Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Домрин, Пространства модулей решений некоммутативной сигма-модели, *ТМФ*, 2008, том 156, номер 3, 307–327

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6250>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:24:55

© 2008 г.

А. В. Домрин*

ПРОСТРАНСТВА МОДУЛЕЙ РЕШЕНИЙ НЕКОММУТАТИВНОЙ СИГМА-МОДЕЛИ

Некоммутативная версия теории унитаров применяется для изучения пространства решений некоммутативной $U(1)$ сигма-модели, представимых в виде конечномерного возмущения тождественного оператора. Основными целочисленными характеристиками таких решений являются нормированная энергия e , канонический ранг r и минимальное унитарное число u , всегда удовлетворяющие неравенствам $r \leq e$ и $u \leq e$. Описание начинается с так называемых BPS-решений ($u = 1$), а затем полностью описываются множества всех решений с $r = 1, 2, e - 1, e$ (тогда автоматически $u \leq 2$) и всех решений малой энергии ($e \leq 5$). Полученные результаты вскрывают простую, но не тривиальную структуру пространств модулей и приводят к серии гипотез.

Ключевые слова: некоммутативная сигма-модель, теория унитаров.

1. ВВЕДЕНИЕ

Двумерные нелинейные сигма-модели – это теории поля, конфигурационное пространство которых состоит из гладких отображений $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow N$ в фиксированное риманово многообразие N неотрицательной кривизны, а плотность лагранжиана равна квадрату модуля дифференциала отображения φ . Поэтому решения конечной энергии представляют собой гармонические отображения из $\mathbb{R}^2$ (или, эквивалентно, из $S^2 = \mathbb{CP}^1 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$) в N . Физические и математические аспекты таких теорий обсуждаются, например, в [1], [2]. Пространства модулей решений наиболее интересных сигма-моделей являются простыми, но не тривиальными. Это имеет место для $N = \mathbb{CP}^1$ (или, эквивалентно, $N = U(2)$) и в меньшей степени для $N = \mathbb{CP}^n$ с $n \geq 2$, $N = U(3)$ и $N = U(4)$.

Некоммутативная версия нелинейной сигма-модели с $N = U(n)$ появилась в [3] в связи с теорией струн и далее изучалась в [4], [5]. Информация о пространствах модулей ее решений важна для многих целей, включая квантование некоммутативных теорий поля. Некоторые способы построения решений были успешно перенесены с коммутативного случая на случай некоммутативной $U(n)$ сигма-модели [3], [6], но

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: domrin@mi.ras.ru

они заведомо не охватывают всего многообразия некоммутативных решений. В настоящей работе рассматривается некоммутативная $U(1)$ -модель, важность которой уже отмечалась в [4]. Теория унитаров из [5] позволяет описать пространства модулей решений малой энергии: множество решений нормированной энергии $e \leq 5$ состоит из $\mathbb{C}^e$ и еще $[(e-1)/2]$ неприводимых компонент комплексных размерностей $e-1, e-2, \dots$. Весьма правдоподобно, что это верно и для всех e . Чтобы дать более подробное описание полученных результатов (которое подытожено ниже в разделе 8), напомним некоторые обозначения и результаты работы [5].

1.1. Обозначения и предварительные сведения. Рассмотрим сепарабельное гильбертово пространство H с ортонормированным базисом $\{e_0, e_1, \dots\}$. Стандартный оператор уничтожения $ae_j := \sqrt{j} e_{j-1}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, можно рассматривать как линейное отображение векторного пространства $D_\infty := \{x \in H \mid \sum_{j=0}^\infty (j+1)^k |x_j|^2 < \infty \text{ для всех } k = 0, 1, 2, \dots\}$ в себя. То же самое верно для оператора рождения $a^*e_j := \sqrt{j+1} e_{j+1}$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Некоммутативная $U(1)$ сигма-модель, изучавшаяся в [4], [5], задается функционалом энергии

$$4e(\Phi) := \|\partial_+ \Phi\|_{\text{HS}}^2 = \|\partial_- \Phi\|_{\text{HS}}^2 = \|\Phi_+\|_{\text{HS}}^2 = \|\Phi_-\|_{\text{HS}}^2 \quad (1.1)$$

на множестве $\mathcal{M}$ всех унитарных операторов $\Phi: H \rightarrow H$ вида $\Phi = e^{i\theta} I + K$, где $\theta \in \mathbb{R}$, I – тождественный оператор, а $K: H \rightarrow H$ – такой линейный оператор, что образ $\text{im } K := K(H)$ является конечномерным подпространством в D_∞ . Здесь $\partial_+ \Phi := -[a^*, \Phi]$ и $\partial_- \Phi := [a, \Phi]$ суть некоммутативные аналоги производных по z и $\bar{z}$, через $\Phi_\pm := \Phi^{-1} \partial_\pm \Phi$ обозначены аналоги соответствующих логарифмических производных, а $\|X\|_{\text{HS}}^2 := \text{Tr}(X^* X)$ означает квадрат нормы Гильберта–Шмидта любого оператора $X: H \rightarrow H$ с конечномерным образом. Уравнения Эйлера–Лагранжа функционала (1.1) можно записать в виде $\partial_- \Phi_+ + \partial_+ \Phi_- = 0$ или $[\Phi_+, \Phi_- + 2a] = 0$ или многими другими эквивалентными способами (см. [5], утверждения 2, 3 и формула (3.10)). Число $e(\Phi)$ является неотрицательным и целым для любого решения $\Phi \in \mathcal{M}$ (см. [5], утверждение 12). Поэтому множество всех решений распадается на счетное число компонент, занумерованных значением e . Ниже будет показано, что множество решений энергии e линейно связно при $e \leq 5$. Очень правдоподобно, что это верно и для всех e .

Решение $\Phi \in \mathcal{M}$ называется *гассмановым*, если $\Phi = \Phi^*$ или, эквивалентно, $\Phi = I - 2P$ для некоторого ортопроектора $P: H \rightarrow H$. Часто удобно отождествлять оператор $\Phi = I - 2P$ с замкнутым векторным подпространством $V = \text{im } P$. Заметим, что ортопроектор $P: H \rightarrow H$ удовлетворяет условию $I - 2P \in \mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда либо $\text{im } P$, либо $\ker P$ является конечномерным подпространством в D_∞ . *Топологический заряд* такого проектора определяется формулой

$$Q(P) := \begin{cases} \dim \text{im } P, & \text{если } \dim \text{im } P < \infty, \\ -\dim \ker P, & \text{если } \dim \ker P < \infty. \end{cases} \quad (1.2)$$

Топологический заряд гассманова решения $\Phi = I - 2P$ определяется как $q(\Phi) := Q(P)$. Целое число $\delta(\Phi) := e(\Phi) - |q(\Phi)|$ является неотрицательным и четным для

любого грассманова решения $\Phi \in \mathcal{M}$ (см. [5], утверждение 15). Это число называется *дефектом* решения Φ . Если одно из пространств $\text{im } P$, $\ker P$ содержится в D_∞ и инвариантно относительно a , то $\Phi = I - 2P$ является решением с $\delta(\Phi) = 0$. Обратно, любое грассманово решение дефекта 0 может быть получено таким образом. Соответствующие решения $\Phi = I - 2P$ называются *BPS-решениями* (если $a(\text{im } P) \subset \text{im } P$) или *анти-BPS-решениями* (если $a(\ker P) \subset \ker P$). В нашем контексте нет необходимости отдельно изучать анти-BPS-решения, так как они превращаются в BPS-решения при умножении Φ на -1 .

Пусть $\Phi \in \mathcal{M}$ – произвольное решение некоммутативной $U(1)$ -модели. Ортопроектор $P: H \rightarrow H$ называется *унитоном* для Φ (или Φ -унитоном), если $I - 2P \in \mathcal{M}$ и выполнены уравнения $P\Phi_-P^\perp = 0$, $P^\perp\Phi_-P + 2P^\perp aP = 0$. Тогда унитарный оператор $\Psi = \Phi(I - 2P) \in \mathcal{M}$ также является решением, причем $e(\Psi) = e(\Phi) + Q(P)$ (см. [5], утверждение 9). Операция добавления унитона обратима по формуле $\Phi = -\Psi(I - 2P^\perp)$. Каждое решение $\Phi \in \mathcal{M}$ допускает канонические положительный и отрицательный унитоны P_Φ^+ и P_Φ^- , заданные формулами $\text{im } P_\Phi^+ = \text{im } \Phi_+$ и $\ker P_\Phi^- = \text{im } \Phi_-$ (см. [5], утверждение 10). Пусть $P: H \rightarrow H$ – некоторый ортопроектор с $\dim \text{im } P < \infty$ и пусть $\Phi \in \mathcal{M}$ – произвольное решение. Если

$$\text{im } \Phi_+ \subset \text{im } P, \quad (\Phi_- + 2a)(\text{im } P) \subset \text{im } P, \quad (1.3)$$

то P является Φ -унитоном (и называется базовым положительным унитоном). Условия (1.3) часто возникают в дальнейшем (причем всегда для случая, когда Φ есть BPS-решение), потому что они выполняются для унитона, обратного к каноническому отрицательному унитоном (см. [5], п. 3.4).

Важной характеристикой любого решения Φ является его *канонический ранг*

$$r(\Phi) := \dim \text{im } \partial_+ \Phi = \dim \text{im } \partial_- \Phi = \dim \text{im } \Phi_+ = \dim \text{im } \Phi_- . \quad (1.4)$$

Число $r(\Phi)$ показывает, насколько возрастает (убывает) энергия решения Φ при добавлении к нему канонического положительного (отрицательного) Φ -унитона. Для любого решения $\Phi \in \mathcal{M}$ ненулевой энергии имеем $1 \leq r(\Phi) \leq e(\Phi)$, причем крайние случаи $r(\Phi) = 1$, $r(\Phi) = e(\Phi)$ реализуются только в том случае, когда Φ эквивалентно BPS-решению (см. утверждение 13 работы [5], которое уточняется ниже в замечании 2). Здесь эквивалентность решений $\Phi, \Psi \in \mathcal{M}$ означает, что $\Psi = e^{i\theta}\Phi$ для некоторого $\theta \in \mathbb{R}$ (см. [5], замечание 6). Чтобы зафиксировать выбор представителя в каждом классе эквивалентности, можно перейти от $\mathcal{M}$ к множеству $\mathcal{M}_0 := \{\Phi \in \mathcal{M} \mid \dim \text{im}(\Phi - I) < \infty\}$ (т.е. считать $\theta = 0$ в определении $\mathcal{M}$). Ясно, что $\mathcal{M}_0$ и $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \times S^1$ являются бесконечномерными незамкнутыми подгруппами в унитарной группе $U(H)$ гильбертова пространства H .

Определим *минимальное унитарное число* $u(\Phi)$ любого решения $\Phi \in \mathcal{M}$ как наименьшее n , для которого существует разложение $\Phi = \Phi_0(I - 2P_1) \dots (I - 2P_n)$, где $e(\Phi_0) = 0$ и каждый ортопроектор P_j является унитоном для решения $\Phi_0(I - 2P_1) \dots (I - 2P_{j-1})$ (см. [5], утверждение 11). Из определения унитона вытекает, что $u(\Phi) = 1$ тогда и только тогда, когда Φ эквивалентно BPS-решению (за тривиальным исключением решений с $e(\Phi) = 0$: они эквивалентны BPS-решению $\Phi = I$, но

имеют $u(\Phi) = 0$). Ясно, что $u(\Phi) \leq e(\Phi)$ для любого решения Φ . Поскольку числа $e(\Phi)$, $r(\Phi)$, $u(\Phi)$ не меняются при переходе к эквивалентному решению, мы можем, не теряя общности, рассматривать следующие множества как основные объекты изучения в настоящей работе:

$$\mathcal{M}(e, r, u) := \{\text{все решения } \Phi \in \mathcal{M}_0 \text{ с } e(\Phi) = e, r(\Phi) = r, u(\Phi) = u\}, \quad (1.5)$$

где e, r, u – положительные целые числа, причем $r \leq e$ и $u \leq e$. В отличие от множеств решений фиксированной энергии e , пространства (1.5) в общем случае незамкнуты и часто несвязны в топологии нормы на $U(H)$. Однако во всех изученных ниже случаях пространства $\mathcal{M}(e, r, u)$, если они непусты, допускают взаимно однозначную вещественно-аналитическую параметризацию некоторым алгебраическим многообразием комплексной размерности r . Это неожиданное явление вряд ли можно обнаружить стандартным способом, рассматривая ядро линеаризации уравнений Эйлера–Лагранжа. Оно безусловно заслуживает дальнейшего изучения.

1.2. Структура работы. В разделе 2 мы описываем множество всех BPS-решений энергии e как экземпляр $\mathbb{C}^e$, вложенный в унитарную группу $U(H)$. Это автоматически дает описание всех решений с $e \leq 2$, $r = 1$ или $r = e$: все они являются BPS-решениями. В разделе 3 доказано, что всякое грассманово решение G дефекта 2 порождает сферу неграссмановых решений, интерполирующую между G и некоторым BPS-решением той же энергии. Поскольку любое не-BPS-решение с $r = e - 1$ принадлежит одной из этих сфер, мы автоматически получаем описание всех решений с $e = 3$ (раздел 4). В разделе 5 установлено, что множество всех не-BPS-решений энергии e и канонического ранга $r = 2$ является прямым произведением $\mathbb{C}^1$ на цепочку из $[(e-1)/2]$ двумерных сфер, последовательно склеенных друг с другом своими полюсами. Это автоматически дает описание случая $e = 4$ (раздел 6). В разделе 7 изучены случаи $r = e - 2$ (частично) и $e = 5$. В качестве приложения найдено число реализуемых нулевых мод гессиана функционала энергии (1.1) вокруг диагональных BPS-решений энергии $e \leq 5$ (см. замечание 9). В разделе 8 мы вкратце суммируем полученные результаты и формулируем ряд гипотез.

2. BPS-РЕШЕНИЯ

Чтобы построить инвариантные подпространства оператора A , можно использовать ядра операторов $f(A)$ для надлежащих функций $f(z)$. Применим эту идею для описания BPS-решений, т.е. инвариантных подпространств оператора уничтожения a . Пусть $\Pi(z) = z^m + c_1 z^{m-1} + \dots + c_m$ есть произвольный монический (т.е. со старшим коэффициентом 1) комплекснозначный полином степени m . Тогда корректно определены оператор $\Pi(a): D_\infty \rightarrow D_\infty$ и векторное подпространство $\ker \Pi(a) := \{x \in D_\infty \mid \Pi(a)x = 0\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *А. Оператор $\Phi = I - 2P \in \mathcal{M}$ является BPS-решением тогда и только тогда, когда образ $V := \operatorname{im} P$ ортопроектора P либо совпадает со всем пространством H , либо имеет вид $V = \ker \Pi(a)$ для некоторого монического*

полинома $\Pi(z)$. Для каждого $m = 1, 2, \dots$ отображение $\Pi \mapsto \ker \Pi(a)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством всех монических полиномов $\Pi(z)$ степени m и множеством всех BPS-решений размерности m .

Б. Пусть $\Phi = I - 2P$ есть BPS-решение с $\operatorname{im} P = \ker \Pi(a)$. Тогда энергия $e(\Phi)$ равна степени полинома $\Pi(z)$, а канонический ранг $r(\Phi)$ равен числу различных корней полинома $\Pi(z)$.

В. Для $1 \leq r \leq e$ обозначим через $N(e, r)$ число представлений e в виде суммы r неубывающих положительных целых слагаемых. Тогда множество $\mathcal{M}(e, r, 1)$ всех BPS-решений энергии e и канонического ранга r является объединением $N(e, r)$ непересекающихся связных компонент. Каждая компонента допускает вещественно-аналитическую взаимно однозначную параметризацию некоторым открытым подмножеством пространства $\mathbb{C}^r$.

Г. Множество $\bigcup_{r=1}^e \mathcal{M}(e, r, 1)$ всех BPS-решений энергии e совпадает с образом $\mathbb{C}^e$ при некотором вещественно-аналитическом вложении $\mathbb{C}^e \rightarrow U(H)$. Прообразы множеств $\mathcal{M}(e, r, 1)$ при этом вложении задают стратификацию пространства $\mathbb{C}^e$ комплексными подмногообразиями комплексной размерности r . Замыкание каждого множества $\mathcal{M}(e, r, 1)$ равно $\bigcup_{\rho=1}^r \mathcal{M}(e, \rho, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А. Чтобы оператор $\Phi = I - 2P$ принадлежал $\mathcal{M}$, пространство $V = \operatorname{im} P$ должно иметь конечную размерность или коразмерность. Заметим, что оператор a не имеет инвариантных подпространств $V \subset H$ конечной коразмерности, кроме $V = H$. Действительно, иначе $V^\perp$ было бы конечномерным инвариантным подпространством оператора a^* . Но всякий линейный оператор на конечномерном пространстве имеет собственный вектор, а a^* не имеет собственных векторов в H (что легко вывести из определения a^* , данного в п. 1.1). Получаем требуемое утверждение.

Б. Для описания конечномерных BPS-решений введем векторы

$$R_\lambda := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\sqrt{j!}} e_j, \quad R_\lambda^k := (a^* - \bar{\lambda}I)^k R_\lambda \quad \text{для } \lambda \in \mathbb{C}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Нормированные векторы $R_\lambda/|R_\lambda|$ известны как когерентные состояния для гармонического осциллятора (см., например, [7]). Хорошо известно, что любое конечное подмножество системы $\{R_\lambda^k \mid \lambda \in \mathbb{C}, k = 0, 1, 2, \dots\}$ состоит из линейно независимых векторов. Кроме того, прямое вычисление в обозначениях п. 1.1 показывает, что R_λ есть единственный (с точностью до скалярного множителя) собственный вектор оператора a с собственным значением λ :

$$\ker(a - \lambda I) = \langle R_\lambda \rangle \quad \text{для всех } \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2.2)$$

Из коммутационной формулы $[A, A^{*k}] = k(A^*)^{k-1}$, справедливой для оператора $A = a - \lambda I$ при любом $\lambda \in \mathbb{C}$, вытекает, что $(a - \lambda I)R_\lambda^k = kR_\lambda^{k-1}$. Поэтому можно рассматривать R_λ^k как присоединенные векторы к собственному вектору R_λ . По индукции получаем следующее обобщение формулы (2.2):

$$\ker(a - \lambda I)^k = \langle R_\lambda, R_\lambda^1, \dots, R_\lambda^{k-1} \rangle \quad \text{для } \lambda \in \mathbb{C}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Кроме того, из той же коммутационной формулы по индукции следует, что базис в правой части равенства (2.3) ортогонален.

Пусть теперь $V \subset D_\infty$ – конечномерное инвариантное подпространство оператора a . Сужение a на V распадается в прямую сумму жордановых клеток. Их собственные значения различны, поскольку каждое собственное подпространство оператора a одномерно (см. (2.2)). Каждая из клеток однозначно определяется своим собственным значением λ и размерностью k по формуле (2.3). Если сужение a на V распадается на r жордановых клеток, имеющих собственные значения λ_j и размерности k_j , $j = 1, 2, \dots, r$, то $V = \ker \Pi(a)$, где $\Pi(z) = (z - \lambda_1)^{k_1} \dots (z - \lambda_r)^{k_r}$. В частности, размерность $\dim V = k_1 + \dots + k_r$ равна степени полинома $\Pi(z)$. Обратно, для любого монического полинома $\Pi(z) = (z - \lambda_1)^{k_1} \dots (z - \lambda_r)^{k_r}$ (где все λ_j различны) степени $m = k_1 + \dots + k_r$ пространство

$$\ker \Pi(a) = \langle R_{\lambda_j}^{l_j} \mid 1 \leq j \leq r, 0 \leq l_j \leq k_j - 1 \rangle \quad (2.4)$$

является m -мерным и, очевидно, инвариантным относительно a .

Равенство $e(\Phi) = m = \deg \Pi$ доказано. Покажем, что $r(\Phi) = r$. Для этого вычислим значение оператора $\Phi_+ = 2P^\perp a^* P$ на каждом базисном векторе (2.4). Получаем, что $\text{im } \Phi_+ = \langle P^\perp R_{\lambda_j}^{k_j} \mid j = 1, \dots, r \rangle$. Это пространство r -мерно, поскольку каждая конечная система векторов R_λ^k линейно независима.

В. Компонента множества $\mathcal{M}(e, r, 1)$, отвечающая представлению $e = k_1 + \dots + k_r$, состоит из всех решений вида (2.4) с фиксированными $k_1, \dots, k_r$ и произвольными наборами $\xi := (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{C}^r \setminus \Delta_r$, где Δ_r – замкнутое $(r - 1)$ -мерное множество всех точек из $\mathbb{C}^r$, имеющих хотя бы две равные координаты. Множество $\mathbb{C}^r \setminus \Delta_r$ связно, так как вещественная коразмерность множества Δ_r в $\mathbb{C}^r$ равна 2. Поскольку некоторые пространства (2.4) с разными ξ могут совпадать (перестановка корней одинаковой кратности не меняет полинома), иногда необходимо профакторизовать $\mathbb{C}^r \setminus \Delta_r$ по действию надлежащей конечной группы перестановок. Однако все факторпространства указанного вида снова будут биголоморфны некоторым открытым связным подмножествам в $\mathbb{C}^r$, так как монические полиномы можно параметризовать не корнями, а коэффициентами (см. замечание 3 ниже). Наконец, параметризация множества всех подпространств вида (2.4) посредством $\xi \in \mathbb{C}^r \setminus \Delta_r$ является вещественно-аналитической, потому что каждый вектор R_λ^l зависит от λ вещественно-аналитически (и даже голоморфно при $l = 0$), а ортопроектор на пространство V , натянутое на столбцы матрицы M , задается формулой $M(M^* M)^{-1} M^*$.

Г. Множество $\bigcup_{e=1}^e \mathcal{M}(e, r, 1)$ отождествляется с $\mathbb{C}^e$, если сопоставить каждому моническому полиному $\Pi(z) = z^e + c_1 z^{e-1} + \dots + c_e$ степени e набор $(c_1, \dots, c_e)$ его коэффициентов. Для доказательства вещественной аналитичности полученного отображения $\mathbb{C}^e \rightarrow U(H)$ достаточно построить (хотя бы локально по $c_1, \dots, c_e$) такой базис векторного пространства $\ker \Pi(a)$, который зависел бы голоморфно от коэффициентов полинома $\Pi(z)$. Это делается выбором надлежащей линейной комбинации векторов $R_{\lambda_1}, \dots, R_{\lambda_e}$, образующей базис пространства $\ker \Pi(a)$ даже в том предельном случае, когда некоторые из корней $\lambda_1, \dots, \lambda_e$ совпадают (например, при $e = 2$ такой базис состоит из векторов $R_{\lambda_1}, (R_{\lambda_2} - R_{\lambda_1})/(\lambda_2 - \lambda_1)$). После этого остается применить теорему об устранимой особенности, гласящую, что непрерывная

функция, голоморфная вне некоторого множества комплексной коразмерности 1, голоморфна всюду. Утверждения о стратификации пространства $\mathbb{C}^e$ и о замыкании множества $\mathcal{M}(e, r, 1)$ становятся тогда очевидными.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Числа λ_j естественно называть *корнями*, а k_j – *кратностями* BPS-решения $V = \ker \Pi(a)$, где $\Pi(z) = (z - \lambda_1)^{k_1} \dots (z - \lambda_r)^{k_r}$ и все λ_j различны. В этих терминах результат добавления канонического положительного унитона к любому BPS-решению снова является BPS-решением, полученным из исходного увеличением кратности каждого его корня на единицу (см. доказательство п. В утверждения 1). Аналогично доказывается, что добавление канонического отрицательного унитона к произвольному BPS-решению сводится к уменьшению кратности каждого корня этого решения на единицу.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из утверждения 13 работы [5] вытекает, что наибольший (e -мерный) и наименьший (одномерный) страты множества $\bigcup_{r=1}^e \mathcal{M}(e, r, 1)$ исчерпывают множества всех (не обязательно BPS) решений $\Phi \in \mathcal{M}_0$ с $r = e$ и $r = 1$ соответственно. Таким образом, любое решение $\Phi \in \mathcal{M}$ энергии $e(\Phi) = m$ и канонического ранга $r(\Phi) = m$ или $r(\Phi) = 1$ эквивалентно BPS-решению, у которого все m корней различны или, наоборот, все m корней совпадают. Из утверждения 14 работы [5] получаем явное описание всех решений $\Phi \in \mathcal{M}_0$ энергии $e = 1$ или $e = 2$: их множество есть образ $\mathbb{C}^1$ или $\mathbb{C}^2$ при вложении в унитарную группу $U(H)$, состоящий из отражений относительно ортогональных дополнений к BPS-подпространствам размерности 1 или 2 соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для иллюстрации п. В утверждения 1 рассмотрим первый нетривиальный случай: $e = 4$, $r = 2$. Число 4 имеет два допустимых представления: $1 + 3$ и $2 + 2$. Поэтому $\mathcal{M}(4, 2, 1) = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$, где $\mathcal{M}_1$ состоит из всех BPS-решений $\ker \Pi(a)$ с $\Pi(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)^3$, а $\mathcal{M}_2$ – из всех BPS-решений $\ker \Pi(a)$ с $\Pi(z) = (z - \lambda_1)^2(z - \lambda_2)^2$. Во втором случае пространство $\ker \Pi(a)$ не меняется при перестановке λ_1 и λ_2 . Поэтому $\mathcal{M}_1 \cong \mathbb{C}^2 \setminus \Delta_2$, но $\mathcal{M}_2 \cong (\mathbb{C}^2 \setminus \Delta_2)/S_2$, где S_2 есть группа перестановок двух координат. Однако отображение $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto (\mu_1, \mu_2)$, заданное формулами $\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2$ и $\mu_2 = \lambda_1 \lambda_2$, биголоморфно отождествляет факторпространство $\mathcal{M}_2 \cong (\mathbb{C}^2 \setminus \Delta_2)/S_2$ с открытым связным подмножеством $\{\mu \in \mathbb{C}^2 \mid \mu_1^2 - 4\mu_2 \neq 0\}$ пространства $\mathbb{C}^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Кроме конечномерных инвариантных подпространств, оператор уничтожения a имеет замкнутые инвариантные подпространства $V \subset H$ бесконечной размерности и коразмерности: $V = \ker f(a)$ для неполиномиальных целых функций $f(z)$ надлежащего роста (грубо говоря, $\ln|f(z)| \leq C|z|^2$; см. подробности в работе [8] или в приложении 1 книги [7]). Например, если $f(z) = \sin z$, то V есть замыкание линейной оболочки всех векторов R_λ с $\lambda \in \mathbb{Z}$. Хотя ортопроекторы P с образом $\operatorname{im} P = V$ указанного вида не удовлетворяют условию $I - 2P \in \mathcal{M}$, для них выполнено BPS-условие $P^\perp a P = 0$ на всюду плотном подпространстве в H . Если f – экспоненциальный полином, то оператор $[a, \Phi]$ (с $\Phi = I - 2P$ и $\operatorname{im} P = \ker f(a)$) плотно определен на H , но не продолжается до оператора Гильберта–Шмидта на всем H (см. [9]). Поэтому пространства $V = \ker f(a)$ можно интерпретировать как

“BPS-решения бесконечной энергии”. Их коммутативные аналоги – это голоморфные нерациональные отображения из $\mathbb{C}$ в грассманианы $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n) \subset U(n)$.

3. ГРАССМАНОВЫ РЕШЕНИЯ ДЕФЕКТА 2 И СФЕРЫ НЕГРАССМАНОВЫХ РЕШЕНИЙ

Известно ([5], утверждение 15), что всякое грассманово решение энергии e и дефекта 2 представляет собой $(e-2)$ -мерное подпространство вида $G := M \ominus S$, где M и S суть BPS-решения энергии $e-1$ и 1 соответственно, причем $S \subset M$ и $a^*S \subset M$; здесь и далее через $\ominus$ обозначается ортогональное дополнение. Опишем эту геометрическую ситуацию более подробно. Прежде всего, из утверждения 1 вытекает, что $S = \langle R_\lambda \rangle$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Для упрощения обозначений мы заменим все рассматриваемые унитарные операторы Φ на $U_\lambda \Phi U_\lambda^*$, где U_λ есть *некоммутативный сдвиг*¹⁾ на λ . Это позволяет нам считать, что $\lambda = 0$ и, следовательно, $S = \langle R_0 \rangle = \langle e_0 \rangle$. Пусть k – наибольшее целое число такое, что $e_0, e_1, \dots, e_{k-1} \in M$. Условия $S \subset M$ и $a^*S \subset M$ эквивалентны неравенству $k \geq 2$. Введем еще одно BPS-подпространство $B := M \oplus \langle e_k \rangle$ размерности e (здесь и далее через $\oplus$ обозначается прямая сумма векторных подпространств, не обязательно ортогональная). Обозначим через P_0 ортопроектор в H с $\text{im } P_0 = \langle e_0 \rangle$, а через $P(c)$ – ортопроектор в H с $\text{im } P(c) = V(c) := G \oplus \langle e_0 + ce_k \rangle \subset B$, где $c \in \mathbb{C}^1$ – любое фиксированное число. Эти обозначения сохраняют смысл и в предельном случае $c = \infty$, когда $\text{im } P(\infty) = V(\infty) = G \oplus \langle e_k \rangle = B \ominus \langle e_0 \rangle$. Рассмотрим семейство унитарных операторов

$$\Phi(c) := (I - 2P_0)(I - 2P(c)) \in \mathcal{M}_0, \quad c \in \mathbb{C}P^1. \quad (3.1)$$

Оно представляет собой сферу $\mathbb{C}P^1$, вложенную в унитарную группу $U(H)$ и интерполирующую между грассмановым решением $\Phi(0) = I - 2P_G$ дефекта 2 и BPS-решением $\Phi(\infty) = I - 2P_B$, где P_G и P_B – ортопроекторы с образами G и B соответственно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. А. Все операторы (3.1) являются решениями энергии $e(\Phi(c)) = e$ с унитарным числом $u(\Phi(c)) = 2$, кроме $u(\Phi(\infty)) = 1$.

Б. Канонический ранг любого решения (3.1) для $c \neq \infty$ равен $r(\Phi(c)) = r(\Phi(\infty)) + 1$.

В. С точностью до некоммутативного сдвига всякое не-BPS-решение $\Phi \in \mathcal{M}_0$ с $e(\Phi) = e$ и $r(\Phi) = e - 1$ принадлежит некоторой сфере (3.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А. Покажем, что каждый ортопроектор $P(c)$ удовлетворяет условиям (1.3) для $\Phi = \Phi^0 := I - 2P_0$ и, следовательно, является Φ^0 -унитоном. Действительно, поскольку $k \geq 2$, имеем $V(c) \supset G \supset \langle e_1 \rangle = \text{im } \Phi_+^0$, и первое условие (1.3)

¹⁾Иными словами, U_λ – это единственный унитарный оператор на H , переводящий каждое когерентное состояние $R_\alpha/|R_\alpha|$ в $R_{\alpha+\lambda}/|R_{\alpha+\lambda}|$ (см. [7]). Поскольку $U_\lambda a U_\lambda^* = a - \lambda I$, сопряжение унитарных операторов посредством U_λ не меняет функционал энергии (1.1) и отображает решения $U(1)$ -модели снова в решения той же энергии и того же канонического ранга (см., например, [4], п. 2.2). Оно также перестановочно со всеми конструкциями теории унитарных ([5], п. 3.2, 3.3). Коммутативный аналог этого преобразования заменяет $\varphi(z)$ на $\varphi(z - \lambda)$ в обозначениях работы [5] (п. 1.1).

выполнено. С другой стороны, формула (3.12) работы [5] и очевидное равенство $aP_0 = 0$ показывают, что $\Phi_-^0 + 2a = 2P_0^\perp a$. Поэтому второе условие (1.3) принимает вид $P_0^\perp a(V(c)) \subset V(c)$. Оно выполнено, поскольку $P_0^\perp a(V(c)) \subset P_0^\perp aB = P_0^\perp M = G \subset V(c)$. Итак, все операторы (3.1) являются решениями. Их энергия равна $e(\Phi(c)) = e(\Phi^0) + Q(P(c)) = 1 + (e - 1) = e$ (см. [5], п. Б утверждения 9). Их унитарное число не превосходит 2 по определению и равно 2 при $c \neq \infty$, так как в этом случае $\Phi(c)$ не являются BPS-решениями.

Б. Покажем, что оператор $\Phi(c)_+$ равен нулю на ортогональном дополнении $B^\perp$ пространства B . Действительно, согласно п. А утверждения 9 работы [5] имеем

$$\Phi(c)_+ = \Phi_+^0 + 2[a^*, P(c)]. \quad (3.2)$$

Если $x \in B^\perp$, то $P_0 x = 0$, так что оператор $\Phi_+^0 = 2P_0^\perp a^* P_0$ обращается в нуль на векторе x . С другой стороны, если $x \in B^\perp$, то $a^* x \in B^\perp$ в силу инвариантности B относительно a . Отсюда $[a^*, P(c)]x = a^* P(c)x - P(c)a^* x = a^* 0 - 0 = 0$, что и требовалось показать. Чтобы вычислить действие $\Phi(c)_+$ на B , рассмотрим единичный вектор нормали $n = n(c)$ к гиперплоскости $V(c) \subset B$ и запишем базис (2.4) пространства B в виде

$$\begin{aligned} B &= \langle e_0, e_1, \dots, e_k; R_{\alpha_2}, R_{\alpha_2}^1, \dots, R_{\alpha_2}^{k_2-1}; \dots; R_{\alpha_s}, R_{\alpha_s}^1, \dots, R_{\alpha_s}^{k_s-1} \rangle = \\ &= \langle n \rangle \oplus V(c) = \langle n; e_0 + ce_k, e_1, \dots, e_{k-1}; P_0^\perp R_{\alpha_2}, P_0^\perp R_{\alpha_2}^1, \dots, P_0^\perp R_{\alpha_2}^{k_2-1}; \dots; \\ &\quad P_0^\perp R_{\alpha_s}, P_0^\perp R_{\alpha_s}^1, \dots, P_0^\perp R_{\alpha_s}^{k_s-1} \rangle, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\alpha_2, \dots, \alpha_s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$. Здесь число $s \geq 1$ равно каноническому рангу $r(\Phi(\infty))$ согласно п. В утверждения 1, причем в случае $s = 1$ равенство (3.3) упрощается до $B = \langle e_0, e_1, \dots, e_k \rangle = \langle n; e_0 + ce_k, e_1, \dots, e_{k-1} \rangle$. Из формулы $P(c)x = x - (x, n)n$, верной для всех $x \in B$, легко получить, что

$$[a^*, P(c)]x = P_B^\perp a^* x + (a^* x, n)n - (x, n)a^* n \quad \text{для всех } x \in B. \quad (3.4)$$

Слагаемое $(x, n)a^* n$ обращается в нуль на всех векторах x второго базиса (3.3), кроме $x = n$. Если же $x = n$, то обе части формулы (3.4) равны $-P_{V(c)} a^* n$, откуда $\Phi(c)_+ n = 2(n, e_0)e_1 - 2P_{V(c)} a^* n = 0$ (первое равенство есть не что иное, как (3.2), а второе вытекает из того, что векторы $a^* n$ и $(n, e_0)e_1$ имеют одинаковые скалярные произведения со всеми перечисленными в (3.3) базисными векторами пространства $V(c)$). Пользуясь (3.2), (3.4) и очевидной формулой $P_0^\perp R_{\alpha_j}^l = R_{\alpha_j}^l - (-\bar{\alpha}_j)^l e_0$, мы получаем

$$\begin{aligned} \Phi(c)_+(e_0 + ce_k) &= 2e_1 + 2cP_B^\perp a^* e_k + 2c(a^* e_k, n)n, \\ \Phi(c)_+(e_{k-1}) &= 2(a^* e_{k-1}, n)n, \\ \Phi(c)_+(P_0^\perp R_{\alpha_j}^{k_j-1}) &= 2P_B^\perp a^* R_{\alpha_j}^{k_j-1} + 2(a^* R_{\alpha_j}^{k_j-1}, n)n, \quad 2 \leq j \leq s. \end{aligned}$$

Действие оператора $\Phi(c)_+$ на остальных векторах x второго базиса (3.3) равно нулю: для этих векторов имеем $x \perp e_0$, $x \in V(c)$ и $a^* x \in V(c)$, так что оба слагаемых в правой части (3.2) обращаются в нуль на x . Заметим, что вектор $\Phi(c)_+(e_{k-1})$ яв-

ляется ненулевым кратным вектора n^2). Поэтому пространство $\text{im } \Phi(c)_+$ является линейной оболочкой вектора n и s векторов $e_1 + cP_B^\perp a^* e_k$, $P_B^\perp a^* R_{\alpha_j}^{k_j-1}$, $2 \leq j \leq s$, ортогональных к n . Эти s векторов линейно независимы в силу такого же рассуждения, как в доказательстве п. Б утверждения 1. Тем самым $r(\Phi(c)) = s + 1$.

В. Добавляя к Φ канонический отрицательный Φ -унитон, получим некоторое решение Φ^0 энергии $e = 1$. С точностью до некоммутативного сдвига и эквивалентности можно считать, что $\Phi^0 = I - 2P_0$, где $\text{im } P_0 = \langle e_0 \rangle$ (см. утверждение 1 или замечание 2). Согласно п. А утверждения 13 работы [5] достаточно показать, что всякий положительный базовый Φ^0 -унитон P ранга $e - 1$ совпадает с $P(c)$ для некоторого $c \in \mathbb{C}$, если только Φ не является BPS-решением. Иными словами, надо описать все подпространства $V := \text{im } P$ размерности $e - 1$, удовлетворяющие условиям (1.3) для $\Phi = \Phi^0$:

$$\langle e_1 \rangle \subset V, \quad P_0^\perp aV \subset V. \quad (3.5)$$

Если V содержит e_0 , то из условий (3.5) вытекает, что

$$\langle e_0, e_1 \rangle \subset V, \quad aV \subset P_0 aV + P_0^\perp aV \subset \langle e_0 \rangle + P_0^\perp aV \subset V.$$

Поэтому V является BPS-решением, содержащим $\langle e_0, e_1 \rangle$, а $\Phi = \Phi^0(I - 2P)$ – грассмановым решением $V \ominus \langle e_0 \rangle$ дефекта 2. Такое решение Φ принадлежит одной из сфер (3.1) согласно утверждению 15 работы [5].

Таким образом, можно считать, что $e_0 \notin V$. Тогда

$$a(\langle e_0 \rangle \oplus V) = aV \subset P_0 aV + P_0^\perp aV \subset \langle e_0 \rangle + P_0^\perp aV \subset \langle e_0 \rangle \oplus V$$

в силу второго условия (3.5). Следовательно, $B := \langle e_0 \rangle \oplus V$ является BPS-подпространством, содержащим e_0 (по определению) и e_1 (в силу первого условия (3.5)). Пусть k – максимальное целое число, для которого $e_0, e_1, \dots, e_k \in B$. Если $k = 1$, то первое равенство (3.3) показывает, что $P_0^\perp B = \langle e_0 \rangle \oplus P_0^\perp aB$. Из очевидного равенства $aB = aV$ и условий (3.5) вытекает, что $P_0^\perp B \subset V$. Это включение должно быть равенством, поскольку $\dim P_0^\perp B = \dim V = e - 1$. Но тогда $V \perp e_0$, так что $\Phi = \Phi^0(I - 2P)$ есть BPS-решение вопреки предположению. Таким образом, можно считать, что $k \geq 2$. Из первого равенства (3.3) мы опять видим, что второе условие (3.5) эквивалентно включению $G \subset V$, где $G := P_0^\perp aB = P_0^\perp aV$ – соответствующее грассманово решение дефекта 2. Поскольку $\dim G = e - 2$ и $\dim V = e - 1$, имеем $V = G \oplus \langle u \rangle$ для некоторого вектора $u \neq 0$ из подпространства $\langle e_0, e_k \rangle \subset B$ (это подпространство трансверсально к G). Записав u в виде $u = e_0 + se_k$ для некоторого $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (случаи $s = 0$ и $s = \infty$ исключаются сделанными выше предположениями), мы видим, что $V = V(c)$ и $\Phi = \Phi(c)$ в обозначениях (3.1).

Чтобы наглядно представить действие унитарных операторов (3.1) на H , запишем эти операторы в виде матриц в надлежащем ортонормированном базисе пространства H . Приводимая ниже формула (3.6) задает взаимно однозначную параметризацию семейства (3.1) сферой $S^2 = \{(\kappa, \lambda) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{C}^1 \mid \kappa^2 + |\lambda|^2 = 1\}$.

² Действительно, если бы выполнялось равенство $(a^* e_{k-1}, n) = 0$, то мы имели бы $e_k \in V(c)$ и, следовательно, $e_0 \in V(c)$. Но тогда $V(c) = M$, откуда $e_k \in M$ вопреки определению k .

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Каждый оператор (3.1) имеет инвариантные подпространства $B^\perp$, G и $B \ominus G$, ортогональная прямая сумма которых равна всему пространству H . При каждом $c \in \mathbb{C}P^1$ имеем $\Phi(c)x = x$ для $x \in B^\perp$ и $\Phi(c)x = -x$ для $x \in G$. Рассмотрим вектор $N := P_G^\perp e_k = P_M^\perp e_k$. Тогда матрица унитарного оператора $\Phi(c)$ в ортонормированном базисе $\langle e_0, N/|N| \rangle$ пространства $B \ominus G$ имеет вид*

$$\Phi(c)|_{B \ominus G} = \begin{pmatrix} \kappa & -\bar{\lambda} \\ \lambda & \kappa \end{pmatrix}, \quad \kappa = \frac{1 - |c|^2 |N|^2}{1 + |c|^2 |N|^2}, \quad \lambda = -\frac{2c|N|}{1 + |c|^2 |N|^2}. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы для $\Phi(c)|_{B^\perp}$ и $\Phi(c)|_G$ вытекают из (3.1). Докажем (3.6). Заметим, что $N \neq 0$ по определению k . Поскольку векторы e_0, N ортогональны к G , их образы при $P(c)$ параллельны вектору нормали к G в пространстве $\text{im } P(c) = G \oplus \langle e_0 + ce_k \rangle$. Указанный вектор нормали равен $e_0 + cN$. Записывая $P(c)x = \mu(e_0 + cN)$ для $x = e_0, N$, мы легко находим из условия $x - P(c)x \perp e_0 + cN$, что $\mu = (1 + |c|^2 |N|^2)^{-1}$ для $x = e_0$ и $\mu = \bar{c}|N|^2(1 + |c|^2 |N|^2)^{-1}$ для $x = N$. Подставляя эти результаты в (3.1), получаем (3.6).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Из утверждения 2 вытекает, что $\mathcal{M}(e, e-1, u) = \emptyset$ при $u > 2$, а $\mathcal{M}(e, e-1, 2)$ представляется в виде $D^{e-2} \times \mathbb{C}_c^1$, где $D^{e-2} \subset \mathbb{C}^{e-2}$ – открытое подмножество, параметризующее все BPS-решения энергии e с кратностями $3, 1, \dots, 1$ (это одна из двух упомянутых в п. В утверждения 1 связанных компонент множества $\mathcal{M}(e, e-2, 1)$), а множество $\mathbb{C}_c^1$ получено из сферы (3.1) удалением точки $c = \infty$. Если $e \leq 5$, то замыкание множества $\mathcal{M}(e, e-1, 2)$ равно $M^{e-2} \times \mathbb{C}P_c^1$, где $M^{e-2} \subset \mathbb{C}^e$ – множество всех BPS-решений, имеющих хотя бы один корень кратности, больше или равной 3. Для произвольных e это замыкание равно объединению сфер (3.1) по всем грассмановым решениям G энергии e и дефекта 2, причем множество всех таких G слегка отличается от M^{e-2} при $e \geq 6$. Заметим еще, что утверждение 2 дает примеры не-BPS-решений (как грассмановых, так и неграссмановых) с любым допустимым значением канонического ранга: $2 \leq r \leq e-1$ (сравните с замечанием 2 для случаев $r = 1$ и $r = e$).

4. РЕШЕНИЯ С $e = 3$

Согласно замечанию 2 для всякого не-BPS-решения $\Phi \in \mathcal{M}$ энергии $e(\Phi) = 3$ имеем $r(\Phi) = 2$. Поэтому п. В утверждения 2 показывает, что Φ принадлежит (с точностью до некоммутативного сдвига и эквивалентности) сфере (3.1), отвечающей решениям $G = \langle e_1 \rangle$ и $B = \langle e_0, e_1, e_2 \rangle$, а утверждение 3 (в котором в этом случае $N = e_2$) дает для Φ следующую матрицу в исходном базисе $\{e_0, e_1, \dots\}$:

$$\Phi = \begin{pmatrix} k & 0 & -\bar{l} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ l & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_\infty \end{pmatrix}, \quad k := \frac{1 - |c|^2}{1 + |c|^2}, \quad l := -\frac{2c}{1 + |c|^2}, \quad (4.1)$$

где I_∞ означает единичную матрицу бесконечного ранга. Эти рассуждения доказывают следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *С точностью до некоммутативного сдвига и эквивалентности любое не-BPS-решение $\Phi \in \mathcal{M}$ энергии $e(\Phi) = 3$ задается формулой (4.1) для некоторого $c \in \mathbb{C}$. Обратно, для любого $c \in \mathbb{C}$ формула (4.1) задает не-BPS-решение с $e(\Phi) = 3$ и $r(\Phi) = 2$.*

Таким образом, имеем $\mathcal{M}(3, 2, 2) \cong \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}_c^1 \times \mathbb{C}_\lambda^1$, где λ параметризует некоммутативные сдвиги. Можно описать пространство

$$\mathcal{M}(3) := \mathcal{M}(3, 3, 1) \cup \mathcal{M}(3, 2, 1) \cup \mathcal{M}(3, 1, 1) \cup \mathcal{M}(3, 2, 2) \cong \mathbb{C}^3 \cup \mathbb{C}^2$$

всех решений Φ с $e(\Phi) = 3$ еще и другим способом: это образ $\mathbb{C}^3 \cup (\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^1)$ при вещественно-аналитическом вложении в $U(H)$, причем $\mathbb{C}^3$ состоит из всех BPS-решений, а $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^1$ – из всех решений, получаемых добавлением двумерных базовых унитаров к BPS-решениям энергии 1. Компоненты $\mathbb{C}^3$ и $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}$ рассматриваемого пространства модулей являются гладкими, замкнутыми и неприводимыми. Их пересечение равно множеству всех BPS-решений с $e = 3$ и $r = 1$. Заметим, что пространства $\mathcal{M}(3, r, u)$ образуют стратификацию множества $\mathcal{M}(3)$ подобно п. Г утверждения 1.

5. РЕШЕНИЯ С $r = 2$

Конструкцию решений (4.1) можно обобщить следующим образом. Для любых целых чисел s, t при $0 \leq s \leq t - 2$ рассмотрим двумерную сферу S_{st}^2 , состоящую из всех унитарных операторов вида

$$\Phi = \begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & -\bar{l} & 0 \\ 0 & 0 & -I_{t-s-1} & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_\infty \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad l \in \mathbb{C}, \quad k^2 + |l|^2 = 1, \quad (5.1)$$

где I_s , I_{t-s-1} и I_∞ – единичные матрицы ранга s , $t - s - 1$ и ∞ соответственно. Заменяя пару (k, l) на один комплексный параметр $c \in \mathbb{C}$ по формулам (4.1), можно также рассматривать S_{st}^2 как комплексную проективную прямую $\mathbb{C}P^1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. А. Все операторы (5.1) являются решениями с $e(\Phi) = s + t + 1$, $r(\Phi) = 2$ и $u(\Phi) = 2$, кроме случая $s = 0$, $k = -1$, когда $u(\Phi) = r(\Phi) = 1$.

Б. Добавление канонического положительного унитаров ко всем решениям класса S_{st}^2 задает голоморфное (дробно-линейное) взаимно однозначное отображение сферы S_{st}^2 на $S_{s+1, t+1}^2$. Добавление канонического отрицательного унитаров ко всем решениям класса $S_{s+1, t+1}^2$ задает обратное отображение сферы $S_{s+1, t+1}^2$ на S_{st}^2 . Добавляя канонический отрицательный унитар к любому решению класса S_{0t}^2 , получаем диагональное BPS-решение $\langle e_0, e_1, \dots, e_{t-2} \rangle$ энергии $t - 1$.

В. С точностью до некоммутативного сдвига и эквивалентности любое не-BPS-решение $\Phi \in \mathcal{M}$ с $r(\Phi) = 2$ имеет вид (5.1) для некоторых целых s, t при $0 \leq s \leq t - 2$ и некоторой пары $(k, l) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ при $k^2 + |l|^2 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А. Можно явно вычислить действие оператора $\Phi_+ = a^* - \Phi^* a^* \Phi$ на всех векторах стандартного базиса. А именно, если $j \neq s-1, s, t-1, t$, то $\Phi e_j = \pm e_j$ и $\Phi^* e_{j+1} = \pm \Phi^* e_{j+1}$, откуда $\Phi_+ e_j = 0$. В оставшихся случаях имеем

$$\begin{aligned}\Phi_+ e_{s-1} &= \sqrt{s} ((1-k)e_s + le_t), & \Phi_+ e_s &= (1+k)\sqrt{s+1}e_{s+1} - l\sqrt{t+1}e_{t+1}, \\ \Phi_+ e_{t-1} &= \sqrt{t} (\bar{l}e_s + (1+k)e_t), & \Phi_+ e_t &= -\bar{l}\sqrt{s+1}e_{s+1} + (1-k)\sqrt{t+1}e_{t+1}.\end{aligned}$$

Отсюда прямой проверкой получается, что Φ является решением (см. [5], п. Б утверждения 3) и $e(\Phi) = s + t + 1$ (см. (1.1)). Кроме того, векторы $\Phi_+ e_{s-1}$, $\Phi_+ e_{t-1}$ пропорциональны друг другу (то же самое верно для пары $\Phi_+ e_s$, $\Phi_+ e_t$) и отличны от нуля, за исключением случая $s = 0$ и диагонального случая, когда $k = \pm 1$, $l = 0$. Поэтому $\text{im } \Phi_+ = \langle v_1, v_2 \rangle$, где ненулевые векторы

$$v_1 := (1-k)e_s + le_t, \quad v_2 := (1+k)\sqrt{s+1}e_{s+1} - l\sqrt{t+1}e_{t+1} \quad (5.2)$$

ортогональны друг другу и, следовательно, линейно независимы. Таким образом, $r(\Phi) = \dim \text{im } \Phi_+ = 2$. В п. Б утверждения 2 дается тот же результат в исключительном случае $s = 0$ (кроме значения $k = -1$, когда Φ является BPS-решением). В исключительных случаях $k = \pm 1$, $l = 0$, $s \neq 0$ тот же самый результат получается небольшой модификацией приведенного рассуждения (обозначим через v_1 единственный ненулевой вектор из двух векторов $\Phi_+ e_{s-1}$, $\Phi_+ e_{t-1}$, и аналогично для v_2). Для доказательства равенства $u(\Phi) = 2$ заметим, что Φ получается из диагонального BPS-решения $\Phi_0 = I - 2P_0$ с $\text{im } P_0 = \langle e_0, \dots, e_s \rangle$ добавлением положительного базового Φ_0 -унитона P с $\text{im } P = \langle e_0, \dots, e_{s-1}, e_{s+1}, \dots, e_{t-1}, \eta \rangle$, где $\eta = (1+k)e_s - le_t$. Действительно, условия (1.3) с заменой Φ на Φ_0 легко проверяются явным вычислением (в комплексной координате c , вектор η пропорционален $e_s + ce_t$ при $k \neq -1$). Отсюда также получается другое доказательство того, что Φ является решением и $e(\Phi) = s + t + 1$.

Б. Пусть P есть канонический положительный Φ -унитон, т.е. $\text{im } P = \text{im } \Phi_+$. Действие оператора $I - 2P$ на всех базисных векторах легко найти с помощью (5.2), например

$$(I - 2P)e_s = e_s - 2\frac{(e_s, v_1)}{(v_1, v_1)}v_1 = ke_s - le_t.$$

Умножая полученные результаты на (5.1), мы видим, что новое решение $\Psi := \Phi(I - 2P)$ опять имеет вид (5.1) с заменой целых чисел (s, t) на $(s+1, t+1)$, а параметров (k, l) на дробно-линейные выражения³⁾

$$k' = \frac{(s+t+2)k + (s-t)}{(s-t)k + (s+t+2)}, \quad l' = \frac{-2l\sqrt{(s+1)(t+1)}}{(s-t)k + (s+t+2)}.$$

Таким образом, доказано утверждение о канонических положительных унитонах. Унитон, обратный к каноническому положительному, является базовым согласно п. А утверждения 13 работы [5]. Канонический ранг полученного нового решения

³⁾Зависимость комплексной координаты c' от c оказывается даже линейной.

не превосходит 2 ([5], п. Б утверждения 13) и не равен 1 (согласно замечаниям 2 и 1). Следовательно, этот канонический ранг $r = 2$, а рассматриваемый базовый унитар является каноническим. Этим доказано утверждение о канонических отрицательных унитарных для $\Phi \in S_{s+1,t+1}^2$. Утверждение о канонических отрицательных унитарных для $\Phi \in S_{0t}^2$ можно проверить напрямую с помощью явной формулы для $\Phi_+ = -\Phi_-^*$ из доказательства п. А или вывести из п. В, доказательство которого не использует интересующий нас результат.

В. Для доказательства нам потребуется следующая

ЛЕММА. Если P – положительный базовый унитар ранга $r = 2$ для диагонального BPS-решения $\Phi_0 = I - 2P_0$ с $\text{im } P_0 = \langle e_0, \dots, e_{p-1} \rangle$, то либо $\Phi_0(I - 2P)$ является BPS-решением, либо $\text{im } P = \langle e_p, e_0 + ce_{p+1} \rangle$ для некоторого $c \in \mathbb{C}$.

Действительно, поскольку $\text{im}(\Phi_0)_+ = \langle e_p \rangle$, мы можем записать $\text{im } P = \langle e_p, \eta \rangle$, где $\eta \perp e_p$. Оператор $(\Phi_0)_- + 2a$ равен $2a$ на $\langle e_p \rangle^\perp$ и обращается в нуль на векторе e_p . Поэтому инвариантность $\text{im } P$ относительно $(\Phi_0)_- + 2a$ эквивалентна существованию таких $A, B \in \mathbb{C}$, что $2a\eta = Ae_p + B\eta$. Если $B \neq 0$, то сравнение проекций обеих частей равенства на e_{p-1} дает $\eta_{p-1} = 0$. Тогда сравнение проекций на e_{p-2} дает $\eta_{p-2} = 0$ и т.д. В итоге получаем $P_0\eta = 0$, так что новое решение $\Phi_0(I - 2P)$ оказывается BPS-решением. Если же $B = 0$, то $2a\eta = Ae_k$ и, следовательно, вектор η пропорционален $e_0 + ce_{p+1}$ для некоторого $c \in \mathbb{C}$. Лемма доказана.

Теперь докажем утверждение п. В индукцией по значению энергии $e(\Phi)$, отдельно для четных и нечетных значений. Например, пусть число $e(\Phi) = 2j + 1$ нечетно. При $j = 0$ утверждение верно, так как все решения энергии $e(\Phi) = 1$ являются BPS-решениями. Допустим, что оно верно при всех $j \leq j_0 - 1$ и рассмотрим любое не-BPS-решение Φ с $e(\Phi) = 2j_0 + 1$ и $r(\Phi) = 2$. Добавляя к Φ канонический отрицательный унитар, получим новое решение Ψ с $e(\Psi) = 2(j_0 - 1) + 1$ и $r(\Psi) \leq 2$ (см. [5], п. Б утверждения 13). Если $r(\Psi) = 2$, то по индуктивному предположению Ψ принадлежит некоторой сфере S_{st}^2 с $s + t + 1 = e(\Phi) - 2$. Более того, в этом случае переход от Ψ к Φ осуществляется добавлением канонического положительного унитарна, так что Φ принадлежит $S_{s+1,t+1}^2$ согласно п. Б. Если же $r(\Psi) = 1$, то в силу замечания 2 можно (после некоммутативного сдвига) считать, что $\Psi = I - 2P_0$ с $\text{im } P_0 = \langle e_0, \dots, e_m \rangle$, где $m = 2j_0 - 1$. Тогда Φ принадлежит $S_{0,m+1}^2$ по доказанной выше лемме. Этим доказан шаг индукции. Доказательство для четных значений $e(\Phi)$ полностью аналогично. Утверждение доказано.

Утверждение 5 дает следующее описание пространств $\mathcal{M}(e, 2, u)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Для всех $e \geq 3$ имеем $\mathcal{M}(e, 2, 2) = A_e \times \mathbb{C}_\lambda^1$, где $\mathbb{C}_\lambda^1$ параметризует некоммутативные сдвиги, а A_e получается из объединения сфер S_{st}^2 по всем целым s, t с $0 \leq s \leq t - 2$ и $s + t + 1 = e$ удалением точки $(k, l) = (-1, 0)$ сферы $S_{0,e-1}^2$. Множество $\mathcal{M}(e, 2, u)$ пусто при $u \geq 3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Опишем множества A_e с геометрической точки зрения. При этом заменим букву e на m во избежание конфликта обозначений. Для любого $m \geq 3$ мно-

жество A_m является объединением $g := [(m-1)/2]$ двумерных сфер $S_j := S_{j-1, m-j}^2$, $j = 1, 2, \dots, g$, из которого удалена одна точка сферы S_1 . Каждая сфера S_j состоит из неграссмановых решений, за исключением двух своих “полюсов” $p_j, p_{j+1} \in S_j$, где точка p_j представляет собой диагональное грассманово решение с образом $\langle e_{j-1}, \dots, e_{m-j} \rangle$. Как и в разделе 3, можно рассматривать S_j как “комплексную пленку”, интерполирующую между грассмановыми решениями p_j, p_{j+1} . Точка $p_1 \in S_1$ не принадлежит A_m , поскольку она представляет собой BPS-решение ($u = 1$). Имеем $S_j \cap S_{j+1} = \{p_{j+1}\}$ при каждом $j = 1, 2, \dots, g$, а все остальные сферы S_j попарно не пересекаются. Поэтому множество A_m есть цепочка из g двумерных сфер, последовательно соединяющих точки $p_1, \dots, p_g$ и не имеющих других точек пересечения. Можно было бы еще представить A_m как объединение g непересекающихся экземпляров $S_j \setminus \{p_j\}$ плоскости $\mathbb{C}^1$, но это несколько затемняет структуру особенностей алгебраического многообразия A_m в точках p_j .

6. РЕШЕНИЯ С $e = 4$

Согласно замечанию 2 для любого не-BPS-решения $\Phi \in \mathcal{M}$ энергии $e(\Phi) = 4$ имеем либо $r(\Phi) = 3$, либо $r(\Phi) = 2$. Из п. Б и В утверждения 2 видно, что случай $r(\Phi) = 3$ имеет место тогда и только тогда, когда Φ принадлежит (с точностью до некоммутативного сдвига и эквивалентности) сфере (3.1), отвечающей $G = \langle e_1, R_\alpha - e_0 \rangle$ и $B = \langle e_0, e_1, e_2, R_\alpha \rangle$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Поэтому $\mathcal{M}(4, 3, 2) \cong \mathbb{C}_\lambda^1 \times (\mathbb{C}_\alpha^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}_c^1$, где λ параметризует некоммутативные сдвиги, а c – все не-BPS-решения вида (3.1) при каждом фиксированном $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Из утверждения 6 видно, что случай $r(\Phi) = 2$ имеет место тогда и только тогда, когда Φ принадлежит (с точностью до некоммутативного сдвига и эквивалентности) сфере S_{03}^2 , задаваемой формулой (5.1) для $s = 0$, $t = 3$, причем из этой сферы удалена одна точка. Таким образом, $\mathcal{M}(4, 2, 2) \cong \mathbb{C}_\lambda^1 \times \mathbb{C}_c^1$, где $c \in \mathbb{C}$ параметризует все не-BPS-решения вида (5.1) с $s = 0$, $t = 3$ (связь между c и (k, l) задается формулами (4.1)). Этим доказан п. А следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. *А. С точностью до некоммутативного сдвига и эквивалентности каждое не-BPS-решение $\Phi \in \mathcal{M}$ с $e(\Phi) = 4$ задается либо формулой $\Phi = (I - 2P^0)(I - 2Q(c))$, где $\text{im } P^0 := \langle e_0 \rangle$ и $\text{im } Q(c) := \langle e_1, e_2, e_0 + se_3 \rangle$ для всех $c \in \mathbb{C}$ (это в точности формула (5.1) при $s = 0$, $t = 3$, $k \neq -1$), либо формулой $\Phi = (I - 2P^0)(I - 2P(c, \alpha))$, где $\text{im } P(c, \alpha) := \langle e_1, e_0 + se_2, R_\alpha - e_0 \rangle$ для всех $c \in \mathbb{C}$ и $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (это частный случай формулы (3.1)). Таким образом, имеем $\mathcal{M}(4, 2, 2) \cong \mathbb{C}^2$ и $\mathcal{M}(4, 3, 2) \cong \mathbb{C}^3 \setminus \mathbb{C}^2$.*

Б. Множество $\mathcal{M}(4, 3, 2) \cup \mathcal{M}(4, 2, 2)$ всех не-BPS-решений энергии $e(\Phi) = 4$ является вещественно-аналитическим подмногообразием в $U(H)$, изоморфным $\mathbb{C}^3$. Его замыкание в $U(H)$ есть вещественно-аналитическое подмногообразие, изоморфное $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2$. Переход к этому замыканию осуществляется добавлением некоторых BPS-решений энергии $e(\Phi) = 4$ и канонического ранга $r(\Phi) \leq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Осталось доказать п. Б. Пользуясь определением (2.1), представим все элементы множества $\mathcal{M}(4, 2, 2)$ как пределы элементов $\mathcal{M}(4, 3, 2)$ по формуле⁴⁾

$$Q(c) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} P\left(-\frac{\sqrt{3}c}{\alpha}, \alpha\right).$$

Это позволяет нам вещественно-аналитически и взаимно однозначно параметризовать замыкание множества $\mathcal{M}(4, 3, 2) \cup \mathcal{M}(4, 2, 2)$ в $U(H)$ посредством многообразия $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2$. Действительно, покроем $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2$ двумя координатными картами $(c', \alpha, \lambda) \in \mathbb{C}^3$ и $(c'', \alpha, \lambda) \in \mathbb{C}^3$ с функцией перехода $c'' = 1/c'$. Вложим первую карту в $U(H)$ по формуле $\Phi(c', \alpha, \lambda) := U_\lambda(I - 2P^0)(I - 2P_1(c', \alpha))U_\lambda^*$, где U_λ есть некоммутативный сдвиг (см. раздел 3), а ортопроектор $P_1(c', \alpha)$ задан формулой

$$\text{im } P_1(c', \alpha) := \left\langle e_1, e_0 + c'e_3 + \sqrt{3}c'\alpha M(\alpha), e_2 + \frac{\alpha e_3}{\sqrt{3}} + \alpha^2 M(\alpha) \right\rangle = \text{im } P\left(-\frac{\sqrt{3}c'}{\alpha}, \alpha\right),$$

причем

$$M(\alpha) := \frac{\sqrt{2}}{\alpha^4} \left(R_\alpha - \sum_{j=0}^3 \frac{\alpha^j e_j}{\sqrt{j!}} \right)$$

есть голоморфная H -значная функция от $\alpha \in \mathbb{C}$ с $M(0) = e_4/\sqrt{12}$. Вторая карта аналогично вкладывается в $U(H)$ по формуле

$$\Psi(c'', \alpha, \lambda) := \Phi\left(\frac{1}{c''}, \alpha, \lambda\right) = U_\lambda(I - 2P^0)(I - 2P_2(c'', \alpha))U_\lambda^*,$$

где

$$\text{im } P_2(c'', \alpha) := \left\langle e_1, c''e_0 + e_3 + \sqrt{3}\alpha M(\alpha), e_2 + \frac{\alpha e_3}{\sqrt{3}} + \alpha^2 M(\alpha) \right\rangle.$$

Векторы, порождающие подпространства $\text{im } P_1(c', \alpha)$ и $\text{im } P_2(c'', \alpha)$, всегда линейно независимы, поскольку уже их проекции на $\langle e_0, e_1, e_2 \rangle$ таковы. Теперь ясно, что замыкание множества $\mathcal{M}(4, 3, 2) \cup \mathcal{M}(4, 2, 2)$ в $U(H)$ получается добавлением к этому множеству следующих семейств BPS-решений: $\mathcal{M}(4, 1, 1) \cong \mathbb{C}^1$ и $\mathcal{M}_1 \cong \mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{C}^1$ (в обозначениях замечания 3). Множество $\mathcal{M}_1$ состоит из всех BPS-решений с кратностями 3, 1 и является одной из двух связных компонент пространства $\mathcal{M}(4, 2, 1)$. Утверждение доказано.

7. РЕШЕНИЯ С $e = 5$

Множества всех не-BPS-решений $\Phi \in \mathcal{M}_0$ энергии $e(\Phi) = 5$ и канонического ранга $r = 4$ или $r = 2$ уже известны: мы имеем $\mathcal{M}(5, 4, 2) \cong D^3 \times \mathbb{C}^1$ для некоторого открытого подмножества $D^3 \subset \mathbb{C}^3$ (см. замечание 5) и $\mathcal{M}(5, 2, 2) \cong \mathbb{C}^1 \times (S_{13}^2 \cup S_{04}^2 \setminus \{\text{pt}\})$ (см. замечание 6). Кроме того, п. Б утверждения 2 описывает две связные компоненты множества $\mathcal{M}(5, 3, 2)$. Обозначим их через $\mathcal{N}_j \cong \mathcal{B}_j \times \mathbb{C}_c^1$, $j = 1, 2$. Здесь $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \cong \mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{C}^1$ – две связные компоненты множества $\mathcal{M}(5, 2, 1)$ (см. п. В утверждения 1), а каждое $\mathcal{N}_j$ состоит из всех не-BPS-решений вида (3.1), для которых $B \in \mathcal{B}_j$. Следующее утверждение завершает описание полной картины.

⁴⁾Если просто фиксировать $c \in \mathbb{C}$ и устремить $\alpha \rightarrow 0$, то предел проекторов $P(c, \alpha)$ будет равен $Q(0)$ независимо от значения c .

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. А. Каждое не-BPS-решение $\Phi \in \mathcal{M}_0$ с $e(\Phi) = 5$ и $r(\Phi) = 3$ либо принадлежит $\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$, либо имеет вид

$$\Phi = U_\lambda(I - 2P_0)(I - 2P(c_1, c_2))U_\lambda^* \quad (7.1)$$

для некоторых $\lambda \in \mathbb{C}$, $c_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $c_2 \in \mathbb{C}$, где U_λ есть некоммутативный сдвиг, а $P_0, P(c_1, c_2)$ – ортопроекторы, заданные формулами

$$\text{im } P_0 = \langle e_0, e_1 \rangle, \quad \text{im } P(c_1, c_2) = \left\langle e_2, e_0 + c_1 e_3, e_1 + c_2 e_3 + \frac{c_1 e_4}{2} \right\rangle. \quad (7.2)$$

Обозначим множество всех таких операторов (7.1) через $\mathcal{N}_3$. Тогда имеем $\mathcal{M}(5, 3, 2) = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 \cup \mathcal{N}_3$. Множества $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3$ являются непересекающимися незамкнутыми вещественно-аналитическими подмногообразиями в $U(H)$, изоморфными $\mathbb{C}^3 \setminus \mathbb{C}^2$.

Б. Замыкания множеств $\mathcal{N}_j$ при $j = 1, 2$ получаются добавлением к ним множеств $\mathcal{B}_j \cup (\mathbb{C}^1 \times S_{04}^2) \subset \mathcal{M}(5, 2, 1) \cup \mathcal{M}(5, 1, 1) \cup \mathcal{M}(5, 2, 2)$ и изоморфны $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2$. Замыкание множества $\mathcal{N}_3$ получается добавлением к нему множества $\mathbb{C}^1 \times (S_{04}^2 \cup S_{13}^2) = \mathcal{M}(5, 1, 1) \cup \mathcal{M}(5, 2, 2)$ и изоморфно прямому произведению $\mathbb{C}^1$ на некоторую компактную комплексную поверхность с одной особой точкой типа конуса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А. Добавляя к Φ канонический отрицательный Φ -унитон, получим новое решение Ψ с $e(\Psi) = 2$. Согласно замечанию 2 можно считать, что $\Psi = I - 2P_D$, где P_D есть ортопроектор на некоторое BPS-подпространство $D \subset H$ размерности 2. Из п. А утверждения 13 работы [5] вытекает, что $\Phi = (I - 2P_D)(I - 2P)$ для некоторого ортопроектора P с $\dim \text{im } P = 3$, удовлетворяющего условиям (1.3) с заменой Φ на $\Psi = I - 2P_D$. Согласно формуле (3.13) из [5] эти условия на пространство $V := \text{im } P$ имеют вид

$$E \ominus D \subset V, \quad (P_D a P_D + P_D^\perp a P_D^\perp) V \subset V, \quad (7.3)$$

где BPS-решение $E \supset D$ размерности $2 + r(\Psi)$ определяется как образ BPS-решения D при добавлении канонического положительного Ψ -унитона (тогда $\text{im } \Psi_+ = E \ominus D$ в силу замечания 1). Применяя P_D к обеим частям второго условия (7.3) и пользуясь инвариантностью D относительно a , получаем, что $a P_D V \subset P_D V$. Таким образом, векторное пространство $P_D V \subset D$ является BPS-подпространством в H . Его размерность может быть равна 0, 1 или 2. Покажем, что первый случай невозможен, второй дает $\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$, а третий дает $\mathcal{N}_3$.

Случай 1. $\dim P_D V = 0$. Тогда $V \perp D$ и исходное решение $\Phi = (I - 2P_D)(I - 2P)$ равно $I - 2P_{D \oplus V}$. При этом второе условие (7.3) принимает вид $aV \subset D \oplus V$, откуда $a(D \oplus V) \subset D \oplus V$, и Φ является BPS-решением вопреки предположению. Следовательно, случай 1 невозможен.

Случай 2. $\dim P_D V = 1$. Тогда векторное подпространство $V' := \{x \in V \mid P_D x = 0\} = V \cap D^\perp$ имеет коразмерность 1 в V , т.е. $\dim V' = 2$. После некоммутативного сдвига можно считать, что одномерное BPS-подпространство $P_D V$ натянуто на вектор $e_0 \in D$. Значит, вектор нормали u к V' в V можно записать в виде

$u = e_0 + \xi$, где $\xi \in D^\perp$. Заметим, что $E \ominus D \subset V'$ в силу первого условия (7.3) и положим $V_1 := V' \ominus (E \ominus D)$. Тогда второе условие (7.3) принимает вид $P_D^\perp aV_1 \subset V'$, $P_D^\perp a\xi \subset V'$ или, эквивалентно,

$$aV_1 \subset M \quad \text{и} \quad a\xi \in M, \quad \text{где} \quad M := D \oplus V' = E \oplus V_1. \quad (7.4)$$

Отсюда $\dim M = 4$, и M является BPS-подпространством. Поскольку $D \ni e_0$, имеем $E \supset \langle e_0, e_1 \rangle$. Поэтому $G := M \ominus \langle e_0 \rangle$ является грассмановым решением энергии $e(\Phi) = 5$ и дефекта 2 (см. начало раздела 3).

Если $\xi = 0$, то исходное решение $\Phi = (I - 2P_D)(I - 2P)$ совпадает с $I - 2P_G$. Поскольку $r(\Phi) = 3$, из п. Б утверждения 2 вытекает, что $\Phi \in \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$. Поэтому будем считать, что $\xi \neq 0$. Тогда $B := M \oplus \langle \xi \rangle$ является BPS-подпространством размерности 5 (это вытекает из (7.4) и того, что $\xi \perp M$ согласно определениям ξ и M). Пусть $k \geq 2$ есть наибольшее целое число такое, что $e_0, e_1, \dots, e_{k-1} \in M$. Тогда $\xi = cP_M^\perp e_k$ для некоторого $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (чтобы убедиться в этом, заметим, что все прообразы всех базисных векторов (2.4) пространства M относительно a лежат опять в M , за исключением $a^{-1}(e_{k-1}) = e_k/\sqrt{k} + \text{const} \cdot e_0$). Отсюда имеем $B = M \oplus \langle e_k \rangle$, что согласуется с обозначениями раздела 3. Полагая $N := P_M^\perp e_k$, мы видим, что $\xi = cN$, $V = V' \oplus \langle e_0 + cN \rangle$ и $B \ominus G = \langle e_0, N \rangle$. Теперь прямая проверка, использующая (7.4) и очень похожая на доказательство утверждения 3, показывает, что $\Phi x = x$ для $x \in B^\perp$, $\Phi x = -x$ для $x \in G$, а сужение Φ на $B \ominus G$ задается матрицей (3.6) в ортонормированном базисе $\langle e_0, N/|N| \rangle$ пространства $B \ominus G$. Таким образом, решение Φ принадлежит сфере (3.1), порожденной грассмановым решением G . Поскольку $r(\Phi) = 3$, из п. Б утверждения 2 получаем, что $\Phi \in \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$.

Случай 3. $\dim P_D V = 2$. Тогда подпространство $V' := V \cap D^\perp$ имеет коразмерность 2 в V , т.е. $\dim V' = 1$. Из включения $V' \supset E \ominus D$ вытекает, что число $\dim(E \ominus D) = r(\Psi)$ тоже равно единице. Поэтому после некоммутативного сдвига можно считать, что $D = \langle e_0, e_1 \rangle$ и $E \ominus D = \langle e_2 \rangle = V'$. Так как $P_D V = V$, то оставшиеся базисные векторы пространства V , ортогональные к V' , можно записать в виде $e_0 + \xi_0$ и $e_1 + \xi_1$, где $\xi_0, \xi_1 \in \langle e_0, e_1, e_2 \rangle^\perp$. Второе условие (7.3) принимает вид

$$P_D^\perp a\xi_0 \in V, \quad e_0 + P_D^\perp a\xi_1 \in V. \quad (7.5)$$

Отсюда получаем $a\xi_0 \in V'$. Поскольку $V' = \langle e_2 \rangle$ и $\xi_0 \in \langle e_0, e_1, e_2 \rangle^\perp$, мы видим, что $\xi_0 = c_1 e_3$ для некоторого $c_1 \in \mathbb{C}$. Второе включение (7.5) можно записать в виде $e_0 + P_D^\perp a\xi_1 = A e_2 + B(e_0 + \xi_0) + C(e_1 + \xi_1)$ для некоторых $A, B, C \in \mathbb{C}$. Сравнивая проекции обеих частей этого равенства на $\langle e_0 \rangle$, а затем на $\langle e_0, e_1 \rangle$, мы находим $B = 1$ и $C = 0$. Следовательно, $\xi_1 = c_1 e_4/2 + c_2 e_3$ для некоторого $c_2 \in \mathbb{C}$. Тем самым V совпадает с пространством $\text{im } P(c_1, c_2)$ из (7.2), а оператор Φ задается формулой (7.1) с $\lambda = 0$. Случай $c_1 = 0$ следует исключить, поскольку операторы (7.1) с $c_1 = 0$ и $\lambda = 0$ имеют канонический ранг $r(\Phi) = 2$ (они образуют сферу S_{13}^2 в обозначениях раздела 5). Все остальные решения (7.1) с $\lambda = 0$ имеют канонический ранг $r(\Phi) = 3$. Действительно, они не могут принадлежать $\mathcal{M}(5, 4, 2)$, поскольку действуют внутри BPS-подпространства с только одним корнем, и не могут принадлежать оставшейся сфере $S_{04}^2 \subset \mathcal{M}(5, 2, 2)$, поскольку не переводят e_1 в $-e_1$.

Б. Утверждения о замыканиях множеств $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ следуют из результатов раздела 3. Чтобы найти замыкание $\mathcal{N}_3$, рассмотрим множество $\mathcal{N}_3^2$ всех операторов (7.1) с $\lambda = 0$. Его замыкание может дополнительно содержать только элементы сфер S_{04}^2 и S_{13}^2 . И обе эти сферы действительно содержатся в указанном замыкании: вводя обозначение $\Phi_0 = I - 2P_G$ для $G = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, мы видим, что $S_{13}^2 \setminus \{\Phi_0\}$ есть координатная ось $\{c_1 = 0\}$ в обозначениях (7.2), а $S_{04}^2 \setminus \{\Phi_0\}$ – координатная ось $\{c'_1 = 0\}$ пространства $\mathbb{C}^2$ с координатами $c'_1 := c_1^{-1}$, $c'_2 := 2c_1^{-1}(1 - c_2c_1^{-1})$, где

$$\text{im } P(c_1, c_2) = \langle e_2, e_3 + c'_1 e_0, e_4 + c'_2 e_0 + 2c'_1 e_1 \rangle. \quad (7.6)$$

Далее будем обозначать замыкание $\mathcal{N}_3^2$ через $\mathcal{R}^2$. Из (7.6) и (7.2) видно, что все точки комплексной поверхности $\mathcal{R}^2 = \mathcal{N}_3^2 \cup S_{13}^2 \cup S_{04}^2$ гладкие, кроме, может быть, Φ_0 . Чтобы убедиться в том, что точка Φ_0 является особой, положим $\gamma_1 := c_1$ и $\gamma_2 := c_2^{-1}$. Тогда

$$\text{im } P(c_1, c_2) = \langle e_2, e_0 + Ae_1 + Be_4, e_3 + Ce_1 + De_4 \rangle, \quad (7.7)$$

где $A = -\gamma_1\gamma_2$, $B = -\gamma_1^2\gamma_2/2$, $C = \gamma_2$, $D = \gamma_1\gamma_2/2$. Поэтому поверхность $\mathcal{R}^2$ задается уравнениями $A + 2D = 0$, $AD = BC$ в пространстве $\mathbb{C}^4$ с координатами A, B, C, D . Начало координат Φ_0 пространства $\mathbb{C}^4$ является особой точкой типа конуса на $\mathcal{R}^2$ (см. замечание 8 ниже). Это утверждение п. Б доказано, поскольку замыкание множества $\mathcal{N}_3$ равно $\mathcal{R}^2 \times \mathbb{C}_\lambda^1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Обобщая описание случая 2 из доказательства п. А утверждения 8, можно показать, что все решения $\Phi \in \mathcal{M}_0$ с $r(\Phi) = e(\Phi) - 2$ и $\dim P_D V = 1$ принадлежат некоторым сферам (3.1) с точностью до некоммутативного сдвига. Описание случая 3 также допускает обобщение, в результате которого мы получаем двумерную “комплексную пленку” решений с $r = e - 2$, интерполирующую между BPS-решением $B = M_1 \oplus \langle e_4 \rangle = M_2 \oplus \langle e_3, e_4 \rangle$ энергии e и двумя грассмановыми решениями $G_1 = M_1 \ominus \langle e_0 \rangle$, $G_2 = M_2 \ominus \langle e_0, e_1 \rangle$ энергии e и дефекта 2, 4 соответственно. Эта конструкция представляет собой следующий по сложности шаг по сравнению с конструкциями раздела 3. Если энергия e достаточно велика, то можно пойти дальше и получить “комплексные пленки” более высокой размерности, интерполирующие между элементами большего множества грассмановых решений.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Комплексная поверхность $\mathcal{R}^2$ биголоморфна проективной компактификации стандартного конуса $\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$, вершина которого соответствует решению $\Phi_0 = I - 2P_G$. В этом легко убедиться, полагая $A = -\sqrt{2}x$, $B = y - z$, $C = y + z$, $D = x/\sqrt{2}$. Поскольку замыкания всех $\mathcal{N}_j$, $j = 1, 2, 3$, содержат $\mathbb{C}_\lambda^1 \times S_{04}^2$, можно представлять себе замыкание множества $\mathcal{M}(5, 3, 2)$ в виде “книги” с тремя страницами $\bar{\mathcal{N}}_1, \bar{\mathcal{N}}_2, \bar{\mathcal{N}}_3$ (комплексной размерности 3) и “переплетом” $\mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}P^1$. Заметим еще, что формулы (7.2), (7.6) и (7.7) представляют собой не что иное, как координатные представления поверхности $\mathcal{R}^2$ в трех различных стандартных картах грассманова многообразия $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$, где $\mathbb{C}^4 = \langle e_0, e_1, e_3, e_4 \rangle$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Полученные результаты подтверждают гипотезу о реализуемых нулевых модах гессиана функционала энергии (см. [5], замечание 10) для случая $e \leq 5$. Действительно, обозначим через Φ_0 диагональное BPS-решение энергии e .

Тогда $r(\Phi_0) = 1$. Если $e \in \{3, 4\}$, то единственное комплексное касательное направление в точке Φ_0 к пространству неграссмановых решений есть касательное пространство к $S_{0,e-1}^2 \subset \mathcal{M}(e, 2, 2)$. Если же $e = 5$, то реализуемые нулевые моды гессаана функционала энергии в точке Φ_0 образуют комплексное двумерное касательное пространство к комплексной поверхности $\mathcal{R}^2$ в этой точке. Для любых значений e формулы (4.5), (4.6) работы [5] задают $g := [(e-1)/2]$ линейно независимых комплексных нулевых мод, линейная оболочка которых совпадает с касательным пространством в точке Φ_0 к g -мерной “комплексной пленке”, упомянутой в замечании 7. Задача заключается в доказательстве отсутствия других линейно независимых касательных направлений в точке Φ_0 к пространству неграссмановых решений энергии e . Эта задача остается нерешенной для $e \geq 6$.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обозначим через $\mathcal{M}(e) \subset U(H)$ множество всех решений $\Phi \in \mathcal{M}_0$ с $e(\Phi) = e$. Мы показали, что множества $\mathcal{M}(1), \mathcal{M}(2), \dots, \mathcal{M}(5)$ равны соответственно

$$\mathbb{C}^1, \quad \mathbb{C}^2, \quad \mathbb{C}^3 \cup A_1^2, \quad \mathbb{C}^4 \cup A_1^3, \quad \mathbb{C}^5 \cup A_1^4 \cup A_2^3, \quad (8.1)$$

где $\mathbb{C}^e$ – множество всех BPS-решений энергии e (см. раздел 2), а каждое A_s^k – некоторое неприводимое алгебраическое многообразие размерности k над $\mathbb{C}$. Здесь и далее имеется в виду, что все эти многообразия вещественно-аналитически вложены в $U(H)$. Если $e \in \{3, 4\}$, то многообразия $A_1^{e-1} \cong \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^{e-2}$ и их пересечения $A_1^{e-1} \cap \mathbb{C}^e \cong \mathbb{C}^{e-2}$ с BPS-компонентой являются гладкими (см. разделы 4, 6). Однако алгебраические многообразия $A_1^4 \cong \mathbb{C}P^1 \times M^3$ и $A_2^3 \cong \mathcal{R}^2 \times \mathbb{C}^1$ уже не гладкие (см. замечания 5 и 8). При этом $\mathbb{C}^5 \cap A_1^4 \cong M^3$, $\mathbb{C}^5 \cap A_2^3 \cong \mathbb{C}^1$ и $A_1^4 \cap A_2^3 \cong \mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}P^1$. В частности, множества $\mathcal{M}(e)$ линейно связны при $e \leq 5$.

Мы имеем также полное описание множеств $\mathcal{M}(e, r, u)$ (см. (1.5)) для всех случаев, когда $u = 1$ или $r \in \{1, 2, e-1, e\}$ (см. п. В утверждения 1 и замечания 2, 5, 6): $\mathcal{M}(e, r, 1)$ есть конечное дизъюнктивное объединение открытых связных подмножеств $\mathbb{C}^r$ при $1 \leq r \leq e$, $\mathcal{M}(e, e-1, 2)$ есть открытое связное подмножество в $\mathbb{C}^{e-1}$, $\mathcal{M}(e, 2, 2)$ есть прямое произведение $\mathbb{C}^1$ на цепочку из $[(e-1)/2]$ экземпляров $\mathbb{C}P^1$, из которой удалена одна точка, а все остальные множества $\mathcal{M}(e, r, u)$ в указанном диапазоне значений e, r, u являются пустыми. Вне этого диапазона известно только то, что $\mathcal{M}(5, 3, 2)$ есть объединение трех непересекающихся экземпляров $\mathbb{C}^3 \setminus \mathbb{C}^2$ и что все множества $\mathcal{M}(e, e-2, u)$ пусты при $u \geq 3$.

Эти результаты позволяют высказать следующие гипотезы, которые не только указывают возможные направления для дальнейших исследований, но и суммируют основные моменты полученного в настоящей работе “экспериментального материала”.

1. Имеем $\mathcal{M}(e) = \mathbb{C}^e \cup A_1^{e-1} \cup \dots \cup A_g^{e-g}$, где $g = [(e-1)/2]$, $\mathbb{C}^e$ – множество BPS-решений, а каждое A_s^{e-s} есть неприводимое алгебраическое многообразие размерности $e-s$ над $\mathbb{C}$, содержащее множество $\mathcal{M}(e, 1, 1) \subset \mathbb{C}^e$. В частности, пространство $\mathcal{M}(e)$ всегда связно.

2. Множество $\mathcal{M}(e, r, u)$ либо пусто, либо r -мерно над $\mathbb{C}$.

3. Любое решение $\Phi \in \mathcal{M}_0$ подчинено некоторому BPS-решению $\Phi_0 = I - 2P_0$ той же энергии, т.е. имеем $\dim \operatorname{im} P_0 = e(\Phi)$ и $\Phi x = x$ для всех $x \in (\operatorname{im} P_0)^\perp$.

4. Для всякого BPS-решения Φ_0 множество всех подчиненных Φ_0 решений $\Phi \in \mathcal{M}(e)$ имеет размерность $\sum_{j=1}^r [(k_j - 1)/2]$ над $\mathbb{C}$ (где $k_1, \dots, k_r$ суть кратности Φ_0 в смысле замечания 1), содержит Φ_0 в качестве гладкой точки и является трансверсальным к множеству всех BPS-решений в этой точке.

5. Имеем $r(\Phi) \geq u(\Phi)$ для всех решений Φ , причем для диагональных Φ (см. [5], п. 4.1) имеет место равенство. Множество $\mathcal{M}(e, r, u)$ непусто тогда и только тогда, когда $e \geq r \geq u$ и $2e \geq u(u + 1)$.

Благодарности. Автор благодарен профессору О. Лехтенфельду за интерес к работе и многочисленные полезные обсуждения. Работа выполнена в рамках совместного проекта RFFI-DFG 436 RUS 113/669. Она также поддержана грантами РФФИ (№ 05-01-00981, 05-01-00498) и Президентской программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-9429.2006.1).

Список литературы

- [1] W. J. Zakrzewski, *Low Dimensional Sigma Models*, Adam Hilger, Bristol, 1989.
- [2] Ё. Давидов, А. Г. Сепреев, *УМН*, **48:3** (1993), 3–96.
- [3] О. Lechtenfeld, A. D. Popov, *JHEP*, **11** (2001), 40.
- [4] A. V. Domrin, O. Lechtenfeld, S. Petersen, *JHEP*, **03** (2005), 045.
- [5] А. В. Домрин, *ТМФ*, **154:2** (2008), 220–239.
- [6] J. Murugan, R. Adams, *JHEP*, **12** (2002), 073; О. Foda, I. Jack, D. R. T. Jones, *Phys. Lett. B*, **547:1–2** (2002), 79–84.
- [7] А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их применения*, Наука, М., 1987.
- [8] R. Rochberg, N. Weaver, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **129:9** (2001), 2679–2687.
- [9] А. В. Комлов, *ТМФ*, **153:3** (2007), 347–357.

Поступила в редакцию 31.07.2007