Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Зиновьев, Лоренц-ковариантные обобщенные функции со спектральными условиями, *ТМФ*, 2008, том 156, номер 3, 328–350

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6251>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 13:03:07

© 2008 г.

Ю. М. Зиновьев*

ЛОРЕНЦ-КОВАРИАНТНЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ СО СПЕКТРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Получено описание лоренц-ковариантных обобщенных функций умеренного роста с носителями в произведении замкнутых верхних световых конусов.

Ключевые слова: лоренц-ковариантные обобщенные функции.

1. ВВЕДЕНИЕ

Физические воззрения на квантовые поля обычно формулируются в виде системы аксиом [1]–[4]. Вакуумные ожидания произведений квантовых полей являются преобразованиями Фурье лоренц-ковариантных обобщенных функций умеренного роста с носителями в произведении замкнутых верхних световых конусов [2]–[4]. Лоренц-инвариантные обобщенные функции одной переменной $x \in \mathbb{R}^4$ изучались в работах [5], [6]. Описание лоренц-инвариантных обобщенных функций умеренного роста с носителями, лишь по одному аргументу лежащими в гиперboloиде $\{x \in \mathbb{R}^4: x^0 > 0, (x, x) \geq \mu > 0\}$, было получено в работе [7]. Авторы работ [5]–[7] стремились получить описание лоренц-инвариантных обобщенных функций в терминах обобщенных функций, заданных на пространстве орбит группы Лоренца. Это пространство орбит имеет сложную структуру. В работе [8] замечено, что обобщенная функция умеренного роста с носителем в замкнутом верхнем световом конусе может быть представлена как результат применения некоторой степени волнового оператора к дифференцируемой функции с носителем в замкнутом верхнем световом конусе. Для описания лоренц-ковариантных дифференцируемых функций граница замкнутого верхнего светового конуса не важна. Мера этой границы равна нулю.

В этой работе мы получим описание лоренц-ковариантных обобщенных функций умеренного роста с носителями в произведении замкнутых верхних световых конусов. Таким образом будет получено описание вакуумных ожиданий от произведений квантовых полей, удовлетворяющих свойству лоренц-ковариантности и спектральному условию [2]–[4].

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: zinoviev@mi.ras.ru

Мы изучим также специальный класс лоренц-ковариантных обобщенных функций. Эти обобщенные функции являются суммами обобщенных функций, похожих на произведения одномерных лоренц-ковариантных обобщенных функций.

2. ЛОРЕНЦ-КОВАРИАНТНОСТЬ И СПЕКТРАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ

Определим для комплексной (2×2) -матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

следующие (2×2) -матрицы:

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad A^* = (\bar{A})^T. \quad (2.2)$$

Матрица (2.1) называется эрмитовой, если $A^* = A$. Выберем следующий базис в пространстве эрмитовых (2×2) -матриц:

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Сопоставим вектору $x \in \mathbb{R}^4$ эрмитову матрицу

$$\tilde{x} = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu \sigma^\mu \quad (2.4)$$

и введем билинейную форму

$$(x, y) = x^0 y^0 - \sum_{k=1}^3 x^k y^k, \quad (2.5)$$

при этом (x, x) – метрика Минковского.

Группа $SL(2, \mathbb{C})$ состоит из комплексных (2×2) -матриц (2.1) с определителями, равными единице. Группа $SU(2)$ является максимальной компактной подгруппой группы $SL(2, \mathbb{C})$. Она образована матрицами из группы $SL(2, \mathbb{C})$, удовлетворяющими уравнению $AA^* = \sigma^0$. Опишем неприводимые представления группы $SU(2)$. Рассмотрим полуцелые числа $l \in \mathbb{Z}_+/2$, т.е. $l = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$. Определим представление группы $SU(2)$ на пространстве многочленов степени не выше $2l$:

$$T_l(A)\phi(z) = (A_{12}z + A_{22})^{2l} \phi\left(\frac{A_{11}z + A_{21}}{A_{12}z + A_{22}}\right). \quad (2.6)$$

Рассмотрим полуцелые числа $n = -l, -l+1, \dots, l-1, l$ и выберем базис многочленов, состоящий из функций

$$\psi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{(l-n)!(l+n)!}} z^{l-n}. \quad (2.7)$$

Из определений (2.6), (2.7) следует

$$T_l(A)\psi_n(z) = \sum_{m=-l}^l \psi_m(z)t_{mn}^l(A),$$

где

$$t_{mn}^l(A) = \sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!} \times \\ \times \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{A_{11}^{l-m-j} A_{12}^j A_{21}^{m-n+j} A_{22}^{l+n-j}}{\Gamma(j+1)\Gamma(l-m-j+1)\Gamma(m-n+j+1)\Gamma(l+n-j+1)} \quad (2.8)$$

и $\Gamma(z)$ – гамма-функция. Функция $(\Gamma(z))^{-1}$ равна нулю для $z = 0, -1, -2, \dots$, следовательно, ряд (2.8) является многочленом.

Соотношение (2.6) определяет представление группы $SU(2)$. Таким образом, многочлен (2.8) определяет представление группы $SU(2)$

$$t_{mn}^l(AB) = \sum_{k=-l}^l t_{mk}^l(A)t_{kn}^l(B). \quad (2.9)$$

Это $(2l+1)$ -мерное неприводимое представление (см. книгу [9], главу III, раздел 2.3).

Соотношения (2.8), (2.9) имеют аналитическое продолжение на матрицы из группы $SL(2, \mathbb{C})$. Делая замену $j \rightarrow j+n-m$ переменной суммирования в равенстве (2.8), получаем

$$t_{mn}^l(A) = t_{nm}^l(A^T). \quad (2.10)$$

Согласно [9] (см. главу III, раздел 8.3) для любой матрицы $A \in SU(2)$ имеем

$$t_{m_1 n_1}^{l_1}(A)t_{m_2 n_2}^{l_2}(A) = \\ = \sum_{l_3 \in \mathbb{Z}_+/2} \sum_{m_3, n_3 = -l_3}^{l_3} C(l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, m_3) C(l_1, l_2, l_3; n_1, n_2, n_3) t_{m_3 n_3}^{l_3}(A). \quad (2.11)$$

Коэффициент Клебша–Гордана $C(l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, m_3)$ отличен от нуля лишь для $m_3 = m_1 + m_2$ и полужелых чисел $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}_+/2$, удовлетворяющих условию треугольника: можно построить треугольник со сторонами длины l_1, l_2, l_3 и с целым периметром $l_1 + l_2 + l_3$. Это означает, что l_3 является одним из полужелых чисел $|l_1 - l_2|, |l_1 - l_2| + 1, \dots, l_1 + l_2 - 1, l_1 + l_2$. Пусть числа $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}_+/2$ удовлетворяют условию треугольника, а $m_i = -l_i, -l_i + 1, \dots, l_i - 1, l_i$, $i = 1, 2, 3$, $m_3 = m_1 + m_2$. Тогда согласно [9] (см. главу III, раздел 8.3)

$$C(l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, m_3) = (-1)^{l_1 - l_3 + m_2} (2l_3 + 1)^{1/2} \times \\ \times \left(\frac{(l_1 + l_2 - l_3)! (l_1 + l_3 - l_2)! (l_2 + l_3 - l_1)! (l_3 - m_3)! (l_3 + m_3)!}{(l_1 + l_2 + l_3 + 1)! (l_1 - m_1)! (l_1 + m_1)! (l_2 - m_2)! (l_2 + m_2)!} \right)^{1/2} \times \\ \times \sum_{j=0}^{l_2 + l_3 - l_1} \frac{(-1)^j (l_1 + m_1 + j)! (l_2 + l_3 - m_1 - j)!}{j! \Gamma(l_3 - m_3 - j + 1) \Gamma(l_1 - l_2 + m_3 + j + 1) (l_2 + l_3 - l_1 - j)!}. \quad (2.12)$$

Пусть dA – нормированная мера Хаара на группе $SU(2)$. Согласно [9] (глава III, раздел 8.3)

$$\begin{aligned} C(l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, m_3) C(l_1, l_2, l_3; n_1, n_2, n_3) = \\ = (2l_3 + 1) \int_{SU(2)} dA t_{m_1 n_1}^{l_1}(A) t_{m_2 n_2}^{l_2}(A) \overline{t_{m_3 n_3}^{l_3}(A)}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Коэффициенты многочлена (2.8) вещественны. С помощью соотношений (2.10) и равенства $A^* = A^{-1}$ перепишем равенство (2.13) в виде

$$\begin{aligned} C(l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, m_3) C(l_1, l_2, l_3; n_1, n_2, n_3) = \\ = (2l_3 + 1) \int_{SU(2)} dA t_{m_1 n_1}^{l_1}(A) t_{m_2 n_2}^{l_2}(A) t_{n_3 m_3}^{l_3}(A^{-1}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Если полуцелые числа $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}_+/2$ удовлетворяют условию треугольника, то согласно [9] (глава III, раздел 8.3)

$$C(l_1, l_2, l_3; l_1, -l_2, l_1 - l_2) = \left(\frac{(2l_3 + 1)(2l_1)! (2l_2)!}{(l_1 + l_2 - l_3)! (l_1 + l_2 + l_3 + 1)!} \right)^{1/2}. \quad (2.15)$$

Выберем в равенстве (2.14) $n_1 = l_1$, $n_2 = -l_2$. Тогда из соотношений (2.9), (2.14) и инвариантности меры Хаара dA следует, что

$$\begin{aligned} C(l_1, l_2, l_3; l_1, -l_2, l_1 - l_2) \sum_{n_1=-l_1}^{l_1} \sum_{n_2=-l_2}^{l_2} t_{m_1 n_1}^{l_1}(A) t_{m_2 n_2}^{l_2}(A) C(l_1, l_2, l_3; n_1, n_2, m_3) = \\ = (2l_3 + 1) \int_{SU(2)} dB \left(\sum_{n_1=-l_1}^{l_1} t_{m_1 n_1}^{l_1}(A) t_{n_1 l_1}^{l_1}(B) \right) \times \\ \times \left(\sum_{n_2=-l_2}^{l_2} t_{m_2 n_2}^{l_2}(A) t_{n_2, -l_2}^{l_2}(B) \right) t_{l_1 - l_2, m_3}^{l_3}(B^{-1}) = \\ = (2l_3 + 1) \int_{SU(2)} dB t_{m_1 l_1}^{l_1}(AB) t_{m_2, -l_2}^{l_2}(AB) t_{l_1 - l_2, m_3}^{l_3}(B^{-1}) = \\ = (2l_3 + 1) \int_{SU(2)} dB t_{m_1 l_1}^{l_1}(B) t_{m_2, -l_2}^{l_2}(B) t_{l_1 - l_2, m_3}^{l_3}(B^{-1}A) = \\ = \sum_{n_3=-l_3}^{l_3} (2l_3 + 1) \int_{SU(2)} dB t_{m_1 l_1}^{l_1}(B) t_{m_2, -l_2}^{l_2}(B) t_{l_1 - l_2, n_3}^{l_3}(B^{-1}) t_{n_3 m_3}^{l_3}(A) = \\ = C(l_1, l_2, l_3; l_1, -l_2, l_1 - l_2) \sum_{n_3=-l_3}^{l_3} C(l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, n_3) t_{n_3 m_3}^{l_3}(A). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Из соотношений (2.15), (2.16) следует равенство

$$\begin{aligned} \sum_{n_1=-l_1}^{l_1} \sum_{n_2=-l_2}^{l_2} t_{m_1 n_1}^{l_1}(A) t_{m_2 n_2}^{l_2}(A) C(l_1, l_2, l_3; n_1, n_2, m_3) = \\ = \sum_{n_3=-l_3}^{l_3} C(l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, n_3) t_{n_3 m_3}^{l_3}(A), \end{aligned} \quad (2.17)$$

которое можно аналитически продолжить на любую матрицу из группы $SL(2, \mathbb{C})$.

Рассмотрим для натуральных чисел m, n и полуцелых чисел $l_1, \dots, l_{n+1}, \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1} \in \mathbb{Z}_+/2$, $m_i = -l_i, -l_i + 1, \dots, l_i - 1$, $l_i, \dot{m}_i = -\dot{l}_i, -\dot{l}_i + 1, \dots, \dot{l}_i - 1$, $\dot{l}_i, i = 1, \dots, n+1$, семейство обобщенных функций

$$F_{m_1, \dots, m_{n+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(x_1, \dots, x_m) \in S'(\mathbb{R}^{4m}).$$

Это семейство называется лоренц-ковариантной обобщенной функцией, если для любой матрицы $A \in SL(2, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} F_{m_1, \dots, m_{n+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(A\tilde{x}_1 A^*, \dots, A\tilde{x}_m A^*) = \sum_{k_1=-l_1}^{l_1} \dots \sum_{k_{n+1}=-l_{n+1}}^{l_{n+1}} \sum_{\dot{k}_1=-\dot{l}_1}^{\dot{l}_1} \dots \\ \dots \sum_{\dot{k}_{n+1}=-\dot{l}_{n+1}}^{\dot{l}_{n+1}} \left(\prod_{i=1}^{n+1} t_{m_i k_i}^{l_i}(A) t_{\dot{m}_i \dot{k}_i}^{\dot{l}_i}(\bar{A}) \right) F_{k_1, \dots, k_{n+1}; \dot{k}_1, \dots, \dot{k}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m), \end{aligned} \quad (2.18)$$

где (2×2) -матрица $\tilde{x}$ задана соотношением (2.4). Полуцелые числа $l_1, \dots, l_{n+1}, \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}$ в (2.18) не произвольны. Выберем в равенстве (2.18) матрицу $A = -\sigma^0$. Для этой матрицы

$$A\tilde{x}_j A^* = \tilde{x}_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Из определения (2.8) следует, что

$$t_{m_j k_j}^{l_j}(-\sigma^0) = (-1)^{2l_j} \delta_{m_j k_j}.$$

Следовательно, равенство (2.18) справедливо для матрицы $A = -\sigma^0$, если

$$(-1)^{2(l_1 + \dots + l_{n+1} + \dot{l}_1 + \dots + \dot{l}_{n+1})} = 1,$$

т.е. сумма $l_1 + \dots + l_{n+1} + \dot{l}_1 + \dots + \dot{l}_{n+1}$ является целым числом. Далее мы предполагаем, что это условие всегда выполнено.

Следуя работе [8], мы получим представление для обобщенной функции умеренного роста с носителем в замкнутом верхнем световом конусе

$$\bar{V}_+ = \{x \in \mathbb{R}^4: x^0 \geq 0, (x, x) \geq 0\}.$$

ЛЕММА 1. Пусть обобщенная функция $F(x) \in S'(\mathbb{R}^4)$ имеет носитель в замкнутом верхнем световом конусе. Тогда существует такое натуральное число q , что

$$F(x) = (\partial_x, \partial_x)^q f(x), \quad (2.19)$$

$$(\partial_x, \partial_x) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \right)^2 - \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)^2, \quad (2.20)$$

где дифференцируемая функция $f(x)$ с носителем в замкнутом верхнем световом конусе полиномиально ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем функцию-ступеньку

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

Согласно [10] (см. раздел 30, формулы (126), (146))

$$\frac{1}{8\pi} (\partial_x, \partial_x)^2 (\theta(x^0) \theta((x, x))) = \delta(x). \quad (2.22)$$

Отсюда следует, что для любого натурального числа $q \geq 2$

$$\frac{1}{2\pi 4^{q-1} (q-2)! (q-1)!} (\partial_x, \partial_x)^q ((x, x)^{q-2} \theta(x^0) \theta((x, x))) = \delta(x). \quad (2.23)$$

Для любого вектора $x \in \bar{V}_+$ пересечение носителя функции

$$(x - y, x - y)^{q-2} \theta(x^0 - y^0) \theta((x - y, x - y))$$

как функции переменной y с конусом $\bar{V}_+$ компактно. Эта функция $2(q-3)$ раз дифференцируема. Пусть обобщенная функция $F(x) \in S'(\mathbb{R}^4)$ имеет носитель в конусе $\bar{V}_+$. Тогда для достаточно большого натурального числа q функция

$$f(x) = \frac{1}{2\pi 4^{q-1} (q-2)! (q-1)!} \int d^4 y F(y) (x - y, x - y)^{q-2} \theta(x^0 - y^0) \theta((x - y, x - y)) \quad (2.24)$$

дифференцируема и имеет носитель в конусе $\bar{V}_+$. Эта функция полиномиально ограничена. ■

Рассмотрим соотношение (2.18) для простейшего случая $m = n = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Любая обобщенная функция $F_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(x) \in S'(\mathbb{R}^4)$ с носителем в замкнутом верхнем световом конусе, удовлетворяющая соотношению ковариантности (2.18) для $m = n = 1$, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \int d^4 x F_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(x) \phi(x) = \\ = \sum_{l_3 \in \mathbb{Z}_+/2} \sum_{m_3, \dot{m}_3 = -l_3}^{l_3} C(l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, m_3) C(\dot{l}_1, \dot{l}_2, l_3; \dot{m}_1, \dot{m}_2, \dot{m}_3) \times \\ \times \int d^4 x \theta(x^0) \theta((x, x)) t_{m_3 \dot{m}_3}^{l_3}(\tilde{x}) f^{l_1, l_2, l_3; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(\sqrt{(x, x)}) (\partial_x, \partial_x)^q \phi(x), \end{aligned} \quad (2.25)$$

где $\phi(x) \in S(\mathbb{R}^4)$, q – натуральное число, коэффициент $C(l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, m_3)$ задан соотношением (2.12), (2×2) -матрица $\tilde{x}$ – соотношением (2.4), многочлен $t_{mn}^l(A)$ – соотношением (2.8), дифференцируемая функция $f^{l_1, l_2, l_3; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(s)$ с носителем на положительной полуоси полиномиально ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коэффициент $C(l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, m_3)$ не равен нулю лишь для чисел $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}_+/2$, удовлетворяющих условию треугольника. Следовательно, суммы в правой части равенства (2.25) конечны.

Функция $f^{l_1, l_2, l_3; i_1, i_2}(s)$ полиномиально ограничена, следовательно, интегралы в правой части равенства (2.25) сходятся абсолютно. Правая часть равенства (2.25) определяет обобщенную функцию из $S'(\mathbb{R}^4)$.

Из формул (2.10), (2.17) следует, что правая часть равенства (2.25) удовлетворяет соотношению ковариантности (2.18) для $m = n = 1$.

Докажем, что любая обобщенная функция из $S'(\mathbb{R}^4)$ с носителем в конусе $\bar{V}_+$, удовлетворяющая соотношению ковариантности (2.18) для $m = n = 1$, имеет вид (2.25).

Если носитель обобщенной функции $F_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; i_1, i_2}(x) \in S'(\mathbb{R}^4)$ лежит в конусе $\bar{V}_+$, то справедливо представление (2.19), где дифференцируемая функция $f_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; i_1, i_2}(x)$ задана равенством (2.24).

Введем для открытого верхнего светового конуса

$$V_+ = \{x \in \mathbb{R}^4 : x^0 > 0, (x, x) > 0\}$$

координаты

$$\tilde{x} = \mu g(t, z) g(t, z)^*, \quad (2.26)$$

где μ – положительное число, t – положительное число, z – комплексное число, а

$$g(t, z) = \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ z & t \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Равенство (2.26) является следствием разложения Гаусса для эрмитовой положительно определенной (2×2) -матрицы.

Введем функцию

$$\begin{aligned} f_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; i_1, i_2}(\mu, g(t, z)) &= \\ &= \sum_{k_1=-l_1}^{l_1} \sum_{k_2=-l_2}^{l_2} \sum_{\dot{k}_1=-\dot{l}_1}^{\dot{l}_1} \sum_{\dot{k}_2=-\dot{l}_2}^{\dot{l}_2} \left(\prod_{i=1}^2 t_{m_i k_i}^{l_i} (g(t, z)^{-1}) t_{\dot{m}_i \dot{k}_i}^{i_i} (\overline{g(t, z)^{-1}}) \right) \times \\ &\times f_{k_1, k_2; \dot{k}_1, \dot{k}_2}^{l_1, l_2; i_1, i_2}(\mu g(t, z) g(t, z)^*). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Функция $f_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; i_1, i_2}(\tilde{x})$, определенная равенством (2.24), удовлетворяет соотношению ковариантности (2.18) для $m = n = 1$. Следовательно, для любой матрицы A типа (2.27)

$$f_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; i_1, i_2}(\mu, Ag(t, z)) = f_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; i_1, i_2}(\mu, g(t, z)). \quad (2.29)$$

Выберем базис алгебры Ли группы матриц (2.27):

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Из равенства (2.29) следуют три соотношения:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial s} f_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(\mu, e^{sa_1} g(t, z)) \right|_{s=0} &= \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial \operatorname{Re} z} f_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(\mu, g(t, z)) = 0, \\ \left. \frac{\partial}{\partial s} f_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(\mu, e^{sa_2} g(t, z)) \right|_{s=0} &= \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial \operatorname{Im} z} f_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(\mu, g(t, z)) = 0, \\ \left. \frac{\partial}{\partial s} f_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(\mu, e^{sa_3} g(t, z)) \right|_{s=0} &= \\ &= -\frac{1}{2} \left(\operatorname{Re} z \frac{\partial}{\partial \operatorname{Re} z} + \operatorname{Im} z \frac{\partial}{\partial \operatorname{Im} z} + t \frac{\partial}{\partial t} \right) f_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(\mu, g(t, z)) = 0, \end{aligned} \quad (2.30)$$

из которых вытекает, что функция (2.28) не зависит от переменной $g(t, z)$. Поэтому из определения (2.28) имеем

$$f_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(\mu, g(t, z)) = f_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(\mu, \sigma^0) = f_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(\mu \sigma^0). \quad (2.31)$$

Из соотношений (2.9), (2.28) и (2.31) получаем

$$\begin{aligned} f_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(\mu g(t, z) g(t, z)^*) &= \\ &= \sum_{k_1=-l_1}^{l_1} \sum_{k_2=-l_2}^{l_2} \sum_{\dot{k}_1=-\dot{l}_1}^{\dot{l}_1} \sum_{\dot{k}_2=-\dot{l}_2}^{\dot{l}_2} \left(\prod_{i=1}^2 t_{m_i k_i}^{l_i}(g(t, z)) \overline{t_{\dot{m}_i \dot{k}_i}^{\dot{l}_i}(g(t, z))} \right) \times \\ &\times f_{k_1, k_2; \dot{k}_1, \dot{k}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(\mu \sigma^0). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Выберем в (2.24) такое натуральное число q , что функция $f_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(\tilde{x})$ дифференцируема $l_1 + l_2 + \dot{l}_1 + \dot{l}_2 + 1$ раз (соотношение ковариантности (2.18) предполагает, что $l_1 + l_2 + \dot{l}_1 + \dot{l}_2$ является целым неотрицательным числом). Носитель этой функции лежит в конусе $\bar{V}_+$. Следовательно, ее первые $l_1 + l_2 + \dot{l}_1 + \dot{l}_2$ производных равны нулю на границе конуса $\bar{V}_+$, поэтому функция $f_{k_1, k_2; \dot{k}_1, \dot{k}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(\mu \sigma^0)$ дифференцируема $l_1 + l_2 + \dot{l}_1 + \dot{l}_2 + 1$ раз, и ее первые $l_1 + l_2 + \dot{l}_1 + \dot{l}_2$ производных равны нулю в точке $\mu = 0$. В силу (2.24) функция $f_{k_1, k_2; \dot{k}_1, \dot{k}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(\mu \sigma^0)$ полиномиально ограничена.

Делая замену переменных (2.26), мы с помощью (2.32) получаем

$$\begin{aligned} \int d^4 x f_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(\tilde{x}) \phi(\tilde{x}) &= \\ &= \sum_{k_1=-l_1}^{l_1} \sum_{k_2=-l_2}^{l_2} \sum_{\dot{k}_1=-\dot{l}_1}^{\dot{l}_1} \sum_{\dot{k}_2=-\dot{l}_2}^{\dot{l}_2} \int_0^\infty \mu^3 d\mu \int_0^\infty t^{-3} dt \int d\operatorname{Re} z \int d\operatorname{Im} z \times \\ &\times \left(\prod_{i=1}^2 t_{m_i k_i}^{l_i}(g(t, z)) \overline{t_{\dot{m}_i \dot{k}_i}^{\dot{l}_i}(g(t, z))} \right) 2 f_{k_1, k_2; \dot{k}_1, \dot{k}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(\mu \sigma^0) \phi(\mu g(t, z) g(t, z)^*). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Функция $f_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(\tilde{x})$, определенная равенством (2.24), удовлетворяет соотношению ковариантности (2.18) для $m = n = 1$. Для любой матрицы $A \in SU(2)$

справедливо равенство $A\sigma^0 A^* = \sigma^0$. Тогда из соотношения ковариантности (2.18) для матрицы $A \in SU(2)$ следует

$$f_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(\mu\sigma^0) = \sum_{k_1=-l_1}^{l_1} \sum_{k_2=-l_2}^{l_2} \sum_{\dot{k}_1=-\dot{l}_1}^{\dot{l}_1} \sum_{\dot{k}_2=-\dot{l}_2}^{\dot{l}_2} \left(\prod_{i=1}^2 t_{m_i k_i}^{l_i}(A) \overline{t_{\dot{m}_i \dot{k}_i}^{l_i}(A)} \right) f_{k_1, k_2; \dot{k}_1, \dot{k}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(\mu\sigma^0). \quad (2.34)$$

Проинтегрируем это равенство с нормированной мерой Хаара dA на группе $SU(2)$. Из формул (2.11), (2.13) получаем

$$\begin{aligned} f_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(\mu\sigma^0) &= \sum_{l_3 \in \mathbb{Z}_+/2} \sum_{m_3, k_3=-l_3}^{l_3} \sum_{k_1=-l_1}^{l_1} \sum_{k_2=-l_2}^{l_2} \times \\ &\times \sum_{\dot{k}_1=-\dot{l}_1}^{\dot{l}_1} \sum_{\dot{k}_2=-\dot{l}_2}^{\dot{l}_2} C(l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, m_3) C(\dot{l}_1, \dot{l}_2, l_3; \dot{m}_1, \dot{m}_2, m_3) \times \\ &\times \frac{1}{2l_3+1} C(l_1, l_2, l_3; k_1, k_2, k_3) C(\dot{l}_1, \dot{l}_2, l_3; \dot{k}_1, \dot{k}_2, k_3) f_{k_1, k_2; \dot{k}_1, \dot{k}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(\mu\sigma^0). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Введем функцию

$$\begin{aligned} f^{l_1, l_2, l_3; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(\mu) &= \sum_{k_1=-l_1}^{l_1} \sum_{k_2=-l_2}^{l_2} \sum_{\dot{k}_1=-\dot{l}_1}^{\dot{l}_1} \sum_{\dot{k}_2=-\dot{l}_2}^{\dot{l}_2} \sum_{k_3=-l_3}^{l_3} \frac{1}{2l_3+1} \times \\ &\times C(l_1, l_2, l_3; k_1, k_2, k_3) C(\dot{l}_1, \dot{l}_2, l_3; \dot{k}_1, \dot{k}_2, k_3) \mu^{-2l_3} f_{k_1, k_2; \dot{k}_1, \dot{k}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(\mu\sigma^0). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Функция $f_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(\mu\sigma^0)$ дифференцируема $l_1 + l_2 + \dot{l}_1 + \dot{l}_2 + 1$ раз, и ее первые $l_1 + l_2 + \dot{l}_1 + \dot{l}_2$ производных равны нулю в точке $\mu = 0$, следовательно, функция (2.36) дифференцируема. Функция $f_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(\mu\sigma^0)$ полиномиально ограничена, следовательно, функция (2.36) полиномиально ограничена.

Используя соотношения (2.35), (2.36) и формулы (2.10), (2.17) для матрицы (2.27), перепишем равенство (2.33) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int d^4x f_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(\tilde{x}) \phi(\tilde{x}) &= \\ &= \sum_{l_3 \in \mathbb{Z}_+/2} \sum_{m_3, \dot{m}_3=-l_3}^{l_3} \int_0^\infty \mu^3 d\mu \int_0^\infty t^{-3} dt \int d\text{Re } z \int d\text{Im } z \times \\ &\times C(l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, m_3) C(\dot{l}_1, \dot{l}_2, l_3; \dot{m}_1, \dot{m}_2, \dot{m}_3) \times \\ &\times t_{m_3 \dot{m}_3}^{l_3} (\mu g(t, z) g(t, z)^*)^2 f^{l_1, l_2, l_3; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(\mu) \phi(\mu g(t, z) g(t, z)^*). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Делая замену переменных, обратную замене переменных (2.26), мы с помощью равенства (2.19) получаем (2.25). ■

Рассмотрим обобщенную функцию умеренного роста с носителем в конусе $\bar{V}_+$, удовлетворяющую соотношению ковариантности (2.18) для $m = 1$, $n = 0$. Этот случай соответствует равенству (2.25) с $l_2 = \dot{l}_2 = 0$, $m_2 = \dot{m}_2 = 0$. Из (2.12) имеем

$$C(l_1, 0, l_3; m_1, 0, m_3) = \delta_{l_1 l_3} \delta_{m_1 m_3}. \quad (2.38)$$

Группу матриц вида (2.27) обозначим $Z_-D(2)$. Для матрицы из группы $SL(2, \mathbb{C})$ справедливо разложение Грама

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{|A_{11}|^2 + |A_{12}|^2}}, \quad z = \frac{\bar{A}_{11}A_{21} + \bar{A}_{12}A_{22}}{\sqrt{|A_{11}|^2 + |A_{12}|^2}},$$

$$\alpha = \frac{A_{11}}{\sqrt{|A_{11}|^2 + |A_{12}|^2}}, \quad \beta = \frac{A_{12}}{\sqrt{|A_{11}|^2 + |A_{12}|^2}}.$$

Первая матрица в правой части (2.39) есть матрица $g(t, z) \in Z_-D(2)$, вторая матрица есть матрица $u \in SU(2)$. Пусть du – нормированная мера Хаара на группе $SU(2)$. Рассмотрим меру

$$d(g(t, z)u) = t^{-3} dt d\operatorname{Re} z d\operatorname{Im} z du \quad (2.40)$$

на группе $SL(2, \mathbb{C})$. Нетрудно проверить, что мера $dg(t, z) = t^{-3} dt d\operatorname{Re} z d\operatorname{Im} z$ инвариантна по отношению к левым сдвигам на группе $Z_-D(2)$, следовательно, мера (2.40) инвариантна по отношению к левому умножению матрицы (2.39) на любую матрицу из группы $Z_-D(2)$. В силу разложения Грама для доказательства инвариантности меры (2.40) по отношению к левому умножению матрицы (2.39) на любую матрицу из группы $SL(2, \mathbb{C})$ достаточно доказать инвариантность меры (2.40) по отношению к левому умножению матрицы (2.39) на любую матрицу из группы $SU(2)$. Пусть комплексные числа α, β удовлетворяют соотношению $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Из разложения Грама (2.39) следует, что

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1^{-1} & 0 \\ z_1 & t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\bar{\beta}_1 & \bar{\alpha}_1 \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{|\alpha t^{-1} + \beta z|^2 + |\beta|^2 t^2}}, \quad z_1 = \frac{(\bar{\alpha} t^{-1} + \bar{\beta} \bar{z})(-\bar{\beta} t^{-1} + \bar{\alpha} z) + \bar{\alpha} \bar{\beta} t^2}{\sqrt{|\alpha t^{-1} + \beta z|^2 + |\beta|^2 t^2}},$$

$$\alpha_1 = \frac{\alpha t^{-1} + \beta z}{\sqrt{|\alpha t^{-1} + \beta z|^2 + |\beta|^2 t^2}}, \quad \beta_1 = \frac{\beta t}{\sqrt{|\alpha t^{-1} + \beta z|^2 + |\beta|^2 t^2}}.$$

Мера Хаара du инвариантна по отношению к сдвигам на группе $SU(2)$. Для доказательства инвариантности меры (2.40) по отношению к левому умножению матрицы (2.39) на любую матрицу из группы $SU(2)$ достаточно доказать равенство

$$t_1^{-3} dt_1 d\operatorname{Re} z_1 d\operatorname{Im} z_1 = t^{-3} dt d\operatorname{Re} z d\operatorname{Im} z, \quad (2.42)$$

где числа t_1, z_1 заданы после (2.41). Введем переменные x^1, x^2, x^3 такие, что

$$\sqrt{|\mathbf{x}|^2 + 1} \sigma^0 + \sum_{k=1}^3 x^k \sigma^k = g(t, z) g(t, z)^*, \quad |\mathbf{x}|^2 = \sum_{k=1}^3 (x^k)^2. \quad (2.43)$$

Нетрудно показать, что

$$\frac{1}{2\sqrt{|\mathbf{x}|^2 + 1}} dx^1 dx^2 dx^3 = t^{-3} dt d\operatorname{Re} z d\operatorname{Im} z. \quad (2.44)$$

Отображение $g(t, z) \rightarrow g(t_1, z_1)$ соответствует вращению

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \left(\sqrt{|\mathbf{x}|^2 + 1} \sigma^0 + \sum_{k=1}^3 x^k \sigma^k \right) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}^*$$

вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, определенного в (2.43). Из инвариантности меры (2.44) по отношению к вращениям следует равенство (2.42). Таким образом, мера (2.40) инвариантна по отношению к левым сдвигам на группе $SL(2, \mathbb{C})$.

ТЕОРЕМА 1. *Любая обобщенная функция*

$$F_{m_1, \dots, m_{n+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(x_1, \dots, x_m) \in S'(\mathbb{R}^{4m})$$

с носителем в произведении $\bar{V}_+^{\times m}$ конусов, удовлетворяющая соотношению ковариантности (2.18), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \int d^{4m} x F_{m_1, \dots, m_{n+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(x_1, \dots, x_m) \phi(x_1, \dots, x_m) = \\ = \sum_{k_1=-l_1}^{l_1} \dots \sum_{k_{n+1}=-l_{n+1}}^{l_{n+1}} \sum_{\dot{k}_1=-\dot{l}_1}^{\dot{l}_1} \dots \sum_{\dot{k}_{n+1}=-\dot{l}_{n+1}}^{\dot{l}_{n+1}} \int_0^\infty \mu^{4m-1} d\mu \int_0^\infty t^{-3} dt \times \\ \times \int d\operatorname{Re} z \int d\operatorname{Im} z \int_{SU(2)} dA \int d^{4m} p \times \\ \times \delta\left(\sum_{j=1}^m \tilde{p}_j - \sigma^0\right) \left(\prod_{i=1}^{n+1} t_{m_i k_i}^{l_i}(g(t, z)A) \overline{t_{\dot{m}_i \dot{k}_i}^{\dot{l}_i}(g(t, z)A)}\right) \times \\ \times 2 f_{k_1, \dots, k_{n+1}; \dot{k}_1, \dots, \dot{k}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(\mu p_1, \dots, \mu p_m) \times \\ \times \left(\prod_{i=1}^m (\partial_{x_i}, \partial_{\bar{x}_i})^q\right) \phi(x_1, \dots, x_m) \Big|_{\bar{x}_i = \mu g(t, z)A \tilde{p}_i(g(t, z)A)^*, i=1, \dots, m}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

где $\phi(x_1, \dots, x_m) \in S(\mathbb{R}^{4m})$, dA – нормированная мера Хаара на группе $SU(2)$, (2×2) -матрица $g(t, z)$ имеет вид (2.27), многочлен $t_{mn}^l(A)$ определен в (2.8), q – натуральное число, функция $f_{m_1, \dots, m_{n+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(p_1, \dots, p_m)$ полиномиально ограничена и дифференцируема $l_1 + \dots + l_{n+1} + \dot{l}_1 + \dots + \dot{l}_{n+1} + 1$ раз (соотношение ковариантности (2.18) предполагает, что $l_1 + \dots + l_{n+1} + \dot{l}_1 + \dots + \dot{l}_{n+1}$ является неотрицательным целым числом), носитель функции $f_{m_1, \dots, m_{n+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(p_1, \dots, p_m)$ лежит в произведении $\bar{V}_+^{\times m}$ конусов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мера (2.40) инвариантна по отношению к левым сдвигам на группе $SL(2, \mathbb{C})$, следовательно, обобщенная функция (2.45) удовлетворяет соотношению ковариантности (2.18).

Докажем абсолютную сходимость интеграла (2.45). Коэффициенты многочлена (2.8) вещественны. Из соотношений (2.9), (2.10) следует равенство

$$\sum_{k=-l}^l |t_{mk}^l(A)|^2 = t_{mm}^l(AA^*). \quad (2.46)$$

Из неравенства Коши и формулы (2.46) следует, что

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{k_1=-l_1}^{l_1} \cdots \sum_{k_{n+1}=-l_{n+1}}^{l_{n+1}} \sum_{\dot{k}_1=-\dot{l}_1}^{\dot{l}_1} \cdots \sum_{\dot{k}_{n+1}=-\dot{l}_{n+1}}^{\dot{l}_{n+1}} \left(\prod_{i=1}^{n+1} t_{m_i k_i}^{l_i} (g(t, z) u) \overline{t_{\dot{m}_i \dot{k}_i}^{i_i} (g(t, z) u)} \right) \times \right. \\
 & \quad \left. \times f_{k_1, \dots, k_{n+1}; \dot{k}_1, \dots, \dot{k}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}} (\mu p_1, \dots, \mu p_m) \right| \leq \\
 & \leq \left| \sum_{k_1=-l_1}^{l_1} \cdots \sum_{k_{n+1}=-l_{n+1}}^{l_{n+1}} \sum_{\dot{k}_1=-\dot{l}_1}^{\dot{l}_1} \cdots \sum_{\dot{k}_{n+1}=-\dot{l}_{n+1}}^{\dot{l}_{n+1}} \mu^{-2 \sum_{i=1}^{n+1} (l_i + \dot{l}_i)} \times \right. \\
 & \quad \times \left| f_{k_1, \dots, k_{n+1}; \dot{k}_1, \dots, \dot{k}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}} (\mu p_1, \dots, \mu p_m) \right|^2 \left. \right|^{1/2} \times \\
 & \quad \times \left(\prod_{i=1}^{n+1} t_{m_i m_i}^{l_i} (\mu g(t, z) g(t, z)^*) t_{\dot{m}_i \dot{m}_i}^{i_i} (\mu g(t, z) g(t, z)^*) \right)^{1/2}. \quad (2.47)
 \end{aligned}$$

Введем переменные

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_j &= \mu g(t, z) \tilde{p}_j g(t, z)^*, \quad j = 1, \dots, m, \\
 \tilde{p}_1 &= \sigma^0, \quad \tilde{p}_m = \sigma^0 - \sum_{j=1}^{m-1} \tilde{p}_j, \quad m > 1. \quad (2.48)
 \end{aligned}$$

Суммируя равенства для $\tilde{x}_j$ в (2.48), мы получаем разложение (2.26) для матрицы $\tilde{x}_1 + \dots + \tilde{x}_m$. Функция $f_{m_1, \dots, m_{n+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}} (p_1, \dots, p_m)$ полиномиально ограничена. На множестве

$$\left\{ p_1, \dots, p_m \in \overline{V}_+ : \sum_{j=1}^m \tilde{p}_j = \sigma^0 \right\}$$

справедлива следующая оценка:

$$\left| f_{m_1, \dots, m_{n+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}} (\mu p_1, \dots, \mu p_m) \right| \leq C \left(1 + \sum_{\nu=0}^3 \sum_{i=1}^m (\mu p_i^\nu)^2 \right)^N \leq C (1 + 4m\mu^2)^N, \quad (2.49)$$

где C не зависит от $p_1, \dots, p_m$. Функция $f_{m_1, \dots, m_{n+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}} (p_1, \dots, p_m)$ дифференцируема $l_1 + \dots + l_{n+1} + \dot{l}_1 + \dots + \dot{l}_{n+1} + 1$ раз, и ее носитель лежит в произведении $\overline{V}_+^{\times m}$ конусов. Следовательно, функция $f_{m_1, \dots, m_{n+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}} (\mu p_1, \dots, \mu p_m)$ дифференцируема $l_1 + \dots + l_{n+1} + \dot{l}_1 + \dots + \dot{l}_{n+1} + 1$ раз по переменной μ , и ее первые $l_1 + \dots + l_{n+1} + \dot{l}_1 + \dots + \dot{l}_{n+1}$ производных равны нулю в точке $\mu = 0$. Тогда из неравенств (2.47), (2.49) следует абсолютная сходимость интеграла (2.45). Интеграл (2.45) определяет обобщенную функцию из $S'(\mathbb{R}^{4m})$.

Докажем равенство (2.45). Если носитель обобщенной функции

$$F_{m_1, \dots, m_{n+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}} (x_1, \dots, x_m) \in S'(\mathbb{R}^{4m})$$

лежит в произведении $\bar{V}_+^{\times m}$ конусов, то справедливы соотношения, аналогичные равенствам (2.19), (2.24):

$$F_{m_1, \dots, m_{n+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(x_1, \dots, x_m) = \left(\prod_{i=1}^m (\partial_{x_i}, \partial_{x_i})^q \right) f_{m_1, \dots, m_{n+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(x_1, \dots, x_m), \quad (2.50)$$

$$f_{m_1, \dots, m_{n+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{(2\pi 4^{q-1} (q-2)! (q-1)!)^m} \times \\ \times \int d^{4m} y F_{m_1, \dots, m_{n+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(y_1, \dots, y_m) \times \\ \times \prod_{i=1}^m (x_i - y_i, x_i - y_i)^{q-2} \theta(x_i^0 - y_i^0) \theta((x_i - y_i, x_i - y_i)). \quad (2.51)$$

В этих формулах можно выбрать такое натуральное число q , чтобы функция (2.51) была дифференцируема $l_1 + \dots + l_{n+1} + \dot{l}_1 + \dots + \dot{l}_{n+1} + 1$ раз. Носитель этой функции лежит в произведении $\bar{V}_+^{\times m}$ конусов, и она полиномиально ограничена. Если обобщенная функция (2.50) удовлетворяет соотношению ковариантности (2.18), то функция (2.51) также удовлетворяет соотношению ковариантности (2.18). Используя доказательство предложения, получаем

$$f_{m_1, \dots, m_{n+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(\mu g(t, z) \tilde{p}_1 g(t, z)^*, \dots, \mu g(t, z) \tilde{p}_m g(t, z)^*) = \\ = \sum_{k_1=-l_1}^{l_1} \dots \sum_{k_{n+1}=-l_{n+1}}^{l_{n+1}} \sum_{\dot{k}_1=-\dot{l}_1}^{\dot{l}_1} \dots \\ \dots \sum_{\dot{k}_{n+1}=-\dot{l}_{n+1}}^{\dot{l}_{n+1}} \left(\prod_{i=1}^{n+1} t_{m_i k_i}^{l_i} (g(t, z)) \overline{t_{\dot{m}_i \dot{k}_i}^{\dot{l}_i} (g(t, z))} \right) \times \\ \times f_{k_1, \dots, k_{n+1}; \dot{k}_1, \dots, \dot{k}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(\mu \tilde{p}_1, \dots, \mu \tilde{p}_m), \\ \tilde{p}_1 = \sigma^0, \quad \tilde{p}_m = \sigma^0 - \sum_{j=1}^{m-1} \tilde{p}_j, \quad m > 1. \quad (2.52)$$

В силу определения (2.51) функция $f_{k_1, \dots, k_{n+1}; \dot{k}_1, \dots, \dot{k}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(\mu p_1, \dots, \mu p_m)$ дифференцируема $l_1 + \dots + l_{n+1} + \dot{l}_1 + \dots + \dot{l}_{n+1} + 1$ раз по переменной μ , и ее первые $l_1 + \dots + l_{n+1} + \dot{l}_1 + \dots + \dot{l}_{n+1}$ производных равны нулю в точке $\mu = 0$. Справедлива оценка (2.49). Используя соотношения (2.44), (2.52) и переменные (2.48), получаем

$$\int d^{4m} x f_{m_1, \dots, m_{n+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(x_1, \dots, x_{n+1}) \phi(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m) = \\ = \sum_{k_1=-l_1}^{l_1} \dots \sum_{k_{n+1}=-l_{n+1}}^{l_{n+1}} \sum_{\dot{k}_1=-\dot{l}_1}^{\dot{l}_1} \dots \sum_{\dot{k}_{n+1}=-\dot{l}_{n+1}}^{\dot{l}_{n+1}} \int_0^\infty \mu^{4m-1} d\mu \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^\infty t^{-3} dt \int d\operatorname{Re} z \int d\operatorname{Im} z \int d^{4m}p \delta\left(\sum_{j=1}^m \tilde{p}_j - \sigma^0\right) \times \\
& \times \left(\prod_{i=1}^{n+1} t_{m_i k_i}^{l_i}(g(t, z)) \overline{t_{\tilde{m}_i \tilde{k}_i}^{l_i}(g(t, z))}\right) 2f_{k_1, \dots, k_{n+1}; \tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \tilde{l}_1, \dots, \tilde{l}_{n+1}}(\mu p_1, \dots, \mu p_m) \times \\
& \times \phi(\mu g(t, z) \tilde{p}_1 g(t, z)^*, \dots, \mu g(t, z) \tilde{p}_m g(t, z)^*). \tag{2.53}
\end{aligned}$$

С помощью соотношения ковариантности (2.18) для функции (2.51) и матрицы $u \in SU(2)$ имеем

$$\begin{aligned}
& f_{m_1, \dots, m_{n+1}; \tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \tilde{l}_1, \dots, \tilde{l}_{n+1}}(\mu \tilde{p}_1, \dots, \mu \tilde{p}_m) = \\
& = \sum_{k_1=-l_1}^{l_1} \dots \sum_{k_{n+1}=-l_{n+1}}^{l_{n+1}} \sum_{\tilde{k}_1=-\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_1} \dots \sum_{\tilde{k}_{n+1}=-\tilde{l}_{n+1}}^{\tilde{l}_{n+1}} \left(\prod_{i=1}^{n+1} t_{m_i k_i}^{l_i}(u) \overline{t_{\tilde{m}_i \tilde{k}_i}^{l_i}(u)}\right) \times \\
& \times f_{k_1, \dots, k_{n+1}; \tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \tilde{l}_1, \dots, \tilde{l}_{n+1}}(\mu u^{-1} \tilde{p}_1 u, \dots, \mu u^{-1} \tilde{p}_m u), \\
& \tilde{p}_1 = \sigma^0, \quad \tilde{p}_m = \sigma^0 - \sum_{j=1}^{m-1} \tilde{p}_j, \quad m > 1.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Проинтегрируем равенство (2.54) с нормированной мерой Хаара на группе $SU(2)$ и подставим полученное равенство в (2.53). Сделаем замену переменных интегрирования

$$\begin{aligned}
& \tilde{p}_j \rightarrow u \tilde{p}_j u^*, \quad j = 1, \dots, m-1, \quad m > 1, \\
& u \tilde{p}_m u^* = \tilde{p}_m = \sigma_0, \quad m = 1.
\end{aligned}$$

Равенство, полученное после интегрирования, и соотношение (2.50) дают (2.45). ■

С помощью формул (2.11), (2.13) можно вычислить интеграл по группе $SU(2)$ в правой части равенства (2.45) для $m = n = 1$. Полученное равенство может быть переписано в виде (2.25).

Можно получить интегральное представление для преобразования Фурье–Лапласа обобщенной функции (2.45). Для двумерного пространства-времени подобное интегральное представление было получено Жариновым [11]. Аналитические свойства преобразования Фурье–Лапласа обобщенной функции (2.45) изучались раньше с помощью теоремы Баргмана–Холла–Вайтмана [2]–[4]. Интегральное представление для преобразования Фурье–Лапласа обобщенной функции (2.45) упрощает эту задачу.

Вакуумное ожидание произведения двух квантовых полей является преобразованием Фурье обобщенной функции (2.25). Представим обобщенную функцию (2.25) в виде, удобном для вычисления преобразования Фурье. Используя матрицы (2.3) как коэффициенты, определим (2×2) -матрицу

$$\tilde{\partial}_x = \sum_{\mu=0}^3 \eta^{\mu\mu} \sigma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \tag{2.55}$$

где $\eta^{00} = -\eta^{11} = -\eta^{22} = -\eta^{33} = 1$. Подставляя эту матрицу в многочлен (2.8), получим дифференциальный оператор $t_{mn}^l(\tilde{\partial}_x)$.

ЛЕММА 2. Пусть функция $f(s)$ дифференцируема $2l$ раз. Тогда

$$t_{mn}^l(\tilde{\partial}_x)f((x, x)) = t_{mn}^l(\tilde{x})\left(2\frac{d}{ds}\right)^{2l}f(s)\Big|_{s=(x, x)}. \quad (2.56)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определений (2.3), (2.8), (2.55) следует, что

$$\begin{aligned} t_{mn}^l(\tilde{\partial}_x)f((x, x)) &= \sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!} \times \\ &\times \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(j+1)\Gamma(l-m-j+1)\Gamma(m-n+j+1)\Gamma(l+n-j+1)} \times \\ &\times \left(\frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{\partial}{\partial x^3}\right)^{l-m-j} \left(-\frac{\partial}{\partial x^1} + i\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^j \times \\ &\times \left((x^1 + ix^2)^{m-n+j}(x^0 - x^3)^{l+n-j}\left(2\frac{d}{ds}\right)^{l+m}f(s)\Big|_{s=(x, x)}\right). \end{aligned} \quad (2.57)$$

С помощью правила Лейбница получаем

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{\partial}{\partial x^3}\right)^{l-m-j} \left(-\frac{\partial}{\partial x^1} + i\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^j \times \\ &\times \left((x^1 + ix^2)^{m-n+j}(x^0 - x^3)^{l+n-j}\left(2\frac{d}{ds}\right)^{l+m}f(s)\Big|_{s=(x, x)}\right) = \\ &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(l-m-j+1)\Gamma(j+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(l-m-j-p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(j-q+1)} \times \\ &\times \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{\partial}{\partial x^3}\right)^p (x^0 - x^3)^{l+n-j}\right) \left(\left(-\frac{\partial}{\partial x^1} + i\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^q (x^1 + ix^2)^{m-n+j}\right) \times \\ &\times \left(\frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{\partial}{\partial x^3}\right)^{l-m-j-p} \left(-\frac{\partial}{\partial x^1} + i\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^{j-q} \left(2\frac{d}{ds}\right)^{l+m}f(s)\Big|_{s=(x, x)}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Вычисляя производные в правой части равенства (2.58), можно переписать (2.57) в виде

$$\begin{aligned} t_{mn}^l(\tilde{\partial}_x)f((x, x)) &= \sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!} \times \\ &\times \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} (-1)^q 2^{p+q} \frac{1}{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)} \times \\ &\times \frac{1}{\Gamma(j-q+1)\Gamma(l-m-j-p+1)\Gamma(m-n+j-q+1)\Gamma(l+n-j-p+1)} \times \\ &\times (x^0 + x^3)^{l-m-j-p} (x^0 - x^3)^{l+n-j-p} (x^1 + ix^2)^{m-n+j-q} \times \\ &\times (x^1 - ix^2)^{j-q} \left(2\frac{d}{ds}\right)^{2l-p-q} f(s)\Big|_{s=(x, x)}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Делая замену $j \rightarrow j + q$, $p \rightarrow p - q$ переменных суммирования, получаем

$$\begin{aligned}
 t_{mn}^l(\tilde{\partial}_x)f((x, x)) &= \sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!} \times \\
 &\times \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} (-1)^q 2^p \frac{1}{\Gamma(p-q+1)\Gamma(q+1)} \times \\
 &\times \frac{1}{\Gamma(j+1)\Gamma(l-m-j-p+1)\Gamma(m-n+j+1)\Gamma(l+n-j-p+1)} \times \\
 &\times (x^0 + x^3)^{l-m-j-p} (x^0 - x^3)^{l+n-j-p} (x^1 + ix^2)^{m-n+j} \times \\
 &\times (x^1 - ix^2)^j \left(2 \frac{d}{ds} \right)^{2l-p} f(s) \Big|_{s=(x, x)}. \quad (2.60)
 \end{aligned}$$

Справедливо тождество

$$\sum_{q=0}^p (-1)^q \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-q+1)\Gamma(q+1)} = (1-1)^p. \quad (2.61)$$

При $p \geq 1$ обе части этого равенства равны нулю. При $p = 0$ левая часть равенства равна 1. С помощью формулы (2.61) мы можем переписать равенство (2.60) в виде (2.56). ■

Определим

$$f^{(-2l)}(s) = \theta(s) \int_0^s dt \frac{(s-t)^{2l-1}}{(2l-1)!} f(t^{1/2}), \quad 2l \geq 1, \quad f^{(0)}(s) = \theta(s) f(s^{1/2}). \quad (2.62)$$

Отсюда с помощью равенства (2.56) получаем

$$t_{mn}^l(\tilde{x})\theta((x, x))f((x, x)^{1/2}) = 2^{-2l} t_{mn}^l(\tilde{\partial}_x)f^{(-2l)}((x, x)). \quad (2.63)$$

Если функция $f(s)$ полиномиально ограничена, то функция (2.62) также полиномиально ограничена. Если функция $f(s)$ непрерывна и ее носитель лежит на положительной полуоси, то функция (2.62) также непрерывна и ее носитель лежит на положительной полуоси. Функция (2.62) дифференцируема $2l$ раз, и ее первые $2l$ производных равны нулю в точке $s = 0$. Из (2.63) вытекает

$$\begin{aligned}
 \theta(x^0)\theta((x, x))t_{m_3\dot{m}_3}^{l_3}(\tilde{x})f^{l_1, l_2, l_3; \dot{l}_1, \dot{l}_2}((x, x)^{1/2}) = \\
 = t_{m_3\dot{m}_3}^{l_3}(\tilde{\partial}_x)(\theta(x^0)2^{-2l_3}(f^{l_1, l_2, l_3; \dot{l}_1, \dot{l}_2})^{(-2l_3)}((x, x))).
 \end{aligned}$$

Подставляя это равенство в соотношение (2.25), получаем произвольную обобщенную функцию

$$F_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(x) \in S'(\mathbb{R}^4)$$

с носителем в замкнутом верхнем световом конусе, удовлетворяющую соотношению ковариантности (2.18) для $m = n = 1$, в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \int d^4x F_{m_1, m_2; \dot{m}_1, \dot{m}_2}^{l_1, l_2; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(x) \phi(x) = \\ &= \sum_{l_3 \in \mathbb{Z}_+/2} \sum_{m_3, \dot{m}_3 = -l_3}^{l_3} C(l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, m_3) C(\dot{l}_1, \dot{l}_2, l_3; \dot{m}_1, \dot{m}_2, \dot{m}_3) \times \\ & \times \int d^4x \theta(x^0) 2^{-2l_3} (f^{l_1, l_2, l_3; \dot{l}_1, \dot{l}_2})^{(-2l_3)}((x, x)) (\partial_x, \partial_x)^q t_{m_3 \dot{m}_3}^{l_3} (-\tilde{\partial}_x) \phi(x), \quad (2.64) \end{aligned}$$

где функция $\phi(x) \in S(\mathbb{R}^4)$, q – натуральное число, коэффициент Клебша–Гордана $C(l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, m_3)$ задан соотношением (2.12), (2×2) -матрица $\tilde{\partial}_x$ – соотношением (2.55), многочлен $t_{mn}^l(A)$ – соотношением (2.8), непрерывная функция $(f^{l_1, l_2, l_3; \dot{l}_1, \dot{l}_2})^{(-2l_3)}(s)$ с носителем на положительной полуоси полиномиально ограничена.

Соотношение (2.64) является разложением по конечномерным неприводимым представлениям группы $SL(2, \mathbb{C})$. Рассмотрим обобщенные функции умеренного роста следующего вида:

$$\begin{aligned} & \int d^{4m}x F_{m_1, \dots, m_{n+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(x_1, \dots, x_m) \phi(x_1, \dots, x_m) = \\ &= \sum_{l_{n+2}, \dots, l_{n+m+1} \in \mathbb{Z}_+/2} \sum_{m_s, \dot{m}_s = -l_s, -l_s+1, \dots, l_s-1, l_s, s=n+2, \dots, n+m+1} \\ & \int d^{4m}x f_{m_1, \dots, m_{n+m+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+m+1}}^{l_1, \dots, l_{n+m+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+m+1}}((x_1, x_1), \dots, (x_m, x_m)) \times \\ & \times \left(\prod_{j=1}^m \theta(x_j^0) (\partial_{x_j}, \partial_{x_j})^q t_{m_{n+1+j} \dot{m}_{n+1+j}}^{l_{n+1+j}} (-\tilde{\partial}_{x_j}) \right) \phi(x_1, \dots, x_m), \quad (2.65) \end{aligned}$$

где $\phi(x_1, \dots, x_m) \in S(\mathbb{R}^4)$, q – натуральное число, (2×2) -матрица $\tilde{\partial}_x$ задана соотношением (2.55), многочлен $t_{mn}^l(A)$ – соотношением (2.8), непрерывная функция

$$f_{m_1, \dots, m_{n+m+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+m+1}}^{l_1, \dots, l_{n+m+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+m+1}}(s_1, \dots, s_m)$$

с носителем в произведении положительных полуосей полиномиально ограничена; суммы по переменным $l_{n+2}, \dots, l_{n+m+1}$ конечны. Обобщенная функция (2.65) принадлежит пространству $S'(\mathbb{R}^{4m})$. Сумма по переменной l_3 в соотношении (2.64) конечна в силу условия треугольника для коэффициентов Клебша–Гордана.

Определим для любых чисел $m, n \in \mathbb{Z}_+$ обобщенный коэффициент Клебша–Гордана

$$\begin{aligned} & C(l_1, \dots, l_{m+2}; l_{m+3}, \dots, l_{m+n+4}; j_1, \dots, j_{m+n+1}; m_1, \dots, m_{m+2}; m_{m+3}, \dots, m_{m+n+4}) = \\ &= \sum_{\substack{k_s = -j_s, -j_s+1, \dots, j_s-1, j_s, \\ s=1, \dots, m+n+1}} C(l_1, l_2, j_1; m_1, m_2, k_1) \times \\ & \times \left(\prod_{s=1}^m C(j_s, l_{s+2}, j_{s+1}; k_s, m_{s+2}, k_{s+1}) \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\prod_{s=m+1}^{m+n} C(j_{s+1}, l_{s+2}, j_s; k_{s+1}, m_{s+2}, k_s) \right) \times \\ & \times C(l_{m+n+4}, l_{m+n+3}, j_{m+n+1}; m_{m+n+4}, m_{m+n+3}, k_{m+n+1}), \end{aligned} \quad (2.66)$$

где числа $l_1, \dots, l_{m+n+4}, j_1, \dots, j_{m+n+1} \in \mathbb{Z}_+/2$ и $m_i = -l_i, -l_i + 1, \dots, l_i - 1, l_i$, $i = 1, \dots, m+n+4$. Из определения (2.66) и формул (2.10), (2.17) следуют такие соотношения для любой матрицы $A \in SL(2, \mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{n_s = -l_s, -l_s+1, \dots, l_s-1, l_s, \\ s=1, \dots, m+2}} \left(\prod_{i=1}^{m+2} t_{m_i n_i}^{l_i}(A) \right) \times \\ & \times C(l_1, \dots, l_{m+2}; l_{m+3}, \dots, l_{m+n+4}; j_1, \dots, j_{m+n+1}; n_1, \dots, n_{m+2}; m_{m+3}, \dots, m_{m+n+4}) = \\ & = \sum_{\substack{n_s = -l_s, -l_s+1, \dots, l_s-1, l_s, \\ s=m+3, \dots, m+n+4}} \left(\prod_{i=m+3}^{m+n+4} t_{n_i m_i}^{l_i}(A) \right) \times \\ & \times C(l_1, \dots, l_{m+2}; l_{m+3}, \dots, l_{m+n+4}; j_1, \dots, j_{m+n+1}; m_1, \dots, m_{m+2}; n_{m+3}, \dots, n_{m+n+4}), \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{n_s = -l_s, -l_s+1, \dots, l_s-1, l_s, \\ s=1, \dots, m+2}} \left(\prod_{i=1}^{m+2} t_{n_i m_i}^{l_i}(A) \right) \times \\ & \times C(l_1, \dots, l_{m+2}; l_{m+3}, \dots, l_{m+n+4}; j_1, \dots, j_{m+n+1}; n_1, \dots, n_{m+2}; m_{m+3}, \dots, m_{m+n+4}) = \\ & = \sum_{\substack{n_s = -l_s, -l_s+1, \dots, l_s-1, l_s, \\ s=m+3, \dots, m+n+4}} \left(\prod_{i=m+3}^{m+n+4} t_{m_i n_i}^{l_i}(A) \right) \times \\ & \times C(l_1, \dots, l_{m+2}; l_{m+3}, \dots, l_{m+n+4}; j_1, \dots, j_{m+n+1}; m_1, \dots, m_{m+2}; n_{m+3}, \dots, n_{m+n+4}). \end{aligned} \quad (2.68)$$

ТЕОРЕМА 2. Если обобщенные функции (2.65) для $m = n = 1$ удовлетворяют соотношению ковариантности (2.18), то

$$f_{m_1, m_2, m_3; \dot{m}_1, \dot{m}_2, \dot{m}_3}^{l_1, l_2, l_3; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(s_1) = f^{l_1, l_2, l_3; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(s_1) C(l_1, l_2, l_3; m_1, m_2, m_3) C(\dot{l}_1, \dot{l}_2, l_3; \dot{m}_1, \dot{m}_2, \dot{m}_3), \quad (2.69)$$

где непрерывная функция $f^{l_1, l_2, l_3; \dot{l}_1, \dot{l}_2}(s_1)$ с носителем на положительной полуоси полиномиально ограничена, коэффициент $C(l_1, l_2, l_2, l_3; m_1, m_2, m_3)$ задан соотношением (2.12).

Если обобщенные функции (2.65) для $m \geq 2, n \geq 1$ удовлетворяют соотношению ковариантности (2.18), то

$$\begin{aligned} & f_{m_1, \dots, m_{n+m+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+m+1}}^{l_1, \dots, l_{n+m+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+m+1}}(s_1, \dots, s_m) = \\ & = \sum_{j_1, \dots, j_{n+m-2}; j'_1, \dots, j'_{n+m-2} \in \mathbb{Z}_+/2} f_{j_1, \dots, j_{n+m-2}; j'_1, \dots, j'_{n+m-2}}^{l_1, \dots, l_{n+m+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+m+1}}(s_1, \dots, s_m) \times \\ & \times C(l_1, \dots, l_{n+1}; l_{n+2}, \dots, l_{m+n+1}; j_1, \dots, j_{m+n-2}; m_1, \dots, m_{n+1}; m_{n+2}, \dots, m_{m+n+1}) \times \end{aligned}$$

$$\times C(\dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}; l_{n+2}, \dots, l_{m+n+1}; j'_1, \dots, j'_{m+n-2}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}; \dot{m}_{n+2}, \dots, \dot{m}_{m+n+1}), \quad (2.70)$$

где непрерывная функция

$$f_{j_1, \dots, j_{n+m-2}; j'_1, \dots, j'_{n+m-2}}^{l_1, \dots, l_{n+m+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(s_1, \dots, s_m)$$

с носителем в произведении положительных полуосей полиномиально ограничена, обобщенный коэффициент Клебша–Гордана

$$C(l_1, \dots, l_{n+1}; l_{n+2}, \dots, l_{m+n+1}; j_1, \dots, j_{m+n-2}; m_1, \dots, m_{n+1}; m_{n+2}, \dots, m_{m+n+1})$$

задан соотношением (2.66).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение ковариантности (2.18) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} F_{m_1, \dots, m_{n+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m) = \\ = \sum_{k_1=-l_1}^{l_1} \dots \sum_{k_{n+1}=-l_{n+1}}^{l_{n+1}} \sum_{\dot{k}_1=-\dot{l}_1}^{\dot{l}_1} \dots \sum_{\dot{k}_{n+1}=-\dot{l}_{n+1}}^{\dot{l}_{n+1}} \left(\prod_{i=1}^{n+1} t_{m_i k_i}^{l_i}(A^{-1}) t_{\dot{m}_i \dot{k}_i}^{\dot{l}_i}(\bar{A}^{-1}) \right) \times \\ \times F_{k_1, \dots, k_{n+1}; \dot{k}_1, \dots, \dot{k}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(A \tilde{x}_1 A^*, \dots, A \tilde{x}_m A^*). \end{aligned} \quad (2.71)$$

Тогда из равенства (2.65) и соотношений (2.9), (2.10) следует

$$\begin{aligned} \int d^{4m} x F_{m_1, \dots, m_{n+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(x_1, \dots, x_m) \phi(x_1, \dots, x_m) = \\ = \sum_{l_{n+2}, \dots, l_{n+m+1} \in \mathbb{Z}_+/2} \sum_{\substack{m_s, \dot{m}_s, k_s, \dot{k}_s = -l_s, -l_s+1, \dots, l_s-1, l_s, \\ s=n+2, \dots, n+m+1}} \times \\ \times \sum_{\substack{k_s = -l_s, -l_s+1, \dots, l_s-1, l_s, \\ s=1, \dots, n+1}} \sum_{\substack{\dot{k}_s = -\dot{l}_s, -\dot{l}_s+1, \dots, \dot{l}_s-1, \dot{l}_s, \\ s=1, \dots, n+1}} \times \\ \times \left(\prod_{i=1}^{n+1} t_{m_i k_i}^{l_i}(A^{-1}) t_{\dot{m}_i \dot{k}_i}^{\dot{l}_i}(\bar{A}^{-1}) \right) \left(\prod_{i=n+2}^{n+m+1} t_{m_i k_i}^{l_i}(A) t_{\dot{m}_i \dot{k}_i}^{\dot{l}_i}(\bar{A}) \right) \times \\ \times \int d^{4m} x f_{k_1, \dots, k_{n+m+1}; \dot{k}_1, \dots, \dot{k}_{n+m+1}}^{l_1, \dots, l_{n+m+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}((x_1, x_1), \dots, (x_m, x_m)) \times \\ \times \left(\prod_{j=1}^m \theta(x_j^0) (\partial_{x_j}, \partial_{x_j})^q t_{k_{n+1+j} \dot{k}_{n+1+j}}^{l_{n+1+j}}(-\tilde{\partial}_{x_j}) \right) \phi(x_1, \dots, x_m) \end{aligned} \quad (2.72)$$

для любой матрицы $A \in SL(2, \mathbb{C})$. Суммы в (2.72) по $l_{n+2}, \dots, l_{n+m+1}$ конечны, следовательно, правая часть равенства (2.72) является многочленом от матричных элементов матриц $A, \bar{A}$. Выберем следующую матрицу из группы $SL(2, \mathbb{C})$:

$$A = \exp \left\{ \frac{1}{4} (\phi'_1 + i \phi_1) \sigma^3 \right\} \exp \left\{ \frac{1}{4} (\theta'_1 + i \theta_1) \sigma^1 \right\} \exp \left\{ \frac{1}{4} (\psi'_1 + i \psi_1) \sigma^3 \right\} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{1}{4}(\phi'_2 - i\phi_2)\sigma^3\right\} \exp\left\{\frac{1}{4}(\theta'_2 - i\theta_2)\sigma^1\right\} \exp\left\{\frac{1}{4}(\psi'_2 - i\psi_2)\sigma^3\right\}. \quad (2.73)$$

По определению (2.3) матричные элементы матриц σ^1, σ^3 вещественны. Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{A} = & \exp\left\{\frac{1}{4}(\phi'_1 - i\phi_1)\sigma^3\right\} \exp\left\{\frac{1}{4}(\theta'_1 - i\theta_1)\sigma^1\right\} \exp\left\{\frac{1}{4}(\psi'_1 - i\psi_1)\sigma^3\right\} \times \\ & \times \exp\left\{\frac{1}{4}(\phi'_2 + i\phi_2)\sigma^3\right\} \exp\left\{\frac{1}{4}(\theta'_2 + i\theta_2)\sigma^1\right\} \exp\left\{\frac{1}{4}(\psi'_2 + i\psi_2)\sigma^3\right\}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Матрицы (2.73), (2.74) аналитически продолжаются на значения параметров $\phi'_k = i\phi_k, \theta'_k = i\theta_k, \psi'_k = i\psi_k, k = 1, 2$:

$$\begin{aligned} A &= u(\phi_1, \theta_1, \psi_1), \quad \bar{A} = u(\phi_2, \theta_2, \psi_2), \\ u(\phi, \theta, \psi) &= \exp\left\{i\frac{\phi}{2}\sigma^3\right\} \exp\left\{i\frac{\theta}{2}\sigma^1\right\} \exp\left\{i\frac{\psi}{2}\sigma^3\right\}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Согласно [9] (глава III, раздел 6.1) нормированная мера Хаара на группе $SU(2)$ имеет вид

$$du(\phi, \theta, \psi) = \frac{1}{16\pi^2} \sin \theta d\theta d\phi d\psi. \quad (2.76)$$

Подставим матрицы (2.75) в соотношение (2.72) и проинтегрируем полученное равенство по обеим группам $SU(2)$ с мерами (2.76). Получим

$$\begin{aligned} & \int d^{4m} x F_{m_1, \dots, m_{n+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+1}}^{l_1, \dots, l_{n+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}(x_1, \dots, x_m) \phi(x_1, \dots, x_m) = \\ &= \sum_{l_{n+2}, \dots, l_{n+m+1} \in \mathbb{Z}_+/2} \sum_{m_s, \dot{m}_s, k_s, \dot{k}_s = -l_s, -l_s+1, \dots, l_s-1, l_s, s=n+2, \dots, n+m+1} \times \\ & \times \sum_{k_s = -l_s, -l_s+1, \dots, l_s-1, l_s, s=1, \dots, n+1} \sum_{\dot{k}_s = -\dot{l}_s, -\dot{l}_s+1, \dots, \dot{l}_s-1, \dot{l}_s, s=1, \dots, n+1} \times \\ & \times \int_{SU(2)} du_1 \int_{SU(2)} du_2 \left(\prod_{i=1}^{n+1} t_{m_i k_i}^{l_i}(u_1^{-1}) t_{\dot{m}_i \dot{k}_i}^{\dot{l}_i}(u_2^{-1}) \right) \times \\ & \times \left(\prod_{i=n+2}^{n+m+1} t_{m_i k_i}^{l_i}(u_1) t_{\dot{m}_i \dot{k}_i}^{\dot{l}_i}(u_2) \right) \times \\ & \times \int d^{4m} x f_{k_1, \dots, k_{n+m+1}; \dot{k}_1, \dots, \dot{k}_{n+m+1}}^{l_1, \dots, l_{n+m+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+m+1}}((x_1, x_1), \dots, (x_m, x_m)) \times \\ & \times \left(\prod_{j=1}^m \theta(x_j^0) (\partial_{x_j}, \partial_{x_j})^q t_{k_{n+1+j} \dot{k}_{n+1+j}}^{l_{n+1+j}}(-\tilde{\partial}_{x_j}) \right) \phi(x_1, \dots, x_m). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Рассмотрим случай $m = n = 1$. В силу определения группы $SU(2)$ имеем $u^{-1} = u^*$, поэтому из (2.10), (2.13), (2.77) следует равенство (2.69). В силу (2.10), (2.17) любая

обобщенная функция (2.65) с функциями (2.69) удовлетворяет соотношению ковариантности (2.18).

Рассмотрим случай $m \geq 2$, $n \geq 1$. С помощью формул (2.10), (2.11), (2.13) и (2.77) получаем равенство (2.70). В силу (2.67), (2.68) любая обобщенная функция (2.65) с функциями (2.70) удовлетворяет соотношению ковариантности (2.18). ■

Если мы подставим функции (2.69) в ряд (2.65) для $m = n = 1$, то этот ряд будет конечным в силу условия треугольника для коэффициентов Клебша–Гордана. Если мы подставим функции (2.70) в ряд (2.65) для $m \geq 2$, $n \geq 1$, то этот ряд может быть бесконечен. Необходимо выбрать функции $\phi(x_1, \dots, x_m)$, для которых ряд сходится. Если преобразование Фурье

$$\tilde{\phi}(p_1, \dots, p_m) = \int d^{4m}x \exp\left\{i \sum_{j=1}^m (p_j, x_j)\right\} \phi(x_1, \dots, x_m) \quad (2.78)$$

принадлежит пространству $D(\mathbb{R}^{4m})$, то функция (2.78) бесконечно дифференцируема и имеет компактный носитель.

В силу соотношения (2.23) кажется естественным рассмотреть обобщенную функцию (2.65) с коэффициентными функциями

$$\begin{aligned} f_{m_1, \dots, m_{n+m+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+m+1}}^{l_1, \dots, l_{n+m+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}}((x_1, x_1), \dots, (x_m, x_m)) = \\ = a_{m_1, \dots, m_{n+m+1}; \dot{m}_1, \dots, \dot{m}_{n+m+1}}^{l_1, \dots, l_{n+m+1}; \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_{n+1}} \prod_{j=1}^m ((x_j, x_j)^{q-2} \theta((x_j, x_j))). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Подстановка равенств (2.79) в ряд (2.65) дает

$$\sum_{\substack{k_j^\mu \in \mathbb{Z}_+, j=1, \dots, m, \\ \mu=0, \dots, 3}} a(k_j^\mu) \left(\prod_{j=1}^m \prod_{\mu=0}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x_j^\mu} \right)^{k_j^\mu} \right) \phi(x_1, \dots, x_m) \Big|_{x_j=0}. \quad (2.80)$$

Если ряд (2.80) сходится для любой функции $\phi(x_1, \dots, x_m) \in D(\mathbb{R}^{4m})$, то согласно теореме Бореля (см. [12], раздел 1.5) число отличных от нуля коэффициентов $a(k_j^\mu)$ конечно.

Преобразование Фурье обобщенной функции (2.80) является степенным рядом. Поэтому естественно определить ряд (2.80) для функций $\phi(x_1, \dots, x_m) \in S(\mathbb{R}^{4m})$, у которых преобразования Фурье (2.78) имеют компактные носители.

Аналогичный результат можно получить с помощью теоремы о конечной ковариантности. Пусть функция $f(z_1, \dots, z_m)$ голоморфна в m -точечной расширенной трубе

$$T_m' = \{z \in \mathbb{C}^{4m} : \tilde{z}_k = A(\tilde{x}_k + i\tilde{y}_k)B, y_k \in V_+, k = 1, \dots, m, A, B \in SL(2, \mathbb{C})\}.$$

Пусть ее ограничения на

$$T_m^+ = \{z \in \mathbb{C}^{4m} : z_k = x_k + iy_k, y_k \in V_+, k = 1, \dots, m\}$$

и

$$T_m^- = \{z \in \mathbb{C}^{4m} : z_k = x_k - iy_k, y_k \in V_+, k = 1, \dots, m\}$$

являются преобразованиями Фурье–Лапласа двух обобщенных функций умеренного роста на $\mathbb{R}^{4m}$, $\tilde{f}^+(x_1, \dots, x_m)$ и $\tilde{f}^-(x_1, \dots, x_m)$ соответственно. Пусть носители обобщенных функций $\tilde{f}^+(x_1, \dots, x_m)$ и $\tilde{f}^-(-x_1, \dots, -x_m)$ лежат в $\bar{V}_+^{\times m}$. Тогда для всех $z \in T'_m$ и $A, B \in SL(2, \mathbb{C})$ справедлива следующая формула:

$$f(A\tilde{z}_1B, \dots, A\tilde{z}_mB) = \sum_{l, i=0, 1/2, \dots, L} \sum_{k, n=-l}^l \sum_{\dot{k}, \dot{n}=-i}^i t_{nk}^l(A) t_{\dot{n}\dot{k}}^i(B) F_{k, n, \dot{k}, \dot{n}}^{l, i}(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_m). \quad (2.81)$$

Здесь матричные элементы $F_{k, n, \dot{k}, \dot{n}}^{l, i}(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_m)$ являются голоморфными функциями от z в области T'_m и имеют те же свойства, что предполагаются для функции $f(z_1, \dots, z_m)$.

Частный случай ($m = 1$) этой теоремы был доказан Боголюбовым и Владимировым [13], [14]. Общий случай этой теоремы был доказан в работах [8], [15] с помощью гипотезы о m -точечной расширенной трубе. Гипотеза о m -точечной расширенной трубе была доказана в работе [16].

Рассмотрим бесконечный ряд

$$\int d^4x F^+(x) \phi(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}_+/2} \sum_{m, \dot{m}=-l}^l \int d^4x f_{m, \dot{m}}^l((x, x)) \theta(x^0) (\partial_x, \partial_x)^q t_{m\dot{m}}^l(-\tilde{\partial}_x) \phi(x), \quad (2.82)$$

где непрерывные функции $f_{m, \dot{m}}^l(s)$ с носителем на положительной полуоси полиномиально ограничены. Предположим, что этот ряд абсолютно сходится для любой пробной функции $\phi(x) \in S(\mathbb{R}^4)$. Следовательно, обобщенная функция умеренного роста (2.82) имеет носитель в замкнутом верхнем световом конусе $\bar{V}_+$. Можно вычислить преобразование Фурье–Лапласа обобщенной функции (2.82):

$$\begin{aligned} \int d^4x F^+(x) e^{i(z, x)} &= \sum_{l \in \mathbb{Z}_+/2} \sum_{m, \dot{m}=-l, -l+1, \dots, l-1, l} \int_0^\infty s ds f_{m, \dot{m}}^l(s) \times \\ &\times 2\pi(-z, z))^q t_{m\dot{m}}^l(-i\tilde{z})(-s(z, z))^{-1/2} K_1((-s(z, z))^{1/2}). \end{aligned} \quad (2.83)$$

Этот ряд сходится для $z \in T_1^+$, следовательно, функция, заданная равенством (2.83), является голоморфной по z в трубе T_1^+ . Любой член ряда (2.83) имеет аналитическое продолжение по z в область T_1' . Пусть этот ряд сходится для $z \in T_1'$, тогда функция (2.83) имеет аналитическое продолжение по z в область T_1' .

Поскольку бесконечный ряд (2.82) абсолютно сходится для любой пробной функции $\phi(x) \in S(\mathbb{R}^4)$, бесконечный ряд

$$\int d^4x F^-(x) \phi(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}_+/2} \sum_{m, \dot{m}=-l}^l \int d^4x f_{m, \dot{m}}^l((x, x)) \theta(-x^0) (\partial_x, \partial_x)^q t_{m\dot{m}}^l(-\tilde{\partial}_x) \phi(x) \quad (2.84)$$

абсолютно сходится для любой пробной функции $\phi(x) \in S(\mathbb{R}^4)$. Следовательно, обобщенная функция умеренного роста $F^-(-x)$ имеет носитель в замкнутом верхнем световом конусе $\bar{V}_+$. Ограничение функции (2.83) на трубу T_1^- является преобразованием Фурье–Лапласа обобщенной функции (2.84). Теперь из соотношения (2.81) теоремы о конечной ковариантности для случая $m = 1$ следует, что

число ненулевых членов в ряду (2.83) конечно, поэтому число ненулевых членов в рядах (2.82) и (2.84) конечно. Кажется естественным определить ряд (2.82) для функций $\phi(x) \in S(\mathbb{R}^4)$, у которых преобразования Фурье (2.78) имеют компактные носители.

Существует другое доказательство этого результата. Предположим, что бесконечный ряд (2.82) абсолютно сходится для любой пробной функции $\phi(x) \in S(\mathbb{R}^4)$. Тогда обобщенная функция умеренного роста (2.82) имеет носитель в замкнутом верхнем световом конусе $\bar{V}_+$. Поскольку бесконечный ряд (2.82) абсолютно сходится для любой пробной функции $\phi(x) \in S(\mathbb{R}^4)$, бесконечный ряд (2.84) абсолютно сходится для любой пробной функции $\phi(x) \in S(\mathbb{R}^4)$. Следовательно, обобщенная функция умеренного роста $F^-(-x)$ имеет носитель в замкнутом верхнем световом конусе $\bar{V}_+$. Используя ряд (2.83), можно доказать, что преобразование Фурье разности обобщенных функций (2.82) и (2.84) равно нулю для любого пространственно-подобного аргумента. Теперь из представления Йоста–Лемана–Дайсона следует, что число ненулевых членов в рядах (2.82) и (2.84) конечно.

Благодарности. Работа поддержана РФФИ (грант № 07-01-00144) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-672.2006.1).

Список литературы

- [1] A. S. Wightman, L. Gårding, *Ark. Fys.*, **28** (1965), 129–189.
- [2] Р. Стритер, А. С. Вайтман, *PCT, спин и статистика и все такое*, Наука, М., 1966.
- [3] Р. Йост, *Общая теория квантованных полей*, Мир, М., 1967.
- [4] Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров, *Общие принципы квантовой теории поля*, Наука, М., 1987.
- [5] P. D. Methée, *Comment. Math. Helv.*, **28**:1 (1954), 225–269.
- [6] L. Gårding, J. L. Lions, *Nuovo Cimento*, **14**:1 (1959), 9–66, Suppl..
- [7] Yu. M. Zinoviev, *Comm. Math. Phys.*, **47**:1 (1976), 33–42.
- [8] J. Bros, H. Epstein, V. Glaser, *Comm. Math. Phys.*, **6**:2 (1967), 77–100.
- [9] Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп*, Наука, М., 1965.
- [10] В. С. Владимиров, *Методы теории функций многих комплексных переменных*, Наука, М., 1964.
- [11] В. В. Жаринов, *ТМФ*, **9**:2 (1971), 232–239.
- [12] Р. Нарасимхан, *Анализ на действительных и комплексных многообразиях*, Мир, М., 1971.
- [13] Н. Н. Боголюбов, В. С. Владимиров, *Науч. докл. высшей школы. Физ.-мат. науки*, **3** (1958), 26–35.
- [14] Н. Н. Боголюбов, В. С. Владимиров, *Науч. докл. высшей школы. Физ.-мат. науки*, **2** (1959), 179–179.
- [15] Н. Н. Боголюбов, В. С. Владимиров, “Представления n -точечных функций”, Сборник статей. 1. Посв. акад. И. М. Виноградову к его 80-летию, Труды МИАН, **112**, Наука, М., 1971, 5–21.
- [16] Ч. Щаньюй, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:1 (1998), 211–224.

Поступила в редакцию 10.07.2007,
после доработки 6.11.2007