Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Мешков, Нелокальные симметрии двухполевых дивергентных эволюционных систем, *ТМФ*, 2008, том 156, номер 3, 351–363

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6252>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:01:43

© 2008 г.

А. Г. Мешков*

НЕЛОКАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ ДВУХПОЛЕВЫХ ДИВЕРГЕНТНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ

Вычислены нелокальные симметрии для двухполевых дивергентных точно интегрируемых эволюционных уравнений третьего порядка. Эти симметрии, рассматриваемые как эволюционные уравнения, коммутируют с высшими аналогами уравнений, по которым они строились, и, видимо, являются точно интегрируемыми. Путем дифференцирования нелокальных систем и замен переменных получены локальные гиперболические системы, а также неэволюционные системы третьего порядка. Для некоторых новых систем найдены их представления нулевой кривизны.

Ключевые слова: сохраняющаяся плотность, слабо нелокальная переменная, нелокальная симметрия, отрицательный поток, точная интегрируемость.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной статье мы вычисляем нелокальные симметрии для систем, найденных в [1] путем симметричной классификации. Эти вычисления не требуют предварительного знания представления Лакса или представления нулевой кривизны. Проведенное исследование позволило найти, кроме известных цепочек Тоды, некоторые новые системы.

Поясним наш подход на примере уравнения $\sin$ -Гордон.

В работе [2], по-видимому, впервые были исследованы обобщенные симметрии уравнения $\sin$ -Гордон

$$v_{tx} = \sin v. \quad (1)$$

Оказалось, что одна из симметрий совпадает с модифицированным уравнением Кортевега–де Фриза (мКдФ)

$$v_t = v_{xxx} + \frac{1}{2}v_x^3. \quad (2)$$

На этот результат можно взглянуть иначе: записав уравнение $\sin$ -Гордон в эволюционном виде $u_t = \partial_x^{-1} \sin u$, можем сказать, что это нелокальное уравнение является симметрией уравнения мКдФ.

*Орловский государственный технический университет, Орел, Россия.
E-mail: a_meshkov@orel.ru

Рассмотрим это подробнее. Для упрощения формул введем функцию $u = iv_x$, которая удовлетворяет следующему уравнению:

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2}u^2u_x. \quad (3)$$

Очевидно, что u – сохраняющаяся плотность, поэтому можно ввести нелокальную переменную $w = D_x^{-1}u$ (подробнее см. в разделе 2). Далее, нетрудно проверить, что функции e^w и e^{-w} также являются сохраняющимися плотностями уравнения (3). Это позволяет ввести еще две нелокальные переменные $w_1 = D_x^{-1}e^w$, $w_2 = D_x^{-1}e^{-w}$.

Известно (см., например, [3]), что уравнение (3) допускает следующую симметрию:

$$u_\tau = c_1e^w + c_2e^{-w} + c_3(w_1e^{-w} + w_2e^w), \quad (4)$$

где c_i – произвольные постоянные.

Если $c_3 = 0$, то, принимая в (4) w за новую неизвестную функцию и заменяя $u = w_x$, получаем гиперболическое уравнение

$$w_{\tau x} = c_1e^w + c_2e^{-w}. \quad (5)$$

Выбирая конкретные значения величин c_1 и c_2 , очевидно, можно получить уравнения Лиувилля, ch-Гордон, sh-Гордон и sin-Гордон.

Если продифференцировать уравнение (4) при $c_3 = 0$, получаем $u_{\tau x} = u(c_1e^w - c_2e^{-w})$. Исключая w при помощи исходного уравнения, приходим к другому интегрируемому уравнению

$$u_{\tau x} = u\sqrt{u_\tau^2 - 4c_1c_2}. \quad (6)$$

При этом соотношение $u = w_x$ связывает (5) и (6).

Если $c_3 \neq 0$, то, дифференцируя уравнение (4) и комбинируя результат с исходным уравнением, получаем $(u^{-1}u_{\tau x})_x = uu_\tau - 2c_3u^{-2}u_x$. Растяжением переменной τ можно изменить c_3 . Полагая $c_3 = -1/2$, окончательно имеем

$$u_{\tau xx} = u^{-1}u_x(u_{\tau x} + 1) + u^2u_\tau. \quad (7)$$

Положив здесь $u_{\tau x} = uz_\tau$, получаем систему гиперболических уравнений:

$$z_{\tau x} = uu_\tau + u^{-2}u_x, \quad u_{\tau x} = uz_\tau. \quad (8)$$

Можно показать, что нелокальное уравнение (4) имеет представление Лакса, поэтому все его следствия, полученные дифференцированием, также имеют представления Лакса. Таким образом, одно интегрируемое эволюционное уравнение (3) порождает множество неэволюционных интегрируемых уравнений (5)–(8).

В литературе известно несколько методов построения новых интегрируемых уравнений по уравнению, имеющему представление Лакса или представление нулевой кривизны. Исключая из рассмотрения высшие аналоги интегрируемого уравнения, можно, видимо, утверждать, что все методы сводятся к заменам зависимых переменных. При этом новые переменные могут быть как локальными, так и нелокальными функциями исходных переменных. Чтобы новое уравнение было неэволюционным,

замена переменных должна быть, очевидно, нелокальной. Нам известны три способа введения нелокальных переменных.

Во-первых, в качестве новых переменных можно принять коэффициенты асимптотического разложения следа резольвенты оператора Лакса [4]. Если пользоваться современной терминологией, то можно сказать, что эти коэффициенты содержат интегралы от канонических сохраняющихся плотностей ρ_n . Эти же плотности ρ_n еще раньше выводились при помощи асимптотических разложений собственных функций операторов Лакса [5]. Впоследствии было показано (см. [6]), что интегралы $w_n = D_x^{-1} \rho_n$ можно использовать как новые динамические переменные и их можно строить по любым сохраняющимся плотностям, а не только по каноническим.

Во-вторых, в качестве новых переменных можно принять собственные функции оператора Лакса, соответствующие различным собственным значениям [7].

В-третьих, в качестве новых переменных можно принять зависимые переменные, полученные в результате нескольких преобразований Беклунда [8]. В работе [9] предложена некоторая модификация этого метода.

В этой работе мы фактически используем первый способ. Однако новые нелокальные переменные вводятся с помощью классических законов сохранения, которые вычисляются непосредственно.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Рассмотрим эволюционную систему с двумя независимыми переменными t , x и m зависимыми переменными u^α :

$$u_t = K(t, x, u, u_x, \dots, u_n), \quad (9)$$

где $K = \{K^\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, m\}$ и $u = \{u^\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, m\}$ – бесконечно дифференцируемые вектор-функции, $u = u_0$, $u_x = u_1$, $u_k = \partial^k u / \partial x^k$. Совокупность всех зависимых переменных u_i^α будем обозначать одной буквой u для сокращения записи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [10]. *Обобщенной симметрией* системы (9) называется вектор-функция $\sigma(t, x, u, u_x, \dots, u_k)$, удовлетворяющая уравнению

$$(D_t - K_*)\sigma = 0, \quad (10)$$

где

$$(K_*)^\alpha_\beta = \sum_{k \geq 0} \frac{\partial K^\alpha}{\partial u_k^\beta} D_x^k, \\ D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{\alpha, k \geq 0} u_{k+1}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_k^\alpha}, \quad D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{\alpha, k \geq 0} (D_x^k K^\alpha) \frac{\partial}{\partial u_k^\alpha}. \quad (11)$$

Здесь D_x – оператор полного дифференцирования по x , D_t – оператор эволюционного дифференцирования.

Порядок дифференциального оператора f_* называется *порядком вектор-функции* f .

Обобщенные симметрии часто записывают в виде эволюционных систем

$$u_\tau = \sigma(u), \quad (12)$$

где τ – новый параметр эволюции. Ясно, что для получения неэволюционных интегрируемых уравнений следует искать симметрии, не зависящие явно от t .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [10]. Если на любом решении системы (9) выполнено тождество

$$D_t \rho(t, x, u) = D_x \theta(t, x, u), \quad (13)$$

где ρ и θ – некоторые дифференцируемые функции, то соотношение (13) называется *локальным законом сохранения системы (9)*. Функция ρ называется *сохраняющейся плотностью*, а функция θ – *плотностью тока*. Пару функций (ρ, θ) называют также *сохраняющимся током*.

Операторы (11) перестановочны, поэтому $\rho_0 = D_x f$ и $\theta_0 = D_x f$ – сохраняющийся ток при произвольной функции f . Такие токи называются тривиальными. Сохраняющиеся токи всегда определяют с точностью до тривиальных слагаемых.

Пусть (ρ, θ) – сохраняющийся ток, тогда система

$$D_x w = \rho(t, x, u), \quad D_t w = \theta(t, x, u) \quad (14)$$

совместна при любой функции u , удовлетворяющей уравнению (9). Решение уравнения (14) формально записывается в виде $w = D_x^{-1} \rho$. Можно рассматривать w как новую динамическую переменную, она называется слабо нелокальной или квазилокальной [6]. Такие переменные мы будем называть *нелокальными переменными первого порядка*. Пусть $\{\rho_i, \theta_i\}$ – локальные сохраняющиеся токи, а $\{w_i^{(1)} = D_x^{-1} \rho_i\}$ – соответствующие нелокальные переменные первого порядка. Если существуют сохраняющиеся токи, зависящие от $w_i^{(1)}$ и, возможно, от локальных переменных, то по ним можно определить новые слабо нелокальные переменные и т.д.

Порядок нелокальных переменных определим индуктивно. Пусть определены переменные $w^{(1)}, \dots, w^{(n)}$ до n -го порядка. Тогда, если имеется нетривиальная сохраняющаяся плотность $\rho(t, x, u, w^{(1)}, \dots, w^{(n)})$ и переменные $w_i^{(n)}$ не устраняются калибровочным преобразованием $\rho \rightarrow \rho + D_x f$, $\theta \rightarrow \theta + D_t f$, то переменную $w = D_x^{-1} \rho(t, x, u, w^{(1)}, \dots, w^{(n)})$ назовем нелокальной переменной $(n+1)$ -го порядка.

Операторы (11) продолжаются на нелокальные переменные w_i всех порядков по формулам

$$\hat{D}_x = D_x + \rho_i \frac{\partial}{\partial w_i}, \quad \hat{D}_t = D_t + \theta_i \frac{\partial}{\partial w_i}, \quad (15)$$

где по i подразумевается суммирование, (ρ_i, θ_i) – сохраняющиеся токи, по которым определяются переменные w_i с помощью (14). Известно, что продолженные операторы $\hat{D}_x$ и $\hat{D}_t$ коммутируют (см., например, [11]). Это означает, в частности, что определяющее уравнение для нелокальных симметрий получается из (10) заменой операторов (11) на (15). Если уравнение (10) с продолженным оператором имеет решение, зависящее от нелокальных переменных, то это решение называется нелокальной симметрией.

Для приложений наиболее интересны дифференциальные уравнения невысокого порядка. Поэтому для получения интересных интегрируемых гиперболических систем мы рассматриваем сохраняющиеся плотности и нелокальные симметрии, включающие только переменные u^α и u_1^α . Нелокальные переменные порядка больше двух не вычислялись, потому что зависящие от этих переменных симметрии чрезвычайно громоздкие.

Если система уравнений имеет вид

$$u_t^\alpha = D_x K^\alpha(t, x, u, u_x, \dots, u_{n-1}), \quad (16)$$

то ее называют дивергентной. Полагая в (16) $u^\alpha = U_x^\alpha$, получаем систему

$$U_t^\alpha = K^\alpha(t, x, U_x, \dots, U_n), \quad (17)$$

обычно называемую потенциальной версией системы (16), так как U является потенциалом для u .

Далее мы рассматриваем системы вида (17) с двумя независимыми функциями u и v , поэтому в общих формулах, рассмотренных выше, следует заменять u^1 и u^2 на u и v соответственно.

3. НЕЛОКАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ

Некоторые из систем, представленных в работе [1], не имеют нелокальных симметрий рассматриваемого типа, а другие допускают многопараметрические нелокальные симметрии. Произвольные постоянные, входящие в симметрии, обозначаются как c_i или k_i .

3.1. Первая из систем

$$u_t = u_3 + \frac{3}{2}u_1v_2 - \frac{3}{4}u_1v_1^2 + \frac{1}{4}u_1^3, \quad v_t = -\frac{1}{2}v_3 - \frac{3}{4}(2u_1u_2 + u_1^2v_1) + \frac{1}{4}v_1^3 \quad (18)$$

найдена ранее в [12] и связана с аффинной алгеброй $B_2^{(1)}$. Она допускает следующую нелокальную симметрию:

$$\begin{aligned} u_\tau = & c_2w_2 + c_3w_3 + c_4(w_4 - w_1w_2) + c_5(w_5 - w_1w_3) + \\ & + c_6(w_3w_4 - w_2w_5) + c_7(2w_7 - w_3w_1^2) + \\ & + c_8(w_2w_7 + w_3w_6 + w_4w_5 - w_1w_3w_4 - w_1w_2w_5) + \\ & + c_9(w_1w_3w_4 + w_1w_2w_5 - 2w_3w_6 - w_4w_5), \\ v_\tau = & c_1w_1 - c_2w_2 + c_3w_3 + c_4w_1w_2 - c_5w_1w_3 + \\ & + c_6(w_3w_4 + w_2w_5 - w_8) - c_7(2w_7 - 2w_1w_5 + w_3w_1^2) + \\ & + c_8(w_3w_6 - w_2w_7 - w_1w_3w_4 + w_1w_2w_5) + \\ & + c_9(w_3w_1w_4 + w_1w_8 - 2w_3w_6 - w_1w_2w_5), \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$w_1 = D_x^{-1}e^v, \quad w_2 = D_x^{-1}e^{u-v}, \quad w_3 = D_x^{-1}e^{-u-v}, \quad w_4 = D_x^{-1}w_2e^v, \quad w_5 = D_x^{-1}w_3e^v,$$

$$w_6 = D_x^{-1} w_1 w_2 e^v, \quad w_7 = D_x^{-1} w_1 w_3 e^v, \quad w_8 = D_x^{-1} w_2 w_3 e^v.$$

Мы проверили, что поток (19) коммутирует не только с потоком (18), но и со следующим элементом из иерархии интегрируемых систем:

$$\begin{aligned} u_t &= u_5 + \frac{5}{4} v_4 u_1 + \frac{5}{4} u_3 (2v_2 - v_1^2) + \frac{5}{4} v_3 (2u_2 - u_1 v_1) - \frac{5}{2} u_2 v_2 v_1 - \frac{5}{8} v_2^2 u_1 - \\ &\quad - \frac{5}{8} u_1 v_2 (u_1^2 + v_1^2) + \frac{1}{32} u_1 (5v_1^5 - 3u_1^4 + 10u_1^2 v_1^2), \\ v_t &= -\frac{1}{4} v_5 - \frac{5}{4} u_1 u_4 - \frac{5}{4} u_3 (u_2 + u_1 v_1) - \frac{5}{8} v_3 (u_1^2 - v_1^2) + \frac{5}{8} v_1 v_2^2 - \frac{5}{4} u_1 u_2 v_2 + \\ &\quad + \frac{5}{8} u_1 u_2 (u_1^2 + v_1^2) + \frac{1}{32} v_1 (5u_1^4 - 3v_1^4 + 10u_1^2 v_1^2). \end{aligned}$$

Поэтому есть основания надеяться на точную интегрируемость системы (19).

Для всех рассматриваемых ниже систем мы также проверили коммутативность нелокальных симметрий с высшими элементами из соответствующих иерархий, и далее мы об этом не упоминаем. Высшие элементы иерархий не приводятся для уменьшения объема статьи.

3.1.1. Положив в (19) $c_i = 0$, $i > 3$, получаем цепочку Тоды:

$$u_{\tau x} = c_2 e^{u-v} + c_3 e^{-u-v}, \quad v_{\tau x} = c_1 e^v - c_2 e^{u-v} + c_3 e^{-u-v}. \quad (20)$$

Согласно обозначениям работы [12] запишем систему $u_{i,tx} = \exp[\sum_j u_j A_{ji}]$, где A_{ji} , $i, j = 1, 2, 3$, – матрица Картана аффинной алгебры $D_3^{(2)}$ с диаграммой Дынкина $\circ \longleftarrow \circ \Longrightarrow \circ$. В явном виде имеем

$$u_{1,tx} = \exp[2u_1 - 2u_3], \quad u_{2,tx} = \exp[2u_2 - 2u_3], \quad u_{3,tx} = \exp[2u_3 - u_1 - u_2].$$

Легко видеть, что функции $p = u_1 - u_3$, $q = u_2 - u_3$ удовлетворяют системе $p_{tx} = e^{2p} - e^{-p-q}$, $q_{tx} = e^{2q} - e^{-p-q}$. Эта же система получается, если в системе (20) выполнить подстановку $u - v = 2p$, $u + v = -2q$ и избавиться от постоянных $c_i \neq 0$ сдвигами по p , q , x . Однако постоянные в (20) могут быть и нулевыми. В частности, в случае $c_1 = 0$ система распадается на два уравнения Лиувилля.

Систему (20) можно представить в различных формах, выбирая в качестве неизвестных функций нелокальные переменные. Например, при $p = w_1$, $q = w_2$ получаем

$$p_{\tau x} = p_x (c_1 p - c_2 q + c_3 w), \quad q_{\tau x} = q_x (2c_2 q - c_1 p), \quad w_x = p_x^{-2} q_x^{-1}.$$

3.1.2. Если в (19) $c_4 = 1$ и $c_i = 0$, $i > 4$, то имеется несколько возможностей.

А. Пусть $p = w_1$ и $q = \ln w_2$ – новые неизвестные функции. Тогда при $c_1 = c_3 = 0$ получаем

$$p_{\tau x} = e^q p p_x, \quad q_{\tau x} = -e^q p q_x + f(\tau) q_x, \quad (21)$$

где $f(\tau)$ – “постоянная” интегрирования.

Б. Пусть $c_3 = 0$, тогда подстановка

$$u = \ln \left(U_x \left(\frac{V_x}{U_x} \right) \right), \quad v = \ln U_x, \quad w_1 = U, \quad w_2 = \frac{V_x}{U_x}, \quad w_4 = V$$

приводит к уравнениям, отличным от (21):

$$U_{\tau x} = c_1 U U_x - c_2 V_x + U V_x, \quad V_{\tau x} = c_1 V U_x + V V_x + f(\tau) U_x. \quad (22)$$

Отметим, что если в (19) $c_4 = 0$, $c_5 \neq 0$, то, немного изменив вид предыдущей подстановки, снова приходим к системе (22). Если при выводе системы (22) считать, что $c_3 \neq 0$, то возникают более сложные уравнения третьего порядка.

В. Дифференцируя дважды уравнения (19) при произвольных c_1 , c_2 , c_3 , получаем локальную систему третьего порядка

$$u_{\tau xx} = (2u_x + z_x)u_{\tau x} + cu_x e^z - e^u, \quad z_{\tau xx} = -(z_x + u_x)z_{\tau x} + c(u_x + 2z_x)e^z - e^u,$$

где $z = -u - v$, $c = -2c_3$.

3.1.3. Положим в (19) $c_7 = -1$, $c_i = 0$, $i > 3$. Тогда эта система приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} u_{txx} &= -u_{tx}(p_x + 2u_x) + 2c_2 u_x e^{-p} + 2\sqrt{u_{tx}e^p - c_2 - c_3 e^{-2u}}, \\ p_{txx} &= p_{tx}(u_x + p_x) + 2c_2(u_x + 2p_x)e^{-p} + 2\sqrt{u_{tx}e^p - c_2 - c_3 e^{-2u}}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $p = v - u$.

3.2. Вторая интегрируемая система

$$\begin{aligned} u_t &= u_3 - 3v_3 + 3v_2(v_1 - 2u_1) + 3u_1 v_1^2 - 2u_1^3, \\ v_t &= -3u_3 + 4v_3 - 3u_2(v_1 - 2u_1) + 3v_1 u_1^2 - 2v_1^3, \end{aligned} \quad (24)$$

найдена ранее в [12] и связана с аффинной алгеброй $A_4^{(2)}$. Она допускает следующую нелокальную симметрию:

$$\begin{aligned} u_{\tau} &= c_2 w_2 + c_3 w_3 + c_4 w_4 + c_5(2w_2 w_3 - w_5) + c_6 w_6 + \\ &\quad + c_7(2w_3 w_4 - w_7) + c_8(2w_3 w_6 - w_9) + c_9 w_2(w_2 w_3 - w_5) - \\ &\quad - c_{10}(w_5 w_6 + w_2 w_9 - 2w_4 w_7 + 2w_3 w_4^2 - 2w_2 w_3 w_6), \\ v_{\tau} &= c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_4 w_1 w_2 + c_5 w_5 + c_6(2w_1 w_4 - w_6) + \\ &\quad + c_7 w_1 w_5 + c_8(2w_1 w_7 - w_9) + c_9(2w_8 - w_2 w_5) + \\ &\quad + c_{10}(w_5 w_6 - w_2 w_9 - 2w_1 w_4 w_5 + 2w_1 w_2 w_7), \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} w_1 &= D_x^{-1} e^v, & w_2 &= D_x^{-1} e^{-u-v}, & w_3 &= D_x^{-1} e^{2u}, \\ w_4 &= D_x^{-1} w_1 e^{-u-v}, & w_5 &= D_x^{-1} w_3 e^{-u-v}, & w_6 &= D_x^{-1} w_1^2 e^{-u-v}, \\ w_7 &= D_x^{-1} w_1 w_3 e^{-u-v}, & w_8 &= D_x^{-1} w_2 w_3 e^{-u-v}, & w_9 &= D_x^{-1} w_1^2 w_3 e^{-u-v}. \end{aligned}$$

Приведем простые локальные системы, вытекающие из (25).

3.2.1. Положив $c_i = 0$ при $i > 3$, получаем цепочку Тоды:

$$u_{\tau x} = c_2 e^{-u-v} + c_3 e^{2u}, \quad v_{\tau x} = c_1 e^v + c_2 e^{-u-v}. \quad (26)$$

Если записать систему $u_{i,tx} = \exp[\sum_j u_j A_{ji}]$, где A_{ji} – матрица Картана аффинной алгебры $A_4^{(2)}$ с диаграммой Дынкина $\circ \implies \circ \implies \circ$, и положить $u = 2u_1 - u_2$, $v = 2u_3 - u_2$, то получим систему (26) с постоянными $c_1 = 2$, $c_2 = -1$, $c_3 = 1$. Систему (26) можно записать в различных формах. Например, при $p = w_1$, $q = w_2$ имеем

$$p_{\tau x} = p_x(c_1 p + c_2 q), \quad q_{\tau x} = -q_x(c_1 p + 2c_2 q + c_3 w), \quad w_x = (p_x q_x)^{-2}.$$

3.2.2. Если $c_i = 0$, $i > 4$, $c_4 = 1$, то двукратное дифференцирование уравнений (25) приводит к следующей системе:

$$\begin{aligned} u_{\tau xx} &= -u_{\tau x}(u_x + v_x) + c(3u_x + q_x)e^{2u} + e^{-u}, & c &= c_3, \\ v_{\tau xx} &= v_x v_{\tau x} - u_{\tau x}(u_x + 2v_x) + c(u_x + 2v_x)e^{2u} + 2e^{-u}. \end{aligned} \quad (27)$$

Очевидно, что порядок второго уравнения можно понизить подстановкой $v_x \rightarrow v$. Если принять, при прежних условиях, $p = w_1$ и $q = w_2$ за новые функции, то получаем систему следующего вида:

$$p_{\tau x} = p_x(c_1 p + c_2 q + pq), \quad (\ln q_x)_{\tau x} = p_x(c_1 + q) - c_3 p_x^{-2} q_x^{-2}.$$

3.2.3. Если $c_4 = 0$, $c_5 = 1$, $c_i = 0$, $i > 5$, то двукратное дифференцирование уравнений (25) приводит к следующей системе:

$$\begin{aligned} u_{\tau xx} &= 2u_x u_{\tau x} - v_{\tau x}(3u_x + v_x) + c(3u_x + v_x)e^v + 3e^{u-v}, \\ v_{\tau xx} &= -v_{\tau x}(u_x + v_x) + c(u_x + 2v_x)e^v + e^{u-v}, & c &= c_1. \end{aligned} \quad (28)$$

3.2.4. Если $c_6 = 1$, $c_i = 0$, $i > 4$, то приходим к следующей системе:

$$\begin{aligned} u_{\tau xx} &= -2u_{\tau x}(u_x + q_x) + 2c(2u_x + q_x)e^{2u} + 2\sqrt{u_{\tau x}e^{2q} + be^{-2u} - ce^{2(u+q)}}, \\ q_{\tau xx} &= q_{\tau x}(u_x + 2q_x) + \frac{1}{2}c(2q_x - u_x)e^{2u} + \sqrt{u_{\tau x}e^{2q} + be^{-2u} - ce^{2(u+q)}}, \end{aligned} \quad (29)$$

где $b = c_4^2/4 - c_2$, $c = c_3$, $q = (v - u)/2$. Заметим, что в случае $b = c = 0$ порядок первого уравнения можно понизить подстановкой $u_x \rightarrow u$.

3.3. Система

$$u_t = u_3 + u_1 v_2 - u_1 v_1^2, \quad v_t = u_2 u_1 + u_1^2 v_1 \quad (30)$$

найдена ранее в [12] и связана с аффинной алгеброй $A_3^{(2)}$. Она допускает следующую нелокальную симметрию:

$$\begin{aligned} u_{\tau} &= c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_4(w_4 - w_1 w_3) + c_5(w_5 - w_1 w_4) + \\ &\quad + c_6(w_6 - w_2 w_3) + c_7(w_1 w_6 - w_2 w_4) + c_8(w_8 - w_2 w_6), \\ v_{\tau} &= -c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 + c_4(w_4 + w_1 w_3) + c_5 w_1 w_4 - \\ &\quad - c_6(w_6 + w_2 w_3) - c_7(w_1 w_6 + w_2 w_4) - c_8 w_2 w_6, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} w_1 &= D_x^{-1} e^{u-v}, & w_2 &= D_x^{-1} e^{-u-v}, & w_3 &= D_x^{-1} e^{2v}, & w_4 &= D_x^{-1} w_1 e^{2v}, \\ w_5 &= D_x^{-1} w_1^2 e^{2v}, & w_6 &= D_x^{-1} w_2 e^{2v}, & w_7 &= D_x^{-1} w_1 w_2 e^{2v}, & w_8 &= D_x^{-1} w_2^2 e^{2v}. \end{aligned}$$

3.3.1. В случае $c_i = 0$, $i > 3$, получаем следующую цепочку Тоды:

$$u_{\tau x} = c_1 e^{u-v} + c_2 e^{-u-v}, \quad v_{\tau x} = -c_1 e^{u-v} + c_2 e^{-u-v} + c_3 e^{2v}. \quad (32)$$

При $p = u - v$, $q = -u - v$ эта система имеет вид

$$p_{\tau x} = 2c_1 e^p - c_3 e^{-p-q}, \quad q_{\tau x} = -2c_2 e^q - c_3 e^{-p-q}.$$

Отсюда легко найти, что система (32) связана с аффинной алгеброй $C_2^{(1)}$, имеющей диаграмму Дынкина $\circ \implies \circ \longleftarrow \circ$. Видно, что в случае $c_3 = 0$ эта система распадается на независимые уравнения Лиувилля.

3.3.2. Если $c_4 \neq 0$, $c_i = 0$, $i > 4$, то при $p = w_1$, $q = w_3$ система (31) принимает следующий вид:

$$p_{\tau x} = p_x(2c_1 p - c_3 q - 2c_4 p q), \quad (q_x^{-1} q_{\tau x})_x = 2c_3 q_x - 2c_1 p_x + 4c_4 p q_x + 2c_4 q p_x + 2c_2 p_x^{-1} q_x^{-1}.$$

Если же просто продифференцировать систему (31), то получим

$$u_{\tau x x} = u_{\tau x}(2u_x - p_x) - 2c_2 u_x e^{-p} - c_4 e^p, \quad p_{\tau x x} = 2p_{\tau x}(p_x - u_x) + 2c_2 e^{-p}(2u_x - 3p_x) + 2c_4 e^p,$$

где $p = u + v$. Очевидно, что заменой $u_x \rightarrow u$ можно понизить порядок первого уравнения.

3.3.3. Если $c_5 \neq 0$, а остальные $c_i = 0$, $i > 3$, то дифференцирование системы (31) приводит к следующей системе:

$$\begin{aligned} u_{\tau x x} &= u_{\tau x}(2u_x + q_x) - 2c_2 u_x e^q + \sqrt{a q_{\tau x} e^{2u} + b e^{-2q} + 2a c_2 e^{2u+q}}, \\ q_{\tau x x} &= -2q_{\tau x}(u_x + q_x) - 2c_2(2u_x + 3q_x)e^q + 2\sqrt{a q_{\tau x} e^{2u} + b e^{-2q} + 2a c_2 e^{2u+q}}, \end{aligned} \quad (33)$$

где $a = -c_5$, $b = -c_3 c_5$, $q = -u - v$.

Заметим, что системы (29) и (33) совпадают при $c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Это удивительно, поскольку их симметрии (24) и (30) совершенно разные. В качестве объяснения этого совпадения выскажем следующую гипотезу. Система

$$u_{\tau x x} = u_{\tau x}(2u_x + q_x) + e^u \sqrt{q_{\tau x}}, \quad q_{\tau x x} = -2q_{\tau x}(u_x + q_x) + 2e^u \sqrt{q_{\tau x}}$$

лиувиллевская и обладает двумя последовательностями симметрий, которые строятся по разным интегралам.

3.4. Система

$$u_t = u_3 + v_1 v_2 - \frac{1}{2} u_1^3 + \frac{1}{2} u_1 v_1^2 + c_1 v_1, \quad v_t = u_2 v_1 - \frac{1}{2} u_1^2 v_1 + \frac{1}{2} v_1^3 - c_1 u_1 + c_2 v_1 \quad (34)$$

содержит две существенные константы, от которых зависят и количество, и вид допускаемых симметрий. Это становится понятным, если учесть, что систему (34) можно получить из системы Ито дифференциальной подстановкой, зависящей от c_1 и c_2 (см. [1]). Если $c_1 = 0$, то дифференциальная подстановка существенно упрощается, а в случае $c_1 = c_2 = 0$ подстановка исчезает.

Симметрии системы (34) имеют простой вид только при $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$:

$$\begin{aligned} u_\tau &= k_1 w_1 + k_2 w_2 + k_3 (w_5 + 2w_2 w_3) + k_4 (w_1 w_5 - 4w_1 w_2 + 2w_2 w_4), \\ v_\tau &= -2k_2 e^{-u} v_x - 4k_3 e^{-u} v_x (2 + w_3) - 4k_4 e^{-u} v_x w_4, \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} w_1 &= D_x^{-1} e^u, & w_2 &= D_x^{-1} e^{-u} (v_x^2 + c_2), & w_3 &= D_x^{-1} e^u w_2, \\ w_4 &= D_x^{-1} e^u w_2 w_1, & w_5 &= D_x^{-1} (4v_x^2 e^{-u} - e^u w_2^2). \end{aligned}$$

Если $k_3 = k_4 = 0$, то дифференцированием системы (35) получаем простую локальную систему

$$u_{\tau x} = k_1 e^u + k_2 (v_x^2 + c_2) e^{-u}, \quad v_\tau = -2k_2 v_x e^{-u}.$$

Симметрии системы (34) представлены более полно в расширенном варианте статьи [13]. Все остальные точно интегрируемые системы, найденные в работе [1], не допускают нелокальных симметрий или допускают тривиальные симметрии, приводящие к уравнению Лиувилля.

4. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

Здесь мы приводим матрицы U и V , входящие в представления нулевой кривизны

$$U_\tau - V_x + [U, V] = 0$$

для некоторых из систем, связанных с (24). Спектральный параметр во всех случаях обозначается через k .

Система (24) получается из более простой системы Дринфельда–Соколова [12]

$$\begin{aligned} m_t &= m_3 - 3n_3 - 3m_x(4m - 9n) + 3n_x(8m - 15n), \\ n_t &= -3m_3 + 4n_3 + 12m_x n + 6n_x(m - 4n) \end{aligned} \quad (36)$$

при помощи следующей дифференциальной подстановки:

$$m = u_x^2 + \frac{1}{2} v_x^2 - u_2 - v_2, \quad n = u_x^2 - u_2. \quad (37)$$

Поэтому приведем вначале матрицы U_0 и V_0 , дающие представление нулевой кривизны для системы (36):

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & n-m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & m-n \\ 0 & n & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_0 = \begin{pmatrix} h_{1,x} & h_2 & f_1 & 0 & -5k \\ 0 & h_{3,x} & -5k & -2h_3 & 0 \\ -h_1 & 0 & 0 & 5 & -f_1 \\ 5k & f_2 & 0 & -h_{3,x} & kh_2 \\ 0 & 5 & h_1 & 0 & -h_{1,x} \end{pmatrix}, \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} h_1 &= 7n - 4m, & h_2 &= m - 3n, & h_3 &= 4n - 3m, \\ f_1 &= -4m_2 + 7n_2 + 4m^2 + 7n^2 - 11mn, & f_2 &= -3m_2 + 4n_2 - 8n^2 + 6mn. \end{aligned}$$

Матрицы (38) принадлежат алгебре $sl(5, \mathbb{C})$.

Выполнив подстановку (37) в матрицах (38) и устранив u_2 и v_2 из матрицы U_0 калибровочным преобразованием $U = S^{-1}(U_0 S - S_x)$, $V = S^{-1}(V_0 S - S_t)$, получаем представление нулевой кривизны для системы (24):

$$U = \begin{pmatrix} v_x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -u_x & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_x & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -v_x \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & 0 & -5v_x & -5k \\ 0 & \varphi_3 & -5k & \varphi_4 & 5kv_x \\ -\varphi_5 & 5h & 0 & 5 & 0 \\ 5k & 0 & 5kh & -\varphi_3 & k\varphi_2 \\ 0 & 5 & \varphi_5 & 0 & -\varphi_1 \end{pmatrix}, \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 4v_3 - 3u_3 + 3u_2(2u_x - v_x) + 3v_x u_x^2 - 2v_x^3, \\ \varphi_2 &= 2u_2 - v_2 - 2u_x^2 - 2v_x^2 + 5u_x v_x, \\ \varphi_3 &= 3v_3 - u_3 + 3v_2(2u_x - v_x) - 3u_x v_x^2 + 2u_x^3, & h &= v_x - u_x, \\ \varphi_4 &= 2u_2 - 6v_2 - 2u_x^2 + 3v_x^2, & \varphi_5 &= 4v_2 - 3u_2 + 3u_x^2 - 2v_x^2. \end{aligned}$$

Из системы $\Psi_x = U\Psi$, где матрица U имеет вид (39), нетрудно получить скалярное уравнение

$$(\partial_x - u_x)(\partial_x + u_x)(\partial_x - v_x)\partial_x(\partial_x - v_x)\Psi_5 + k\Psi_5 = 0,$$

из которого ясно, что мы имеем нетривиальное представление нулевой кривизны.

Матрица U для цепочки Тоды (26) указана в (39), а матрица V записывается в следующем виде:

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c_1 e^v & 0 & 0 \\ -c_2 e^{-u-v} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 e^v \\ 0 & c_3 e^{2u} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k^{-1} c_2 e^{-u-v} & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы предположили, что системы (27)–(29) принадлежат иерархии интегрируемых уравнений, порождаемой системой (24). В таком случае представления нулевой кривизны для всех этих систем должны иметь общую матрицу U (см. (39)). Вычисления подтвердили это предположение, поэтому мы приводим ниже только матрицы V для указанных систем.

Для систем (27), (28), (29) имеем соответственно

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_{\tau x} - v_{\tau x} - ce^{2u} & 0 & 0 \\ ce^{2u} - u_{\tau x} & 0 & -e^{-u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k^{-1}e^{-u} & v_{\tau x} - u_{\tau x} + ce^{2u} \\ 0 & ce^{2u} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^{-1}(ce^{2u} - u_{\tau x}) & 0 \end{pmatrix}, \quad (40)$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -ce^v & 0 & 0 \\ ce^v - v_{\tau x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ce^v \\ -e^{u-v} & u_{\tau x} - v_{\tau x} + ce^v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{-1}e^{u-v} & 0 & k^{-1}(ce^v - v_{\tau x}) & 0 \end{pmatrix}, \quad (41)$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2q_{\tau x} - ce^{2u} & 2k^{-1}e^{2q} & 0 \\ ce^{2u} - u_{\tau x} & 0 & -2r & 0 & 2e^{2q} \\ 0 & 0 & 0 & -2k^{-1}r & 2q_{\tau x} + ce^{2u} \\ 0 & ce^{2u} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^{-1}(ce^{2u} - u_{\tau x}) & 0 \end{pmatrix}, \quad (42)$$

где $r = \sqrt{u_{\tau x}e^{2q} + be^{-2u} - ce^{2(u+q)}}$, а в матрице U для системы (29) (см. (39)) следует выполнить подстановку $v = u + 2q$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как уже отмечалось выше, каждая представленная нелокальная симметрия является симметрией и для указанной эволюционной системы, и для ее высшего аналога. Это дает веские основания надеяться на точную интегрируемость полученных гиперболических систем и систем с высшими производными. Но утверждение о точной интегрируемости какой-либо системы, конечно, нуждается в доказательстве, например путем построения представления нулевой кривизны. Для систем (27)–(29) мы представили такое доказательство, а для других систем эта задача может составить предмет будущего исследования.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-01-00775-а).

Список литературы

- [1] А. Г. Мешков, *Фундамент. и прикл. матем.*, **12:7** (2006), 141–161.
- [2] S. Kumei, *J. Math. Phys.*, **16:12** (1975), 2461–2468.

- [3] Zhijun Qiao, *Negative order MKdV hierarchy and a new integrable Neumann-like system*, [arXiv: nlin/0201065](#).
- [4] И. М. Гельфанд, Л. А. Дикий, *УМН*, **30**:5 (1975), 67–100; *Функц. анализ и его прил.*, **11**:2 (1977), 11–27.
- [5] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *ЖЭТФ*, **61**:1 (1971), 118–134.
- [6] И. Ш. Ахатов, Р. К. Газизов, Н. Х. Ибрагимов, “Нелокальные симметрии. Эвристический подход”, *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения*, **34**, ред. Р. В. Гамкрелидзе, ВИНТИ, М., 1989, 3–83; В. В. Соколов, С. И. Свинолупов, *Матем. заметки*, **48**:6 (1990), 91–97.
- [7] В. Г. Дринфельд, В. В. Соколов, *Докл. АН СССР*, **284**:1 (1985), 29–33.
- [8] A. B. Shabat, R. I. Yamilov, *Phys. Lett. A*, **130**:4–5 (1988), 271–275; А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *Алгебра и анализ*, **2**:2 (1990), 183–208; А. П. Веселов, А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прил.*, **27**:2 (1993), 1–21; A. B. Shabat, R. I. Yamilov, *Phys. Lett. A*, **227**:1–2 (1997), 15–23.
- [9] А. Б. Борисов, С. А. Зыков, *ТМФ*, **115**:2 (1998), 199–215.
- [10] П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1989; Н. Х. Ибрагимов, *Применение групп преобразований в математической физике*, Наука, М., 1983; А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, В. В. Соколов, “Симметричный подход к классификации интегрируемых уравнений”, *Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов*, ред. В. Г. Бахтарьяр, В. Е. Захаров, В. М. Черноусенко, Наукова думка, Киев, 1990, 213–279.
- [11] A. Sergyeyev, “On recursion operators and nonlocal symmetries of evolution equations”, *Proc. Sem. Diff. Geom.*, Math. Publ., **2**, ed. D. Krupka, Silesian Univ. Opava, Opava, 2000, 159–173.
- [12] В. Г. Дринфельд, В. В. Соколов, “Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега–де Фриза”, *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики*, **24**, ред. Р. В. Гамкрелидзе, ВИНТИ, М., 1984, 81–180.
- [13] A. G. Meshkov, *Nonlocal symmetries of integrable two-field divergent evolutionary systems*, [arXiv: 0803.1425](#).

Поступила в редакцию 9.05.2007,
после доработки 7.11.2007