Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Э. Адлер, О дискретизациях уравнения Ландау–Лифшица, *ТМФ*, 2000, том 124, номер 1, 48–61

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf625>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:45:46

О ДИСКРЕТИЗАЦИЯХ УРАВНЕНИЯ ЛАНДАУ–ЛИФШИЦА

Установлена связь между цепочкой Складина и преобразованиями Беклунда для уравнения Ландау–Лифшица. Показано, что стационарные решения цепочки определяют интегрируемое отображение, являющееся разновидностью классической спиновой цепочки Гейзенберга. Найдены некоторые многополевые обобщения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Целью настоящей работы является установление связи между двумя известными интегрируемыми дискретизациями уравнения Ландау–Лифшица

$$s_t = [s, s_{xx} + Js], \quad s \in \mathbb{R}^3, \quad \langle s, s \rangle = 1, \quad J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3). \quad (1)$$

Первая из них, введенная Складиним [1], характеризуется тем, что фундаментальные скобки Пуассона для нее и для уравнения (1) задаются одной и той же r -матрицей, а матрица L_n из представления нулевой кривизны аппроксимирует в пределе $x = \varepsilon n$, $\varepsilon \rightarrow 0$ матрицу монодромии для уравнения (1). Эти свойства можно принять в качестве определения “правильного” дискретного аналога данной непрерывной модели (подробности см. в [2]). Вторая дискретизация, введенная Шабатом и Ямиловым [3, 4], представляет собой цепочку автопреобразований Беклунда для системы типа нелинейного уравнения Шредингера, связанной с уравнением (1) заменой

$$s = s(u, v) = \frac{1}{u - v} (1 - uv, i + iuv, u + v) \quad (2)$$

(совпадающей при $v = -1/\bar{u}$ со стереографической проекцией). При этом дискретная переменная n играет роль счетчика итераций преобразования Беклунда и не связана с пространственной переменной x . Преимуществом этого подхода является то, что он позволяет строить точные, а не приближенные решения уравнения (1), а недостаток состоит в несогласованности цепочки с вещественной структурой: приходится рассматривать комплексификацию сферы $S^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$.

*Институт математики Уфимского научного центра РАН, Уфа, Россия. E-mail: adler@imat.rb.ru

Оказывается, что, несмотря на различное происхождение, обе модели тесно связаны. Мы покажем, что цепочка, получающаяся из цепочки Шабата–Ямилова заменой n на $-n$, является ее симметрией, а сумма этих двух цепочек точно эквивалентна цепочке Складина. Иными словами, обе модели принадлежат одной и той же иерархии интегрируемых уравнений. В качестве дополнительного результата мы получим интегрируемое гиперболическое уравнение на сфере, возможно новое. В разделе 6 рассматривается полностью дискретизованное уравнение Ландау–Лифшица.

Доказательства большинства утверждений получаются прямыми вычислениями и потому опускаются. При вычислениях полезны следующие элементарные свойства отображения (2):

$$\begin{aligned} s(u, v) &= -s(v, u), \quad 1 + \langle s(u, v), s(p, q) \rangle = 2 \frac{(u - q)(p - v)}{(u - v)(p - q)}, \\ \frac{i[s(u, v), s(p, q)] + s(u, v) + s(p, q)}{1 + \langle s(u, v), s(p, q) \rangle} &= s(p, v), \\ s_{uu} &= -\frac{2s_u}{u - v}, \quad s_{uv} = -\frac{2s}{(u - v)^2}, \quad s_{vv} = \frac{2s_v}{u - v}, \\ [s, s_u] &= -is_u, \quad [s, s_v] = is_v, \quad [s_u, s_v] = -2i(u - v)^{-2}s, \\ \langle s_u, s_u \rangle &= \langle s_v, s_v \rangle = 0, \quad \langle s_u, s_v \rangle = 2(u - v)^{-2}. \end{aligned} \tag{3}$$

2. ГАМИЛЬТОНОВЫ ЦЕПОЧКИ

Цепочка Складина определяется скобками Пуассона

$$\{S_n^a, S_n^0\} = (J_b - J_c)S_n^b S_n^c, \quad \{S_n^a, S_n^b\} = -S_n^0 S_n^c \tag{4}$$

(здесь и далее мы приводим только ненулевые скобки; $n \in \mathbb{Z}$, индексы a, b, c суть циклические перестановки 1, 2, 3) и гамильтонианом

$$H = \sum_n \log \left(S_n^0 S_{n+1}^0 + \sum_{a=1}^3 \left(\frac{c_1}{c_0} - J_a \right) S_n^a S_{n+1}^a \right), \tag{5}$$

где c_0, c_1 – значения функций Казимира (одни и те же во всех узлах решетки)

$$c_0 = \sum_{a=1}^3 (S_n^a)^2, \quad c_1 = (S_n^0)^2 + \sum_{a=1}^3 J_a (S_n^a)^2. \tag{6}$$

Цепочка Шабата–Ямилова имеет вид

$$u_{n,x+} = \frac{2h_n}{u_{n+1} - v_n} + h_{n,v_n}, \quad v_{n,x+} = \frac{2h_n}{u_n - v_{n-1}} - h_{n,u_n}, \tag{7}$$

где $h_n = h(u_n, v_n)$ есть симметрический полином степени не выше второй по каждой переменной: $h(u, v) = h(v, u)$, $h_{uuu} = 0$. Наряду с этой цепочкой мы будем рассматривать также цепочку, получающуюся из нее заменой n на $-n$:

$$u_{n,x_-} = \frac{2h_n}{u_{n-1} - v_n} + h_{n,v_n}, \quad v_{n,x_-} = \frac{2h_n}{u_n - v_{n+1}} - h_{n,u_n}. \quad (8)$$

Гамильтонова структура для уравнений (7), (8) задается скобкой Пуассона

$$\{u_n, v_n\} = 2h(u_n, v_n) \quad (9)$$

и гамильтонианами H_+ и H_- , соответственно, где

$$H_{\pm} = \sum_n \left(\frac{1}{2} \log h(u_n, v_n) - \log(u_{n\pm 1} - v_n) \right).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Гамильтонианы H_+ и H_- находятся в инволюции.*

Следующее утверждение устанавливает искомую замену между цепочкой Складина и потоком $\partial_{x_+} + \partial_{x_-}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Пусть $s_n = s(u_n, v_n)$,*

$$h(u, v) = \frac{i}{4}(u - v)^2 \langle s(u, v), Ks(u, v) \rangle, \quad (10)$$

где $K = \text{diag}(K_1, K_2, K_3)$, а матрица J задается формулой

$$J = CI - \det K \cdot K^{-1} \quad (11)$$

(т.е. $J_a = C - K_b K_c$). Тогда переменные

$$S_n^0 = \rho \sqrt{\det K} \langle s_n, Ks_n \rangle^{-1/2}, \quad S_n = -\rho \langle s_n, Ks_n \rangle^{-1/2} K^{1/2} s_n \quad (12)$$

удовлетворяют скобкам (4), значения функций Казимира (6) $c_0 = \rho^2$, $c_1 = C\rho^2$, а гамильтониан (5) $H = -(H_+ + H_-) + \text{const}$.

Поясним, что условие (10) не является ограничением, так как произвольный симметрический многочлен четвертой степени можно привести к такому виду дробно-линейной заменой u и v (отвечающей ортогональному преобразованию, диагонализующему матрицы J и K).

Приведем также гамильтонову структуру непосредственно в терминах спиновых переменных s_n :

$$\{s_n^a, s_n^b\} = \langle s_n, Ks_n \rangle s_n^c, \quad H = - \sum_n \log \frac{\langle s_n, Ks_n \rangle}{1 + \langle s_n, s_{n+1} \rangle}.$$

Цепочки, отвечающие $H_{\pm}$, можно записать компактно:

$$2is_{n,x_{\pm}} = \langle s_n, K s_n \rangle (s(u_{n\pm 1}, v_n) - s(u_n, v_{n\mp 1})) - 2i[s_n, K s_n],$$

если воспользоваться формулой

$$s(u_{n\pm 1}, v_n) = \frac{i[s_n, s_{n\pm 1}] + s_n + s_{n\pm 1}}{1 + \langle s_n, s_{n\pm 1} \rangle}, \quad (13)$$

являющейся следствием (3). Очевидно, порознь эти цепочки не согласованы с вещественностью s . Однако линейные комбинации $\partial_{x_+} + \partial_{x_-}$ и $i(\partial_{x_+} - \partial_{x_-})$ уже обладают этим свойством, и мы получаем цепочку

$$\begin{aligned} s_{n,t} = & a \langle s_n, K s_n \rangle \left(\frac{[s_n, s_{n+1}]}{1 + \langle s_n, s_{n+1} \rangle} + \frac{[s_n, s_{n-1}]}{1 + \langle s_n, s_{n-1} \rangle} \right) - 2a[s_n, K s_n] + \\ & + b \langle s_n, K s_n \rangle \left(\frac{s_n + s_{n+1}}{1 + \langle s_n, s_{n+1} \rangle} - \frac{s_n + s_{n-1}}{1 + \langle s_n, s_{n-1} \rangle} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где a и b – произвольные вещественные постоянные. Случай $b = 0$ отвечает модели Склянина. В силу утверждения 1 цепочка, отвечающая случаю $a = 0$, является ее симметрией. Гамильтониан этой цепочки

$$\tilde{H} = H_+ - H_- = \sum_n (\log(u_n - v_{n+1}) - \log(u_{n+1} - v_n))$$

может быть переписан в виде

$$\tilde{H} = 2 \sum_n \arg \left(1 + \frac{\langle p, i[s_n, s_{n+1}] + s_n + s_{n+1} \rangle}{1 + \langle s_n, s_{n+1} \rangle} \right),$$

где p – произвольный постоянный вектор единичной длины.

При $K = I$, $\rho = -1$ переменные S и s совпадают. При этом мы приходим к цепочке Гейзенберга

$$s_{n,t} = a \left(\frac{[s_n, s_{n+1}]}{1 + \langle s_n, s_{n+1} \rangle} + \frac{[s_n, s_{n-1}]}{1 + \langle s_n, s_{n-1} \rangle} \right) + b \left(\frac{s_n + s_{n+1}}{1 + \langle s_n, s_{n+1} \rangle} - \frac{s_n + s_{n-1}}{1 + \langle s_n, s_{n-1} \rangle} \right). \quad (15)$$

Насколько известно автору, для любых a и b она была введена Рагниско и Сантини [5]. Отметим также работы [6, 7], где рассматриваются приложения цепочки (15) к дискретной геометрии. В этих работах указывается также, что потоки, отвечающие различным значениям параметров a , b , коммутируют.

3. УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Уравнение Ландау–Лифшица (1) получается из уравнений

$$S_{n,t}^a = \frac{1}{\varepsilon} \{H, S_n^a\}$$

в непрерывном пределе $S_n^0 \rightarrow 1$, $S_n^a \rightarrow (\varepsilon/2)s_n^a(x)$, $x = i\varepsilon n$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Связь с цепочкой (7) носит другой характер, а именно эта цепочка задает последовательность автопреобразований Беклунда для системы эволюционных уравнений на переменные $u = u_{n+1}$, $v = v_n$:

$$\begin{aligned} iu_t &= u_{xx} - 2\frac{u_x^2 - r(u)}{u - v} - \frac{1}{2}r'(u), \\ -iv_t &= v_{xx} + 2\frac{v_x^2 - r(v)}{u - v} - \frac{1}{2}r'(v), \end{aligned} \quad (16)$$

где $x = x_+$, $r(u) = h_v^2 - 2hh_{vv}$. Это означает, что если в данной системе избавиться от производных по x , заменив их на сдвиги согласно (7), то полученная цепочка будет коммутировать с (7) (общую теорию см. в [4], где содержится, в частности, и этот пример). Отметим, что преобразование $(u_{n+1}, v_n) \rightarrow (u_{n+2}, v_{n+1})$ сводится к решению уравнения Риккати для переменной v_{n+1} . При h и J , заданных формулами (10), (11), данная система связана с уравнением (1) заменой $s = s(u, v)$, причем

$$r(u) = \frac{1}{4}(u - v)^4 \langle s_v, Js_v \rangle. \quad (17)$$

Подчеркнем, что векторы s в уравнении (1) и s_n в цепочке (14) различны. Замена (13), связывающая эти векторы, обратима, поэтому цепочку (14) можно переписать непосредственно в терминах векторов $s(u_{n+1}, v_n)$. Для системы (16) эта замена эквивалентна дифференциальной подстановке, связывающей ее с системой [4]

$$\begin{aligned} iu_t &= u_{xx} - \frac{1}{h}(u_x^2 - r(u))(v_x + h_u) - \frac{1}{2}r'(u), \\ -iv_t &= v_{xx} + \frac{1}{h}(v_x^2 - r(v))(u_x - h_v) - \frac{1}{2}r'(v). \end{aligned} \quad (18)$$

Действительно, если считать, что здесь $u = u_n$, $v = v_n$, то легко видеть, что системы (16) и (18) эквивалентны в силу (7). Систему (18) можно также записать в векторной форме, к сожалению, значительно более громоздкой, чем уравнение (1):

$$\begin{aligned} s_t &= [s, s_{xx} - Js] - \left(\frac{\langle Ks, Ks \rangle}{\langle s, Ks \rangle} - \text{tr } K \right) [s, Ks] + \\ &+ \frac{1}{\langle s, Ks \rangle} (\langle s_x, s_x \rangle - \langle s, Js \rangle + \text{tr } J) s_x - \\ &- \frac{1}{\langle s, Ks \rangle} (2\langle s, Ks_x \rangle [s, s_x] - \langle s_x, s_x \rangle [s, Ks]) - \\ &- \frac{2}{\langle s, Ks \rangle \langle s_x, s_x \rangle} (\langle s_x, Js_x \rangle s_x + \langle [s, s_x], Js_x \rangle [s, s_x]). \end{aligned} \quad (19)$$

Насколько известно автору, это уравнение приводилось ранее в литературе только в изотропном случае [8]:

$$s_t = [s, s_{xx}] + \langle s_x, s_x \rangle s_x.$$

Итак, уравнение Ландау–Лишшица (1) и его модификация (19) получаются при исключении сдвигов из высшей симметрии цепочки (7). Использование симметрии цепочки (8) приводит к гиперболическому уравнению. Общее утверждение заключается в том, что если имеется пара совместных цепочек вида

$$u_{n,x\pm} = f^\pm(u_n, v_n, u_{n\pm 1}), \quad v_{n,x\pm} = g^\pm(u_n, v_n, v_{n\mp 1})$$

и выполнено условие невырожденности $f_{u_{n\pm 1}}^\pm g_{v_{n\mp 1}}^\pm \neq 0$, то при любом n переменные $u = u_n$, $v = v_n$ удовлетворяют системе вида

$$u_{x\pm x\mp} = F(u_{x\pm}, u_{x\mp}, u, v), \quad v_{x\pm x\mp} = G(v_{x\pm}, v_{x\mp}, v, u).$$

При этом в отличие от эволюционного случая преобразование Беклунда $(u_n, v_n) \rightarrow (u_{n\pm 1}, v_{n\pm 1})$ задается явными формулами. В работе [4] данная схема была проиллюстрирована на примере цепочки Абловица–Ладика, что приводит к уравнению Полмейера–Лунда–Редже. В нашем случае имеем следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *В силу цепочек (7), (8) переменные $u = u_n$, $v = v_n$ удовлетворяют системе $(x = x_+, y = x_-)$*

$$\begin{aligned} u_{xy} &= \frac{1}{h} (h_u u_x u_y + g(u_x + u_y) + g_v h - g h_v), \\ v_{xy} &= \frac{1}{h} (h_v v_x v_y - g(v_x + v_y) + g_u h - g h_u), \end{aligned} \tag{20}$$

где $g = h h_{uv} - h_u h_v$.

Заметим, что система (20) лагранжева,

$$L = \iint \frac{1}{h} (u_x v_y + h_u u_x - h_v v_y + g) dx dy.$$

Функция g , как и h , есть симметрический многочлен степени не выше четвертой: $g = g(u, v) = g(v, u)$, $g_{uuu} = 0$, причем $g g_{uv} - g_u g_v = \text{const} \cdot h$. В спиновых переменных система (20) имеет вид

$$\begin{aligned} s_{xy} &= p[s, s_x + s_y] + \frac{\langle s, K s \rangle}{2 \langle s, [s_x, s_y] \rangle} (p_y[s, s_x] - p_x[s, s_y]) + \\ &+ \frac{\langle s_x, K s \rangle \langle s_y, s_y \rangle [s, s_x] - \langle s_y, K s \rangle \langle s_x, s_x \rangle [s, s_y]}{\langle s, K s \rangle \langle s, [s_x, s_y] \rangle} - \langle s_x, s_y \rangle s, \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$p = \frac{ig}{h} = \frac{\langle Ks, Ks \rangle}{\langle s, Ks \rangle} - \frac{1}{2} \text{tr } J.$$

Здесь, как и раньше, предполагается, что h и J задаются формулами (10), (11).

В изотропном случае $K = I$ уравнения упрощаются:

$$\begin{aligned} u_{xy} &= \frac{2u_x u_y}{u - v} - u_x - u_y, & v_{xy} &= \frac{2v_x v_y}{v - u} + v_x + v_y, \\ s_{xy} &= [s, s_x + s_y] - \langle s_x, s_y \rangle s. \end{aligned} \quad (22)$$

4. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

Представления нулевой кривизны для уравнения Ландау–Лифшица и модели Складина хорошо известны (см., например, [2]), поэтому мы ограничимся тем, что приведем их для цепочек (7), (8) и системы (20). Заметим, что установленная связь с преобразованиями Беклунда позволяет строить для дискретных уравнений представления нулевой кривизны с той же матрицей U (конечно, зависящей от своих переменных в каждом узле решетки), что и для непрерывных:

$$L_{n,x\pm} = U_{n+1}^{\pm} L_n - L_n U_n^{\pm}, \quad U_{x-}^+ - U_{x+}^- = U^- U^+ - U^+ U^-. \quad (23)$$

Это и объясняет совпадение соответствующих r -матриц. Чтобы получить матрицы $U^{\pm}$, входящие во второе уравнение (23), следует отождествить u_n, v_n с u, v и выразить “лишние” переменные v_{n-1}, u_{n-1} через производные $v_{n,x+}, u_{n,x-}$ в силу (7), (8).

Матрицы L_n и $U_n^{\pm}$ имеют вид (напомним, что векторы $s(u_{n\pm 1}, v_n)$ можно выразить через $s_{n\pm 1}, s_n$ согласно (13))

$$\begin{aligned} L_n &= \langle K s_n, s_n \rangle^{-\frac{1}{2}} (1 + i M s_n), \\ U_n^+ &= M^+ s(u_n, v_{n-1}), \quad U_n^- = M^- s(v_n, u_{n-1}). \end{aligned}$$

Здесь мы пользуемся известным изоморфизмом $gl(2, \mathbb{C})$ и алгебры кватернионов над полем $\mathbb{C}$. Напомним, что умножение в этой алгебре задается формулой

$$(\alpha + a)(\beta + b) = \alpha\beta - \langle a, b \rangle + \alpha b + \beta a + [a, b],$$

где α, β обозначают скалярные, а a, b — векторные части кватернионов.

Оператор M удовлетворяет соотношению

$$M^2 = 1 - \frac{2}{\lambda} K, \quad (24)$$

а операторы $M^{\pm}$ задаются формулами $4M^{\pm} = \lambda(M \pm \det M \cdot M^{-1})$, или покомпонентно

$$M_a^2 = 1 - \frac{2}{\lambda} K_a, \quad 4M_a^{\pm} = \lambda(M_a \pm M_b M_c).$$

Эллиптическая кривая

$$\frac{1}{K_1}(M_1^2 - 1) = \frac{1}{K_2}(M_2^2 - 1) = \frac{1}{K_3}(M_3^2 - 1)$$

может быть параметризована эллиптическими функциями Якоби:

$$\begin{aligned} M_1 &= \sqrt{\frac{K_2 - K_1}{K_2}} \operatorname{sn}(z, k), & M_2 &= \sqrt{\frac{K_1 - K_2}{K_1}} \operatorname{cn}(z, k), \\ M_3 &= \sqrt{\frac{K_1 - K_3}{K_1}} \operatorname{dn}(z, k), & k &= \sqrt{\frac{(K_1 - K_2)K_3}{K_2(K_1 - K_3)}} = \sqrt{\frac{J_1 - J_2}{J_1 - J_3}}. \end{aligned}$$

Отметим, что компоненты операторов $M^\pm$ лежат на эллиптической кривой

$$4(M_a^\pm)^2 - 4(M_b^\pm)^2 + J_a - J_b = 0$$

(ср. с [2], где приводится другая ее параметризация).

5. СТАЦИОНАРНАЯ ЦЕПОЧКА

В работах [9, 10] была установлена интегрируемость так называемой стационарной цепочки Гейзенберга

$$s_{n+1} + s_{n-1} = 2 \frac{\langle s_{n-1}, K s_n \rangle}{\langle K s_n, K s_n \rangle} K s_n. \quad (25)$$

Это уравнение определяет пуассоново отображение $S^2 \times S^2 \rightarrow S^2 \times S^2$, допускающее два первых интеграла, что позволяет применить дискретную теорему Лиувилля [11].

Рассмотрим стационарную цепочку (14)

$$\frac{[s_n, s_{n+1}] + b(s_n + s_{n+1})}{1 + \langle s_n, s_{n+1} \rangle} + \frac{[s_n, s_{n-1}] - b(s_n + s_{n-1})}{1 + \langle s_n, s_{n-1} \rangle} = 2 \frac{[s_n, K s_n]}{\langle s_n, K s_n \rangle} \quad (26)$$

(случай $a = 0$ тривиален, поэтому без потери общности можно положить $a = 1$) и покажем, что она обладает аналогичными свойствами. Прежде всего отметим, что в непрерывном пределе $s_n = s(\varepsilon n)$, $K = 1 - (\varepsilon^2/2)J$, $b = \varepsilon\beta$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ уравнение (26) переходит в уравнение

$$s'' + 2Js = \lambda s + 2\beta[s, s'], \quad \lambda = 2\langle s, Js \rangle - \langle s', s' \rangle,$$

где коэффициент λ определяется из условия нормировки $|s| = 1$. При $\beta = 0$ это есть известная задача Неймана о движении точки на сфере под действием линейных сил, которая является непрерывным пределом также и для цепочки (25) [9, 10]. Добавочный член $[s, s']$ отвечает движению заряженной частицы в поле магнитного монополя Дирака (см. [12], где устанавливается также связь со случаем Клебша движения твердого тела в идеальной жидкости).

Если заменить правую часть в (26) на $[s_n, p]$, где p – постоянный вектор, то мы придем к дискретизации волчка Лагранжа, предложенной в работах [6, 7] и также являющейся интегрируемым отображением.

Удобно перейти, вслед за упомянутыми работами, от фазового пространства $S^2 \times S^2$ к кокасательному расслоению сферы T^*S^2 с координатами m_n, s_n , где

$$m_n = \frac{[s_{n-1}, s_n] + b(s_{n-1} + s_n)}{1 + \langle s_{n-1}, s_n \rangle}.$$

В новых переменных цепочка (26) принимает вид

$$m_{n+1} = m_n + 2 \frac{[s_n, K s_n]}{\langle s_n, K s_n \rangle}, \quad s_{n+1} = s_n + [m_{n+1}, s_n + s_{n+1}],$$

причем $b = \langle m_n, s_n \rangle$ постоянна в силу этих уравнений. Данную систему можно разрешить относительно s_{n+1} и получить явное отображение $\Phi: T^*S^2 \rightarrow T^*S^2$:

$$m_1 = m + 2 \frac{[s, K s]}{\langle s, K s \rangle}, \quad s_1 = s + \frac{2[m_1, [m_1, s] + s]}{1 + |m_1|^2}.$$

Переменные m, s обладают тем преимуществом, что первые интегралы в них являются полиномиальными:

$$\begin{aligned} I_1 &= \langle K s, s \rangle (1 - \langle m, m \rangle) + 2 \langle s, m \rangle \langle K s, m \rangle + 2 \langle K s, [s, m] \rangle, \\ I_2 &= \langle K^{-1}([s, m] + s), [s, m] + s \rangle. \end{aligned}$$

В переменных s_n, s_{n+1} интеграл I_1 имеет вид

$$I_1 = \text{const} \frac{\langle K s_n, s_{n+1} \rangle}{1 + \langle s_n, s_{n+1} \rangle},$$

выражение для I_2 более громоздко.

Интегралы I_1, I_2 могут быть найдены при помощи представления нулевой кривизны

$$U_{n+1}(1 + i M s_n) = (1 + i M s_n)U_n,$$

где матрица $U_n = i M m_n + \det M \cdot M^{-1}([s_n, m_n] + s_n)$ совпадает, с точностью до скалярного множителя, с линейной комбинацией $(1 + ib)U_n^+ + (1 - ib)U_n^-$ матриц, введенных в разделе 4. Очевидно, $\text{tr} U_n^2$ (или $\langle U_n, U_n \rangle$ на языке кватернионов) является производящей функцией для первых интегралов, и несложное вычисление (с учетом формулы (24)) приводит к искомым выражениям.

Рассмотрим скобку Ли–Пуассона для алгебры Ли движений трехмерного пространства

$$\{m^i, m^j\} = \varepsilon_{ijk} m^k, \quad \{s^i, m^j\} = \varepsilon_{ijk} s^k. \quad (27)$$

Эта скобка невырождена на орбите $\langle s, s \rangle = 1, \langle s, m \rangle = b$, которая, очевидно, сохраняется при отображении Φ .

Следующее утверждение показывает, что уравнение (26) интегрируемо в смысле дискретной теоремы Лиувилля [11].

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Отображение Φ сохраняет скобку (27), первые интегралы I_1, I_2 находятся в инволюции относительно этой скобки.*

6. ДВАЖДЫ ДИСКРЕТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В отличие от уравнений типа уравнения Кортевега-де Фриза, уравнения типа нелинейного уравнения Шредингера допускают по два существенно различных преобразования Беклунда. Одно из них, более сложное, сводится к решению некоторого уравнения Риккати, и его итерации порождают цепочку типа релятивистской цепочки Тоды. Второе преобразование является явным (для него иногда используют также термин преобразование Шлезингера) и порождает цепочку типа цепочки Тоды. Данные преобразования Беклунда коммутируют, что позволяет включить обе цепочки в одну решетку $\mathbb{Z}^2$, на которой принцип нелинейной суперпозиции порождает интегрируемое чисто разностное уравнение. Примеры, подпадающие под эту схему, можно найти, например, в работах [13, 14].

В качестве основных объектов можно рассмотреть совместные системы уравнений вида

$$q_{m,n,x} = f(q_{m,n}, q_{m-1,n}, q_{m,n-1}), \quad q_{m,n,x} = g(q_{m,n}, q_{m,n+1}, q_{m+1,n}). \quad (28)$$

Данная система переопределена: исключение производных приводит к разностному уравнению

$$f(q_{m,n}, q_{m-1,n}, q_{m,n-1}) = g(q_{m,n}, q_{m,n+1}, q_{m+1,n}),$$

а условие совместности означает, что $D_x(f - g)|_{f=g} = 0$. Это условие является достаточно жестким и (с некоторыми оговорками) эквивалентно интегрируемости. Задача перечисления всех совместных систем в принципе разрешима и приводит к конечному списку уравнений. Однако здесь мы ограничимся лишь примером, связанным с уравнением Ландау–Лифшица (ср. с [14]).

Чтобы получить систему вида (28), воспользуемся следующим утверждением, в котором приводится лагранжева запись гамильтоновых цепочек (7), (8).

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *В силу цепочек (7), (8) переменные u, v удовлетворяют цепочкам типа релятивистской цепочки Тоды*

$$\frac{2w_{n,x_{\pm\pm}} - r'(w_n)}{w_{n,x_{\pm}}^2 - r(w_n)} = \frac{w_{n\mp 1,x_{\pm}} + h_{w_n}(w_{n\mp 1}, w_n)}{h(w_{n\mp 1}, w_n)} - \frac{w_{n\pm 1,x_{\pm}} - h_{w_n}(w_n, w_{n\pm 1})}{h(w_n, w_{n\pm 1})}, \quad (29)$$

где $r(u) = h_v^2 - 2hh_{vv}$.

То обстоятельство, что u и v удовлетворяют одному и тому же уравнению, позволяет построить автопреобразование для цепочек (7), (8). Определим функции $a_i(v)$ равенством $h(u, v) = a_2(v)u^2 + 2a_1(v)u + a_0(v)$, тогда

$$\frac{h(u, v)}{u - w} - \frac{1}{2}h_u(u, v) = \frac{a_2(v)uw + a_1(v)(u + w) + a_0(v)}{u - w}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Отображение $(u, v) \rightarrow (\tilde{u}, \tilde{v})$, задаваемое формулами $\tilde{u}_n = v_n$,*

$$\begin{aligned} & \frac{a_2(v_n)v_{n+1}u_n + a_1(v_n)(v_{n+1} + u_n) + a_0(v_n)}{u_n - v_{n+1}} = \\ & = \frac{a_2(v_n)v_{n-1}\tilde{v}_n + a_1(v_n)(v_{n-1} + \tilde{v}_n) + a_0(v_n)}{v_{n-1} - \tilde{v}_n}, \end{aligned} \quad (30)$$

переводит решения каждой из цепочек (7), (8) в решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко показать, что формула (30) эквивалентна уравнению

$$\tilde{u}_{n,x_+} = \frac{2h(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)}{\tilde{u}_{n+1} - \tilde{v}_n} + h_{\tilde{v}_n}(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n),$$

т.е. переменные $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ удовлетворяют первому из уравнений (7). Дифференцируя его по x_+ , мы однозначно находим $\tilde{v}_{n,x_+}$, и так как известно, что $\tilde{u}_n = v_n$ удовлетворяет цепочке (29), то $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ удовлетворяют и второму уравнению (7).

Чтобы доказать утверждение и для цепочки (8), достаточно заметить, что формула (30) инвариантна относительно замены $n \rightarrow -n$.

Обозначая итерации введенного отображения дополнительным (первым) индексом m и полагая $u_n = q_{m,n}$, $v_n = q_{m+1,n}$, получим совместную систему вида (28):

$$\begin{aligned} q_{m,n,x_\pm} &= \frac{2h(q_{m,n}, q_{m+1,n})}{q_{m,n\pm 1} - q_{m+1,n}} + h_{q_{m+1,n}}(q_{m,n}, q_{m+1,n}), \\ q_{m,n,x_\pm} &= \frac{2h(q_{m-1,n}, q_{m,n})}{q_{m-1,n} - q_{m,n\mp 1}} - h_{q_{m-1,n}}(q_{m-1,n}, q_{m,n}). \end{aligned} \quad (31)$$

Отметим, что эта система инвариантна относительно отражения $m \leftrightarrow n$, $x_\pm \leftrightarrow \mp x_\pm$, т.е. роли индексов m и n совершенно равноправны. В частности, выбирая переменные w вдоль оси m , мы вновь придем к релятивистским цепочкам (29). Цепочки типа цепочки Тоды возникают при выборе динамических переменных вдоль диагоналей $m = \pm n$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. *Переменные $w_n = q_{m_0 \pm n, n}$ удовлетворяют цепочке*

$$\frac{2w_{n,x_\pm x_\pm} - r'(w_n)}{w_{n,x_\pm}^2 - r(w_n)} = \frac{1}{w_{n\pm 1} - w_n} - \frac{1}{w_n - w_{n\mp 1}}.$$

В заключение приведем обобщение системы (31) с переменным многочленом h . При этом приходится пожертвовать одним из времен $x_\pm$, так как получающееся дискретное уравнение уже не инвариантно относительно отражения $n \rightarrow -n$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. Пусть $h_n(u, v) = h_n(v, u)$, $h_{n,uuu} = 0$, а дискриминант $r(u) = h_{n,v}^2 - 2h_n h_{n,vv}$ один и тот же во всех узлах решетки. Тогда следующая система совместна:

$$\begin{aligned} q_{m,n,x} &= \left(\frac{2}{q_{m,n+1} - q_{m+1,n}} + \partial_{q_{m+1,n}} \right) h_{m+n}(q_{m,n}, q_{m+1,n}), \\ q_{m,n,x} &= \left(\frac{2}{q_{m-1,n} - q_{m,n-1}} - \partial_{q_{m-1,n}} \right) h_{m+n-1}(q_{m-1,n}, q_{m,n}). \end{aligned}$$

Наличие этой системы легко объяснить, если вспомнить, что сдвиги по m и n задают преобразование Беклунда для системы (16), где $u = q_{m,n+1}$, $v = q_{m+1,n}$, которая зависит лишь от многочлена r , а не h . Так как r зависит от пяти коэффициентов, а h — от шести, то преобразование Беклунда содержит дополнительный произвольный параметр λ_n . Сравнивая формулы (10) и (17), видим, что в качестве этого параметра можно принять, например, постоянную C из формулы (11), которую следует выбирать независимо на каждом шаге:

$$J = C_n I - \det K_n \cdot K_n^{-1}, \quad h_n(u) = \frac{i}{4}(u - v)^2 \langle s, K_n s \rangle.$$

Выпишем также явное выражение для h_n в случае, когда многочлен r приведен к канонической форме Вейерштрасса $r(u) = 4u^3 - g_2 u - g_3$:

$$h_n(u, v) = \frac{1}{\sqrt{r(\lambda_n)}} \left(\left(uv + \lambda_n(u + v) + \frac{g_2}{4} \right)^2 - (u + v + \lambda_n)(4\lambda_n uv - g_3) \right).$$

7. МНОГОПОЛЕВЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

При $a = 0$ уравнение (14) допускает непосредственное обобщение на $(N - 1)$ -мерную сферу $|s_n| = 1$, $s_n \in \mathbb{R}^N$:

$$s_{n,t} = \langle s_n, K s_n \rangle \left(\frac{s_n + s_{n+1}}{1 + \langle s_n, s_{n+1} \rangle} - \frac{s_n + s_{n-1}}{1 + \langle s_n, s_{n-1} \rangle} \right),$$

где $K = K^\top$ — матрица размера $N \times N$ (которую без потери общности можно считать диагональной). Это уравнение обладает представлением нулевой кривизны $L_{n,t} = U_{n+1} L_n - L_n U_n$ с матрицами размера $(1 + N) \times (1 + N)$,

$$\begin{aligned} L_n &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{\langle s_n, K s_n \rangle} \begin{pmatrix} 1 & s_n^\top M \\ M s_n & M s_n s_n^\top M \end{pmatrix}, \\ U_n &= \frac{\lambda}{1 + \langle s_n, s_{n-1} \rangle} \begin{pmatrix} 0 & (s_n + s_{n-1})^\top M \\ M(s_n + s_{n-1}) & M(s_{n-1} s_n^\top - s_n s_{n-1}^\top) M \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь предполагается, что s_n есть вектор-столбец, а единичная матрица I и матрица $M = M^\top$ имеют размер $N \times N$, причем выполняется соотношение (24).

Отметим сходство приведенных формул с представлением нулевой кривизны из работы [15], в которой рассматривается уравнение

$$s_{t_3} = \left(s_{xx} + \frac{3}{2} \langle s_x, s_x \rangle s \right)_x - \frac{3}{2} \langle s, Js \rangle s_x, \quad |s| = 1, \quad s \in \mathbb{R}^N$$

(являющееся при $N = 3$ симметрией третьего порядка уравнения (1)).

Очевидно, поток, отвечающий случаю $b = 0$, не допускает такого непосредственного обобщения. Однако стационарное уравнение (26) при $b = 0$ можно переписать в виде

$$\frac{s_{n+1} + s_n}{1 + \langle s_n, s_{n+1} \rangle} + \frac{s_n + s_{n-1}}{1 + \langle s_n, s_{n-1} \rangle} = \frac{2Ks_n}{\langle s_n, Ks_n \rangle},$$

имеющем смысл в пространстве любой размерности. Автору неизвестно, является ли это уравнение интегрируемым, хотя тот факт, что уравнение (14) при $a = 0$ интегрируемо для любого n , позволяет надеяться, что это так (ср. с [10]).

Открытым остается также вопрос о многополевых аналогах цепочек (7), (8). Пока их обобщение известно лишь в изотропном случае, оно имеет вид

$$\begin{aligned} u_{n,x\pm} &= \{(u_{n\pm 1} - u_n)(u_{n\pm 1} - v_n)^{-1}(u_n - v_n)\}, \\ v_{n,x\pm} &= \{(u_n - v_n)(u_n - v_{n\mp 1})^{-1}(v_n - v_{n\mp 1})\}, \end{aligned} \quad (32)$$

где $\{abc\}$ обозначает умножение в йордановой тройной системе с обратимыми элементами (определение см., например, в [16]). Наиболее важными примерами такой операции являются умножение матриц по правилу $\{abc\} = abc + cba$, причем a^{-1} совпадает с обратной матрицей, и умножение векторов по правилу $\{abc\} = \langle a, b \rangle c + \langle c, b \rangle a$, причем $a^{-1} = a/|a|^2$. Для цепочек (32) справедлив следующий аналог утверждения 3.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. *Векторные поля ∂_{x_+} и ∂_{x_-} коммутируют, и в силу цепочек (32) переменные $u = u_n$, $v = v_n$ удовлетворяют системе, обобщающей (22) ($x = x_+$, $y = x_-$):*

$$u_{xy} = 2\{u_x(u - v)^{-1}u_y\} - u_x - u_y, \quad v_{xy} = 2\{v_x(v - u)^{-1}v_y\} + v_x + v_y.$$

Представление нулевой кривизны для цепочек (32) может быть построено в терминах суперструктурной алгебры Ли данной йордановой тройной системы (ср. с [17]).

Благодарности. Автор благодарит В. Г. Марихина, В. В. Соколова, А. Б. Шабата и Р. И. Ямилова за полезные обсуждения. Работа поддержана грантом РФФИ № 99-01-00431.

Список литературы

- [1] *Е. К. Склянин*. Функц. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. № 4. С. 27–34.
- [2] *Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев*. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [3] *А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов*. Факторизация нелинейных уравнений типа модели Гейзенберга. Препринт Башкирского филиала АН СССР. Уфа: Изд-во Башкирского филиала АН СССР, 1987.
- [4] *А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов*. Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. № 2. С. 183–208.
- [5] *О. Ragnisco, Р. М. Santini*. Inverse Problems. 1990. V. 6. P. 441–452.
- [6] *А. И. Bobenko*. Discrete integrable systems and geometry. In: Proc. of the 12 Int. Congress of Math. Phys.'97 (Brisbane, Australia, July 1997). Eds. D. De Wit, A. J. Bracken, M. D. Gould, P. A. Pearce. Boston: International Press, 1999. P. 219–226.
- [7] *А. И. Bobenko, Yu. B. Suris*. Commun. Math. Phys. 1999. V. 204. P. 147–188.
- [8] *А. V. Mikhailov, А. B. Shabat*. Phys. Lett. A. 1986. V. 116. № 4. P. 191–194.
- [9] *Я. И. Грановский, А. С. Жеданов*. ТМФ. 1987. Т. 71. № 1. С. 143–153.
- [10] *А. П. Веселов*. ТМФ. 1987. Т. 71. № 1. С. 154–159.
- [11] *А. П. Веселов*. УМН. 1991. Т. 46. № 5. С. 3–45.
- [12] *А. П. Веселов*. ДАН СССР. 1983. Т. 270. № 5. С. 1094–1096.
- [13] *В. Э. Адлер, А. Б. Шабат*. ТМФ. 1997. Т. 112. № 2. С. 179–194.
- [14] *В. Г. Марихин, А. Б. Шабат*. ТМФ. 1999. Т. 118. № 2. С. 217–228.
- [15] *И. Э. Голубчик, В. В. Соколов*. ТМФ. 2000. Т. 124. № 1. С. 62–71.
- [16] *С. I. Svinolupov*. Commun. Math. Phys. 1992. V. 143. P. 559–575.
- [17] *V. E. Adler, S. I. Svinolupov, R. I. Yamilov*. Phys. Lett. A. 1999. V. 254. P. 24–36.

Поступила в редакцию 31.I.2000 г.