega_{V_n}$, Z_n^{-1} – нормировочный множитель и

$$H(\sigma_n) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L_n} \sigma(x)\sigma(y).$$

Условия согласованности для последовательности мер $\mu_n(\sigma_n)$, $n \geq 1$, задаются равенством

$$\sum_{\sigma^{(n)}} \mu_n(\sigma_{n-1}, \sigma^{(n)}) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}), \quad \sigma^{(n)} = \{\sigma(x), x \in W_n\}. \quad (3)$$

Пусть μ_n , $n \geq 1$, – последовательность мер на Ω_{V_n} , обладающая свойством согласованности (3). Тогда в силу теоремы Колмогорова существует, и притом единственная, предельная мера μ на $\Omega_V = \Omega$ (которая называется предельной мерой Гиббса) такая, что $\mu(\sigma_n) = \mu_n(\sigma_n)$ для каждого $n = 1, 2, \dots$. Известно, что меры (2) удовлетворяют (3) тогда и только тогда, когда совокупность величин $h = \{h_x, x \in G_k\}$ такова, что

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} f(h_y, \theta), \quad (4)$$

где $S(x)$ – множество “прямых потомков” точки $x \in V$ и $f(x, \theta) = \operatorname{arctg}(\theta \operatorname{th} x)$, $\theta = \operatorname{th}(J\beta)$ (см. [1]–[3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Совокупность величин $h = \{h_x, x \in G_k\}$ называется $\widehat{G}_k$ -периодической, если $h_{xy} = h_x$ для любых $x \in G_k, y \in \widehat{G}_k$ (здесь $\widehat{G}_k$ – нормальный делитель индекса $r \geq 1$).

В настоящей работе мы дадим более общее определение периодической меры Гиббса. Для $x \in G_k$ положим $x_\downarrow = \{y \in G_k : \langle x, y \rangle\} \setminus S(x)$. Пусть $G_k/\widehat{G}_k = \{H_1, \dots, H_r\}$ – фактор-группа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Совокупность величин $h = \{h_x, x \in G_k\}$ назовем $\widehat{G}_k$ -слабо периодической, если $h_x = h_{ij}$ при $x \in H_i, x_\downarrow \in H_j$ для любого $x \in G_k$.

Заметим, что слабо периодическая совокупность h совпадает с обычной периодической (см. определение 1), если значение h_x не зависит от $x_\downarrow$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Мету μ назовем $\widehat{G}_k$ -(слабо) периодической, если она соответствует $\widehat{G}_k$ -(слабо) периодической совокупности величин h . G_k -периодическая мера называется трансляционно-инвариантной.

Цель нашей работы – описание множества слабо периодических мер Гиббса для модели Изинга.

3. СЛАБО ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ

Степень трудности задачи описания слабо периодических мер Гиббса зависит от структуры и индекса нормального делителя, относительно которого налагается условие периодичности. В работе [12] доказано, что в группе G_k не существует нормального делителя нечетного индекса, отличного от 1. Поэтому мы рассмотрим нормальные делители четного индекса. В настоящей работе мы ограничимся случаем индексов 2 и 4.

3.1. Случай индекса 2. Опишем $\overline{G}_k$ -слабо периодические меры Гиббса для любого нормального делителя $\overline{G}_k$ индекса 2. Заметим, что любой нормальный делитель индекса 2 группы G_k имеет вид $H_A = \{x \in G_k : \sum_{i \in A} w_x(a_i) - \text{четное число}\}$, где $\emptyset \neq A \subseteq N_k = \{1, 2, \dots, k+1\}$ и $w_x(a_i)$ – число букв a_i в слове $x \in G_k$ [4].

Пусть $A \subset N_k$ и H_A – соответствующий нормальный делитель индекса 2. Заметим, что в случае $|A| = k+1$ ($|A|$ – число элементов множества A), т.е. в случае $A = N_k$, слабая периодичность совпадает с обычной периодичностью. Поэтому рассмотрим $A \subset N_k$ такие, что $A \neq N_k$. Тогда в силу (4) H_A -слабо периодическая совокупность h имеет вид

$$h_x = \begin{cases} h_1, & x \in H_A, \quad x_\downarrow \in H_A, \\ h_2, & x \in H_A, \quad x_\downarrow \in G_k \setminus H_A, \\ h_3, & x \in G_k \setminus H_A, \quad x_\downarrow \in H_A, \\ h_4, & x \in G_k \setminus H_A, \quad x_\downarrow \in G_k \setminus H_A, \end{cases} \quad (5)$$

где $h_i, i = \overline{1, 4}$, удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} h_1 &= |A|f(h_3, \theta) + (k - |A|)f(h_1, \theta), \\ h_2 &= (|A| - 1)f(h_3, \theta) + (k + 1 - |A|)f(h_1, \theta), \\ h_3 &= (|A| - 1)f(h_2, \theta) + (k + 1 - |A|)f(h_4, \theta), \\ h_4 &= |A|f(h_2, \theta) + (k - |A|)f(h_4, \theta). \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим отображение $W: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, определенное следующим образом: $W(h) = h'$, если

$$\begin{aligned} h'_1 &= |A|f(h_3, \theta) + (k - |A|)f(h_1, \theta), \\ h'_2 &= (|A| - 1)f(h_3, \theta) + (k + 1 - |A|)f(h_1, \theta), \\ h'_3 &= (|A| - 1)f(h_2, \theta) + (k + 1 - |A|)f(h_4, \theta), \\ h'_4 &= |A|f(h_2, \theta) + (k - |A|)f(h_4, \theta). \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что система (6) эквивалентна уравнению $h = W(h)$. Отображение W имеет инвариантные множества

$$\begin{aligned} I_1 &= \{h \in \mathbb{R}^4: h_1 = h_2 = h_3 = h_4\}, & I_2 &= \{h \in \mathbb{R}^4: h_1 = h_4, h_2 = h_3\}, \\ I_3 &= \{h \in \mathbb{R}^4: h_1 = -h_4, h_2 = -h_3\}. \end{aligned}$$

Пусть $\alpha = (1 - \theta)/(1 + \theta)$.

ТЕОРЕМА 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. Для модели Изинга все H_A -слабо периодические меры Гиббса на I_1, I_2 являются трансляционно-инвариантными.

2. При $|A| = k$ и $\theta > 0$ все H_A -слабо периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными.

3. При $|A| = 1, k = 4$ существует критическое значение $\alpha_{\text{cr}} (\approx 0.152)$ такое, что при $0 < \alpha < \alpha_{\text{cr}}$ существуют пять H_A -слабо периодических мер Гиббса $\mu_0, \mu_1^{\pm}, \mu_2^{\pm}$; при $\alpha = \alpha_{\text{cr}}$ существуют три H_A -слабо периодические меры Гиббса $\mu_0, \mu_1^{\pm}$; при $\alpha > \alpha_{\text{cr}}$ существует единственная H_A -слабо периодическая мера Гиббса μ_0 .

4. При $|A| = 1, k > 5$ и $\theta_- < \theta < \theta_+, \theta_{\pm} = (k - 1 \pm \sqrt{k^2 - 6k + 1})/2k$, на I_3 существуют три H_A -слабо периодические меры Гиббса $\mu^0, \mu^{\pm}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Достаточно показать, что система уравнений (6) имеет только корень вида $h_1 = h_2 = h_3 = h_4$. Для инвариантного множества I_1 доказательство очевидно. Докажем это утверждение для инвариантного множества I_2 .

Пользуясь тем, что

$$f(h, \theta) = \text{arcth}(\theta \text{th } h) = \frac{1}{2} \ln \frac{(1 + \theta)e^{2h} + (1 - \theta)}{(1 - \theta)e^{2h} + (1 + \theta)},$$

и вводя обозначения $z_i = e^{2hi}$, $i = \overline{1, 4}$, вместо (6) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= A_1(z_3 - z_1), \\ z_1 - z_3 &= A_2(z_1 - z_4) + B_2(z_3 - z_4) + C_2(z_3 - z_2), \\ z_1 - z_4 &= A_3(z_1 - z_4) + B_3(z_3 - z_2), \\ z_2 - z_3 &= A_4(z_3 - z_2) + B_4(z_1 - z_4), \\ z_2 - z_4 &= A_5(z_3 - z_2) + B_5(z_1 - z_2) + C_5(z_1 - z_4), \\ z_3 - z_4 &= A_6(z_4 - z_2), \end{aligned} \quad (8)$$

где $A_i = (1 - \alpha^2)\tilde{A}_i(z_1, z_2, z_3, z_4)$, $B_i = (1 - \alpha^2)\tilde{B}_i(z_1, z_2, z_3, z_4)$, $C_i = (1 - \alpha^2) \times \tilde{C}_i(z_1, z_2, z_3, z_4)$ и $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{C}_i$ положительны для всех $i = \overline{1, 6}$.

На инварианте I_2 мы имеем $h_2 = h_3$, откуда при $\alpha < 1$ из $z_1 - z_2 = A_1(z_3 - z_1)$ следует, что $z_1 = z_2$.

В антиферромагнитном случае, т.е. при $\alpha > 1$, получаем что $A_i, B_i, C_i < 0$ для всех $i = \overline{1, 6}$. На инварианте I_2 выполняется равенство $h_2 = h_3$. Из (8) имеем $z_2 - z_1 = -A_1(z_3 - z_1)$, отсюда следует, что $z_1 = z_2$. Следовательно, при любом $\alpha > 0$ мы имеем $z_1 = z_2$, откуда $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$ на I_2 .

2. В случае $|A| = k$ из (6) получим

$$\begin{aligned} h_2 &= (k - 1)f(h_3, \theta) + f(kf(h_3, \theta), \theta), \\ h_3 &= (k - 1)f(h_2, \theta) + f(kf(h_2, \theta), \theta). \end{aligned} \quad (9)$$

Теперь докажем, что система (9) имеет только решения вида $h_2 = h_3$. Рассмотрим случай $h_2 > h_3$, тогда из (9) имеем

$$h_2 - h_3 = (k - 1)(f(h_3, \theta) - f(h_2, \theta)) + f(kf(h_3, \theta), \theta) - f(kf(h_2, \theta), \theta). \quad (10)$$

Легко проверить, что функция f строго возрастает. Следовательно, равенство (10) не может иметь места, так как в левой части этого равенства стоит положительная величина, а в правой части – отрицательная. В случае $h_2 < h_3$ (10) также не выполняется, следовательно, $h_2 = h_3$, что дает трансляционно-инвариантные решения системы (6).

3. Доказательство третьего утверждения теоремы следует из леммы 3, приведенной в п. 3.2. В данном случае необходимо проанализировать решения уравнения

$$h = 3f(h, \theta) - f(4f(h, \theta), \theta),$$

которое получается при сужении оператора W на I_3 .

4. При $|A| = 1$, $k > 5$ из (6) получим

$$h_1 = g(h_1, \theta, k), \quad (11)$$

где $g(x) = g(x, \theta, k) = -f(kf(x, \theta), \theta) + (k - 1)f(x, \theta)$, $x \in \mathbb{R}$. Заметим, что $g(0) = 0$ и g – нечетная ограниченная функция. Из этих свойств следует, что если $g'(0) > 1$,

то уравнение (11) имеет не менее трех решений. Легко проверить, что неравенство $g'(0) > 1$ эквивалентно $\theta_- < \theta < \theta_+$, при этом уравнение (6) имеет три решения

$$(\pm h_1^*, \pm k f(h_1^*, \theta), \mp k f(h_1^*, \theta), \mp h_1^*), \quad (0, 0, 0, 0).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Меры $\mu^\pm$ и $\mu_i^\pm$, $i = 1, 2$, являются H_A -слабо периодическими, и это дает новые меры Гиббса для модели Изинга. Все остальные меры, построенные в теореме, являются трансляционно-инвариантными.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $A \subset N_k$ таково, что $|A| \neq 1$ или $|A| \neq k$, то решение системы уравнений (6) вне инвариантов I_1, I_2 затруднительно. Даже на инварианте I_3 система (6) будет системой с двумя неизвестными, и ее решить нелегко.

3.2. Случай индекса 4. Пусть $H_{\{a_1\}} = \{x \in G_k : w_x(a_1) - \text{четное число}\}$, $G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| - \text{четное число}\}$ и $G_k^{(4)} = H_{\{a_1\}} \cap G_k^{(2)}$ — соответствующий нормальный делитель индекса 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Среди всех нормальных делителей индекса 4 выбранный нами нормальный делитель $G_k^{(4)}$ удобен тем, что в этом случае из системы (4) мы получаем систему уравнений с 8 неизвестными, при этом для произвольного нормального делителя индекса 4 число неизвестных может достигать 16.

Рассмотрим фактор-группу $G_k/G_k^{(4)} = \{H_0, H_1, H_2, H_3\}$, где

$$\begin{aligned} H_0 &= \{x \in G_k : w_x(a_1) - \text{четное число}, \quad |x| - \text{четное число}\}, \\ H_1 &= \{x \in G_k : w_x(a_1) - \text{нечетное число}, \quad |x| - \text{четное число}\}, \\ H_2 &= \{x \in G_k : w_x(a_1) - \text{четное число}, \quad |x| - \text{нечетное число}\}, \\ H_3 &= \{x \in G_k : w_x(a_1) - \text{нечетное число}, \quad |x| - \text{нечетное число}\}. \end{aligned}$$

Тогда в силу (4) $G_k^{(4)}$ -слабо периодическая совокупность h имеет вид

$$h_x = \begin{cases} h_1, & x \in H_3, & x_\downarrow \in H_1, \\ h_2, & x \in H_1, & x_\downarrow \in H_3, \\ h_3, & x \in H_3, & x_\downarrow \in H_0, \\ h_4, & x \in H_0, & x_\downarrow \in H_3, \\ h_5, & x \in H_1, & x_\downarrow \in H_2, \\ h_6, & x \in H_2, & x_\downarrow \in H_1, \\ h_7, & x \in H_2, & x_\downarrow \in H_0, \\ h_8, & x \in H_0, & x_\downarrow \in H_2, \end{cases} \quad (12)$$

где h_i , $i = \overline{1, 8}$, удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}
 h_1 &= (k-1)f(h_2, \theta) + f(h_4, \theta), \\
 h_2 &= (k-1)f(h_1, \theta) + f(h_6, \theta), \\
 h_3 &= kf(h_2, \theta), \\
 h_4 &= kf(h_7, \theta), \\
 h_5 &= kf(h_1, \theta), \\
 h_6 &= kf(h_8, \theta), \\
 h_7 &= (k-1)f(h_8, \theta) + f(h_5, \theta), \\
 h_8 &= (k-1)f(h_3, \theta) + f(h_7, \theta).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Эту систему можно переписать как $h = W(h)$, где отображение $W: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ задается следующими равенствами: $W(h) = h'$, если

$$\begin{aligned}
 h'_1 &= (k-1)f(h_2, \theta) + f(kf(h_7, \theta), \theta), \\
 h'_2 &= (k-1)f(h_1, \theta) + f(kf(h_8, \theta), \theta), \\
 h'_7 &= (k-1)f(h_8, \theta) + f(kf(h_1, \theta), \theta), \\
 h'_8 &= (k-1)f(h_7, \theta) + f(kf(h_2, \theta), \theta).
 \end{aligned} \tag{14}$$

Нетрудно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 1. *Отображение W имеет инвариантные множества*

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \{h \in \mathbb{R}^4: h_1 = h_2 = h_7 = h_8\}, & I_2 &= \{h \in \mathbb{R}^4: h_1 = h_2, h_7 = h_8\}, \\
 I_3 &= \{h \in \mathbb{R}^4: h_1 = -h_2, h_7 = -h_8\}, & I_4 &= \{h \in \mathbb{R}^4: h_1 = h_2 = -h_7 = -h_8\}, \\
 I_5 &= \{h \in \mathbb{R}^4: h_1 = h_7, h_2 = h_8\}, & I_6 &= \{h \in \mathbb{R}^4: h_1 = -h_7, h_2 = -h_8\}, \\
 I_7 &= \{h \in \mathbb{R}^4: h_1 = h_7 = -h_2 = -h_8\}, & I_8 &= \{h \in \mathbb{R}^4: h_1 = h_8, h_2 = h_7\}, \\
 I_9 &= \{h \in \mathbb{R}^4: h_1 = -h_8, h_2 = -h_7\}, & I_{10} &= \{h \in \mathbb{R}^4: h_1 = h_8 = -h_2 = -h_7\}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что сужение оператора W на I_1 дает трансляционно-инвариантные меры, которые были изучены ранее.

Легко проверить, что, сужая оператор W на остальные множества I_i , $i = 2, \dots, 10$, при некоторых дополнительных условиях на переменные, систему уравнений $W(h) = h$ можно привести к уравнениям с одной неизвестной, имеющим один из следующих видов:

$$x = -(k-1)f(x, \theta) + f(kf(x, \theta), \theta), \tag{15}$$

$$x = (k-1)f(x, \theta) - f(kf(x, \theta), \theta). \tag{16}$$

Уравнение (15) сводится к уравнению

$$(u^2 - 1)P_{2k-2}(u) = 0, \tag{17}$$

где $u = (z + \alpha)/(\alpha z + 1)$ и $P_{2k-2}(u)$ – симметрический многочлен степени $2k - 2$. Известно, что, положив $u + 1/u = \xi$, степень уравнения $P_{2k-2}(u) = 0$ можно уменьшить

в два раза, т.е. привести это уравнению к $P_{k-1}(\xi) = 0$, где $P_{k-1}(\xi)$ – вообще говоря, несимметрический многочлен степени $k - 1$. Но при $k \geq 6$ уравнение $P_{k-1}(\xi) = 0$ не решается в радикалах.

Рассмотрим случай $k = 4$. В этом случае уравнение (17) имеет следующий вид:

$$(u^2 - 1)(u^6 - \alpha u^5 + u^4 + (1 - \alpha)u^3 + u^2 - \alpha u + 1) = 0. \quad (18)$$

ЛЕММА 2. При $\alpha > \alpha'_{\text{cr}} = 5/3$ уравнение (18) имеет три решения $u_0 = 1$, $u_1 = u_*$, $u_2 = 1/u_*$; при $0 < \alpha \leq 5/3$ уравнение (18) имеет единственное решение $u_0 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для уравнения (18) $u = 1$ является решением. Предположим, что $u \neq 1$. Положив $\xi = u + 1/u > 2$, получим следующее уравнение:

$$\xi^3 - \alpha\xi^2 - 2\xi + \alpha + 1 = 0.$$

Детальный анализ этого уравнения показывает справедливость леммы.

Аналогично при $k = 4$ из уравнения (16) имеем

$$\alpha^2(u^8 - 1) - \alpha u(u^6 - 1) + u^3(u^2 - 1) = 0. \quad (19)$$

ЛЕММА 3. Существует критическое значение $\alpha_{\text{cr}} (\approx 0.152)$ такое, что

- 1) при $0 < \alpha < \alpha_{\text{cr}}$ уравнение (19) имеет пять решений $u_0 = 1$, $u_1 = u_*^{(1)}$, $u_2 = 1/u_*^{(1)}$, $u_3 = u_*^{(2)}$, $u_4 = 1/u_*^{(2)}$;
- 2) при $\alpha = \alpha_{\text{cr}}$ уравнение (19) имеет три решения $u_0 = 1$, $u_1 = u_*^{(1)}$, $u_2 = 1/u_*^{(1)}$;
- 3) при $\alpha > \alpha_{\text{cr}}$ уравнение (19) имеет единственное решение $u_0 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $\alpha > 0$ значение $u = 1$ является решением уравнения (19). Разделив уравнение (19) на $u^2 - 1$ и вводя обозначение $\xi = u + 1/u$, сводим (19) к уравнению

$$\varphi(\xi) = \alpha^2\xi^3 - \alpha\xi^2 - 2\alpha^2\xi + \alpha + 1 = 0.$$

Утверждения леммы следуют из легко проверяемых свойств функции $\varphi(\xi)$.

Решая уравнение $\varphi'(\xi) = 0$, получим $\xi = \xi_* = (1 + \sqrt{1 + 6\alpha^2})/3\alpha$. Значения α_{cr} находятся из уравнения $\varphi(\xi_*) = 0$, т.е. из уравнения

$$f(\alpha) = 9\alpha^2 + 27\alpha - 2 - 2(\sqrt{6\alpha^2 + 1})^3 = 0, \quad 0 < \alpha < \frac{2}{5}.$$

Заметим, что f возрастает в интервале $(0, 2/5)$. Так как $f(0) = -4$, $f(2/5) > 0$, из монотонности f следуют существование и единственность значения α_{cr} такого, что $f(\alpha_{\text{cr}}) = 0$. Расчеты на компьютере показывают, что $\alpha_{\text{cr}} \approx 0.152$.

Объединяя леммы 2 и 3, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. При $k = 4$ существуют критические значения $\alpha_{\text{cr}} \approx 0.152$ и $\alpha'_{\text{cr}} = 5/3$ такие, что

1) при $0 < \alpha < \alpha_{\text{cr}}$ существуют пять слабо периодических мер Гиббса $\mu_0, \tilde{\mu}_1^{\pm}, \tilde{\mu}_2^{\pm}$, которые соответствуют таким решениям системы уравнений (13):

$$h_x = 0, \quad \pm h_x^{(i)} = \begin{cases} \pm h_*^{(i)}, & x \in H_3, \quad x_{\downarrow} \in H_1, \\ \pm h_*^{(i)}, & x \in H_1, \quad x_{\downarrow} \in H_3, \\ \pm 4f(h_*^{(i)}, \theta), & x \in H_3, \quad x_{\downarrow} \in H_0, \\ \mp 4f(h_*^{(i)}, \theta), & x \in H_0, \quad x_{\downarrow} \in H_3, \\ \pm 4f(h_*^{(i)}, \theta), & x \in H_1, \quad x_{\downarrow} \in H_2, \\ \mp 4f(h_*^{(i)}, \theta), & x \in H_2, \quad x_{\downarrow} \in H_1, \\ \mp h_*^{(i)}, & x \in H_2, \quad x_{\downarrow} \in H_0, \\ \mp h_*^{(i)}, & x \in H_0, \quad x_{\downarrow} \in H_2, \end{cases}$$

$$h_*^{(i)} = \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha - u_*^{(i)}}{1 - \alpha u_*^{(i)}}, \quad i = 1, 2;$$

2) при $\alpha = \alpha_{\text{cr}}$ существуют три слабо периодических меры Гиббса $\mu_0, \tilde{\mu}_1^{\pm}$;

3) при $\alpha_{\text{cr}} < \alpha \leq \alpha'_{\text{cr}}$ существует одна мера Гиббса μ_0 , которая соответствует $h_x = 0$;

4) при $\alpha > \alpha'_{\text{cr}}$ существуют пять слабо периодических мер Гиббса $\mu_0, \mu_{*,1}^{\pm}, \mu_{*,2}^{\pm}$, которые соответствуют решениям вида

$$h_x = 0, \quad \pm \bar{h}_x^{(1)} = \begin{cases} \pm \bar{h}_*^{(1)}, & x \in H_3, \quad x_{\downarrow} \in H_1, \\ \mp \bar{h}_*^{(1)}, & x \in H_1, \quad x_{\downarrow} \in H_3, \\ \mp 4f(\bar{h}_*^{(1)}, \theta), & x \in H_3, \quad x_{\downarrow} \in H_0, \\ \pm 4f(\bar{h}_*^{(1)}, \theta), & x \in H_0, \quad x_{\downarrow} \in H_3, \\ \pm 4f(\bar{h}_*^{(1)}, \theta), & x \in H_1, \quad x_{\downarrow} \in H_2, \\ \mp 4f(\bar{h}_*^{(1)}, \theta), & x \in H_2, \quad x_{\downarrow} \in H_1, \\ \pm \bar{h}_*^{(1)}, & x \in H_2, \quad x_{\downarrow} \in H_0, \\ \mp \bar{h}_*^{(1)}, & x \in H_0, \quad x_{\downarrow} \in H_2, \end{cases}$$

на инварианте I_7 и решениям вида

$$\pm \bar{h}_x^{(1)} = \begin{cases} \pm \bar{h}_*^{(1)}, & x \in H_3, \quad x_{\downarrow} \in H_1, \\ \mp \bar{h}_*^{(1)}, & x \in H_1, \quad x_{\downarrow} \in H_3, \\ \mp 4f(\bar{h}_*^{(1)}, \theta), & x \in H_3, \quad x_{\downarrow} \in H_0, \\ \mp 4f(\bar{h}_*^{(1)}, \theta), & x \in H_0, \quad x_{\downarrow} \in H_3, \\ \pm 4f(\bar{h}_*^{(1)}, \theta), & x \in H_1, \quad x_{\downarrow} \in H_2, \\ \pm 4f(\bar{h}_*^{(1)}, \theta), & x \in H_2, \quad x_{\downarrow} \in H_1, \\ \mp \bar{h}_*^{(1)}, & x \in H_2, \quad x_{\downarrow} \in H_0, \\ \pm \bar{h}_*^{(1)}, & x \in H_0, \quad x_{\downarrow} \in H_2 \end{cases}$$

на инварианте I_{10} .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Компьютерный анализ показывает, что уравнение $g(x, \theta, k) = -f(kf(x, \theta); \theta) + (k-1)f(x, \theta) = x$ имеет единственное решение $x = 0$ при $k = 1, 2, 3$; если $k \geq 4$, то существуют значения параметра α , при которых это уравнение имеет пять решений. Точнее, компьютерный анализ показывает, что пункт 2 теоремы 1 и результаты теоремы 2 верны для всех $k \geq 4$, т.е. независимо от значения $k \geq 4$ существуют не более пяти H_A -слабо периодических мер Гиббса.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Меры $\tilde{\mu}_i^\mp$, $i = 1, 2$, совпадают с $H_{\{a_1\}}$ -слабо периодическими мерами теоремы 1 в случае $A = \{a_1\}$. Меры $\mu_{*,i}^\mp$, $i = 1, 2$, являются $G_k^{(4)}$ -слабо периодическими, но не совпадают с H_A -слабо периодическими мерами, построенными в теореме 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Новые меры Гиббса, описанные в теоремах 1 и 2, дают возможность описать континуальное множество непериодических мер Гиббса, отличных от ранее известных.

4. ОБСУЖДЕНИЕ. ОТКРЫТЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Результаты настоящей работы открывают новый факт для модели Изинга: известно, что для моделей с конечным радиусом взаимодействия существуют не более трех периодических (нетрансляционно-инвариантных) мер Гиббса [4], [5], [7], [10]; в нашем случае число слабо периодических мер оказалось равным пяти.

Функции $h_x^{(i)}$, определенные в п. 1 теоремы 2, существенно отличаются от функций $\bar{h}_x^{(1)}$, определенных в п. 4 этой теоремы. Слабая (H -слабая) периодичность функции h_x означает, что значение функции h_x зависит только от класса принадлежности x и от класса принадлежности $x_\downarrow$. Такая зависимость впервые была показана в работе [3], но в этой работе не описаны слабо периодические решения.

Сформулируем вопросы, решение которых оказалось достаточно сложным, и требуется их рассмотрение в дальнейшем.

1. Существуют ли другие инвариантные множества операторов, заданных равенствами (7) и (14)?
2. Существуют ли неподвижные точки вне инвариантных множеств?
3. Как доказать замечание 4 после теоремы 2?
4. Как описать слабо периодические меры Гиббса для нормальных делителей индекса больше 4?
5. Как описать такие меры для других моделей, например для модели Поттса, SOS-модели и т.п.?

Благодарности. У.А. Розиков благодарит Institut des Hautes Études Scientifiques (Bures-sur-Yvette, France) за финансовую поддержку пребывания в октябре–декабре 2006 г., а также School of Mathematical Sciences (Lahore, Pakistan) за финансовую поддержку пребывания в феврале–мае 2007 г. Авторы благодарят рецензента, замечания которого улучшили стиль работы.

Список литературы

- [1] П. М. Блехер, Н. Н. Ганиходжаев, *ТВП*, **35**:2 (1990), 220–230.
- [2] F. Spitzer, *Ann. Probab.*, **3**:3 (1975), 387–398.
- [3] S. Zachary, *Ann. Probab.*, **11**:4 (1983), 894–903.
- [4] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков, *ТМФ*, **111**:1 (1997), 109–117.
- [5] У. А. Розиков, *ТМФ*, **112**:1 (1997), 170–175.
- [6] У. А. Розиков, *ТМФ*, **118**:1 (1999), 95–104.
- [7] U. A. Rozikov, Yu. M. Suhov, *Inf. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **9**:3 (2006), 471–488.
- [8] J. Martin, U. A. Rozikov, Yu. M. Suhov, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12**:3 (2005), 432–448.
- [9] У. А. Розиков, *Сиб. матем. журн.*, **39**:2 (1998), 427–435.
- [10] F. M. Mukhamedov, U. A. Rozikov, *J. Statist. Phys.*, **114**:3–4 (2004), 825–848.
- [11] У. А. Розиков, Ш. А. Шоюсупов, *ТМФ*, **149**:1 (2006), 18–31.
- [12] Э. П. Норматов, У. А. Розиков, *Матем. заметки*, **79**:3 (2006), 434–444.

Поступила в редакцию 26.07.2007,
после доработки 23.10.2007