Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. И. Сулейманов, “Квантования” второго уравнения Пенлеве и проблема эквивалентности его L - A -пар, *ТМФ*, 2008, том 156, номер 3, 364–377

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6253>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 16:16:09

© 2008 г.

Б. И. Сулейманов*

“КВАНТОВАНИЯ” ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ И ПРОБЛЕМА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЕГО L -А-ПАР

Показано, что известная L -А-пара Фляшки–Ньюэлла для второго уравнения Пенлеве задает решения эволюционных линейных уравнений, схожих с квантовыми уравнениями Шредингера. С помощью преобразования Фурье распределений эта пара выводится из классической пары Гарнье.

Ключевые слова: квантовое уравнение Шредингера, гамильтониан, уравнения Пенлеве, изомонодромные деформации.

1. ВВЕДЕНИЕ

В современных исследованиях выявляются разные аспекты “квантовой” природы интегрируемости уравнений Пенлеве.

Этот процесс, вероятно, начался после работы Фляшки [1], в которой, в частности, было подчеркнуто, что L -А-пара второго уравнения Пенлеве

$$\varphi_{tt} = 2\varphi^3 + t\varphi - \alpha \quad (1)$$

определяется некоммутирующими линейными обыкновенными дифференциальными операторами относительно независимой переменной t .

Некоммутативность такого типа наблюдается и для первого уравнения Пенлеве

$$q_{tt} = 6q^2 + t. \quad (2)$$

Его L -А-пару определяют [2], [3] скалярные линейные дифференциальные операторы

$$P = 2\frac{\partial^3}{\partial t^3} - 6q\frac{\partial}{\partial t} - 3q_t, \quad Q = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2q. \quad (3)$$

Для этих операторов выполнение уравнения (2) равносильно справедливости соотношения

$$[Q, P] = QP - PQ = 1, \quad (4)$$

*Институт математики Уфимского научного центра РАН, Уфа, Россия.
E-mail: bisul@mail.ru

которое по аналогии с перестановочным соотношением между квантовыми операторами импульса и координаты логично назвать соотношением Гейзенберга [3].

Оказывается, справедлив и следующий факт: на решениях $q(t)$ уравнения (2) операторы (3) связаны также соотношением

$$\frac{\partial}{\partial t} - \frac{P^2}{2} + 2Q^3 + tQ = -H(t, q, p),$$

которое очень похоже на нестационарное квантовое уравнение Шредингера. Здесь $q = q(t)$, $p = q'_t(t)$, а гамильтониан

$$H(t, q, p) = \frac{p^2}{2} - 2q^3 - tq \quad (5)$$

определяет гамильтонову систему

$$q'_t = H'_p(t, q, p), \quad p'_t = -H'_q(t, q, p), \quad (6)$$

эквивалентную первому уравнению Пенлеве (2).

Согласно [1], [2] продифференцируем по параметру x уравнение

$$QW = xW. \quad (7)$$

Тогда с учетом операторного соотношения Гейзенберга (4) получим равенство

$$(Q - x)W_x = W = [Q, P]W = (Q - x)PW,$$

или, что то же самое, равенство $(Q - x)(W_x - PW) = 0$, а значит, и вывод о совместности дифференциального уравнения

$$W_x = PW \quad (8)$$

с обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) (7).

Из уравнений (7), (8) следует справедливость следующих соотношений:

$$W_{xx} = \frac{W_x - q_t W}{x - q} + (4x^3 + 2tx + 2H(t, q, p))W, \quad (9)$$

$$2(x - q(t))W_t = W_x - q_t W, \quad (10)$$

где $H(t, q, p)$ – гамильтониан (5), $q = q(t)$, $p = q'_t(t)$.

ОДУ (9) и уравнение (10) представляют L - A -пару первого уравнения Пенлеве (2). Ее можно привести к виду совместных линейных (2×2) -систем ОДУ первого порядка относительно независимых переменных t и x , а преобразование $W = \sqrt{x - q(t)} V$ приводит эту L - A -пару к паре совместных уравнений

$$V_{xx} = MV, \quad (11)$$

$$V_t = BV_x - \frac{B_x}{2}V, \quad (12)$$

найденной в классической работе Гарнье [4].

Из уравнений (9), (10) следует, что их общее решение $W(x, t)$ удовлетворяет линейному уравнению в частных производных

$$W_t = \frac{W_{xx}}{2} - (2x^3 + tx + H(t, q, p))W,$$

которое с помощью преобразования

$$W = \exp \left[- \int_{t_*}^t H(\tau, q(\tau), p(\tau)) d\tau \right] \Psi$$

приводится к линейному уравнению

$$\Psi_t = \frac{\Psi_{xx}}{2} - (2x^3 + tx)\Psi = H\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi,$$

не содержащему зависимости от решений первого уравнения Пенлеве.

В [5] для каждого из остальных пяти канонических уравнений Пенлеве указан похожий гамильтониан $H = H_j(t, q, p)$, $j = 2, \dots, 6$, который определяет гамильтонову систему (6), эквивалентную соответствующему ОДУ Пенлеве, и такой, что эволюционное уравнение

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi \quad (13)$$

(с конкретной очередностью действий операторов умножения на переменную x и дифференцирования по ней) имеет решения, задаваемые фактически L - A -парами вида (11), (12), указанными Гарнье в [4] (для шестого уравнения Пенлеве пара была указана еще ранее Фуксом в [6]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Квантовое уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\left(t, x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi,$$

соответствующее гамильтониану $H(t, q, p)$, зависит от постоянной Планка $\hbar = 2\pi\hbar$. Чтобы подчеркнуть как сходство, так и различие уравнений Шредингера и (13), последнее уравнение в данной статье будем называть “*квантованием*” ОДУ, *соответствующим гамильтониану* $H(t, q, p)$. Отметим, что подобные, не зависящие от постоянной Планка, “квантования” используются в задачах фильтрации диффузионных процессов [7].

Наряду с указанными в [4] L - A -парами для уравнений Пенлеве в последнее время были найдены и другие пары, эквивалентность которых парам из [4] установлена лишь для случаев первого, четвертого [8], [9] и шестого уравнений Пенлеве.

В частности, какая-либо связь между известной парой Фляшки–Ньюэлла [10] для второго уравнения Пенлеве (1) с L - A -парой Гарнье из [4] до сих пор не была известна. Более того, Капаев [9], исходя из различия в структурах данных монодромии, определяемых этими двумя парами, сделал вывод о том, что пары Фляшки–Ньюэлла и Гарнье, вероятно, калибровочно неэквивалентны.

В связи с этим обстоятельством возникает вопрос о “квантовании” вида (13), которое бы допускало решение, определяемое парой из [10]. В данной статье такое “квантование” указывается, причем одновременно устанавливается, что из L – A -пары Гарнье L – A -пара Фляшки–Ньюэлла может быть получена с помощью формального преобразования Фурье–Лапласа. Оказывается, что “квантования”, решаемые с помощью пар из [4] и [10], соответствуют гамильтонианам, связанным каноническим преобразованием типа “обобщенная координата $\longleftrightarrow$ обобщенный импульс” ([11], гл. I, § 5; гл. II, § 12; гл. IV, § 24), а сами эти “квантования” связаны преобразованием Фурье–Лапласа (являясь координатным и импульсным представлениями одного и того же “квантования”, см. [12], гл. VIII, § 17).

2. “КВАНТОВАНИЯ” ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ, СВЯЗАННЫЕ С ПАРОЙ ГАРНЬЕ

Гарнье [4] представил второе уравнение Пенлеве (1) в виде условия совместности уравнений (11), (12) с

$$\begin{aligned} M &= x^4 + tx^2 - 2\alpha x + \frac{3}{4(x - \varphi(t))^2} - \frac{\varphi'_t(t)}{x - \varphi(t)} + 2H(t, q, p), \\ B &= \frac{1}{2(x - \varphi(t))}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $q = \varphi(t)$, $p = \varphi'_t(t)$, а функция

$$H(t, q, p) = \frac{p^2}{2} - \frac{q^4 + 2tq^2 - 2\alpha q}{2} \quad (15)$$

представляет собой стандартный гамильтониан “энергии”, определяющий гамильтонову систему (6), эквивалентную второму уравнению Пенлеве (1).

Совместные решения уравнений (11), (12) с помощью гамильтониана (15) и соотношения

$$\Psi(t, x) = \sqrt{x - \varphi(t)} \exp\left(\int_{t_*}^t H(\tau, \varphi(\tau), \varphi'(\tau)) d\tau\right) V(t, x) \quad (16)$$

дают [5] совместные решения следующего “квантования” второго уравнения Пенлеве

$$\Psi_t = \frac{\Psi_{xx}}{2} - \frac{x^4 + tx^2 - 2\alpha x}{2} \Psi \quad (17)$$

и уравнения

$$\Psi_t - H(t, \varphi(t), \varphi'(t))\Psi = \frac{\Psi_x - \varphi_t \Psi}{2(x - \varphi(t))}. \quad (18)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Функция (16) есть решение линейного уравнения (17), которое определяется двухпараметрическим семейством решений нелинейных ОДУ $\varphi(t)$. Такая разрешимость уравнения (17) напоминает разрешимость известных линейных уравнений математической физики в результате разделения переменных. Но в данной статье под разрешимостью “квантований” уравнений Пенлеве всегда подразумевается лишь наличие у этих “квантований” частных решений, подобных решениям (16) уравнения (17).

Существуют и другие гамильтоновы представления второго уравнения Пенлеве. Например, гамильтоновы системы (6), определяемые гамильтонианом

$$H(t, q, p) = \varepsilon \frac{p^2}{2} - \frac{q^4 + 2tq - 2\alpha t}{2\varepsilon}, \quad (19)$$

при любом комплексном значении параметра ε эквивалентны ОДУ (1) при $q(t) = \varphi(t)$. Для гамильтониана (19) уравнение (13) представляет “квантование” второго уравнения Пенлеве, зависящее от этого произвольного параметра (заметим, что это уравнение при $\varepsilon = i\hbar$ совпадает с обычным квантовым уравнением Шредингера, которое в соответствии с традиционной схемой следовало бы сопоставить гамильтониану (15)). Однако решение вида (16), связанное с решением ОДУ (1), допускает лишь “квантование” при $\varepsilon = 1$, т.е. уравнение (17).

Тем не менее имеются и отличные от (15) гамильтонианы второго уравнения Пенлеве, для которых соответствующие уравнения (13) допускают решения, определяемые рассмотренной выше парой Гарнье. К таким гамильтонианам относятся квадратичные по q гамильтонианы

$$H(t, q, p) = H_+(t, q, p) = \frac{p^2}{2} + \left(q^2 + \frac{t}{2}\right)p + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)q, \quad (20)$$

$$H(t, q, p) = H_-(t, q, p) = \frac{p^2}{2} - \left(q^2 + \frac{t}{2}\right)p + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)q, \quad (21)$$

которые были указаны в работах [13], [14] (в подходящих гамильтоновых системах ОДУ (6) $q = \varphi(t)$). Соответствующие этим гамильтонианам “квантования” (13) имеют вид

$$\Psi_t^+ = \frac{\Psi_{xx}^+}{2} + \left(x^2 + \frac{t}{2}\right)\Psi_x^+ + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)x\Psi^+ \quad (22)$$

в случае гамильтониана (20) и

$$\Psi_t^- = \frac{\Psi_{xx}^-}{2} - \left(x^2 + \frac{t}{2}\right)\Psi_x^- + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)x\Psi^- \quad (23)$$

в случае гамильтониана (21).

Замена

$$\Psi(t, x) = \exp\left(\pm \frac{x^3}{3} \pm \frac{tx}{2} + \frac{t^3}{24}\right)\Psi^\pm(t, x) \quad (24)$$

приводит эти уравнения к “квантованию” (17), имеющему решение (16). Так что уравнения (22), (23) действительно также разрешимы в том смысле, как сказано в замечании 2.

Оба эти уравнения квадратичны по “квантовой” координате x . Довольно естественным поэтому выглядит вопрос о том, разрешимы ли в таком же смысле уравнения, получающиеся из них в результате преобразований типа интегрального преобразования Фурье–Лапласа (представления “квантований” (22), (23) в “импульсном” пространстве ([12], гл. VIII, § 17)).

Ответ на этот вопрос положителен. Подходящее преобразование функции $S(x)$ переменной x в функцию двойственной переменной y определяется с помощью линейного оператора K , образы $K[S(x)](y)$ которого при любом натуральном n удовлетворяют соотношениям

$$K[x^n S(x)](y) = \frac{d^n K[S](y)}{dy^n}, \quad (25)$$

$$K\left[\frac{d^n S(x)}{dx^n}\right](y) = (-1)^n y^n K[S](y). \quad (26)$$

Этот линейный оператор можно задать с помощью формального преобразования Фурье–Лапласа

$$K[S(x)](y) = \int_J e^{yx} S(x) dx.$$

С помощью решений уравнений (22) и (23) определим теперь следующие образы оператора K :

$$\Upsilon_1(t, y) = K[\Psi^+(t, x)](-y), \quad (27)$$

$$\Upsilon_2(t, y) = K[\Psi^-(t, x)](y). \quad (28)$$

Из соотношений (25), (26) вытекает, что данные образы удовлетворяют уравнениям

$$\Upsilon_{1t} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(y\Upsilon_1) - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \frac{\partial \Upsilon_1}{\partial y} + \frac{y^2 + ty}{2} \Upsilon_1, \quad (29)$$

$$\Upsilon_{2t} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(y\Upsilon_2) + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \frac{\partial \Upsilon_2}{\partial y} + \frac{y^2 + ty}{2} \Upsilon_2. \quad (30)$$

Уравнение (29) представляет собой “квантование” (13) ОДУ

$$\lambda_{1tt} = \frac{(\lambda_{1t})^2}{2\lambda_1} - 2(\lambda_1)^2 - t\lambda_1 - \frac{(\alpha + 1/2)^2}{2\lambda_1}, \quad (31)$$

которому удовлетворяет компонента $\lambda = \lambda_1$ гамильтоновой системы

$$\lambda_t = H_\mu(t, \lambda, \mu), \quad \mu_t = -H_\lambda(t, \lambda, \mu) \quad (32)$$

с гамильтонианом

$$H(t, \lambda, \mu) = H_1(t, \lambda, \mu) = \mu^2 \lambda - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \mu + \frac{\lambda^2 + t\lambda}{2}. \quad (33)$$

Из гамильтоновой системы (6) с гамильтонианом (20) эта система получается в результате канонического преобразования

$$\lambda = \lambda_1 = p = \varphi'_t - \varphi^2 - \frac{t}{2}, \quad \mu = \mu_1 = -q = -\varphi(t). \quad (34)$$

Уравнение (30) есть “квантование” (13) ОДУ

$$\lambda_{2tt} = \frac{(\lambda_{2t})^2}{2\lambda_2} - 2(\lambda_2)^2 - t\lambda_2 - \frac{(\alpha - 1/2)^2}{2\lambda_2}, \quad (35)$$

которому удовлетворяет компонента $\lambda = \lambda_2$ гамильтоновой системы (32) с гамильтонианом

$$H(t, \lambda, \mu) = H_2(t, \lambda, \mu) = \mu^2 \lambda + \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \mu + \frac{\lambda^2 + t\lambda}{2}. \quad (36)$$

Система (32) получается из гамильтоновой системы (6) с гамильтонианом (21) после канонического преобразования

$$\lambda = \lambda_2 = -p = -\varphi'_t - \varphi^2 - \frac{t}{2}, \quad \mu = \mu_2 = q = \varphi(t). \quad (37)$$

Отметим, что в соответствии с каноническими преобразованиями (34), (37) имеем ([11], гл. IV, § 24, пример 2)

$$H_1(t, \lambda, \mu) = H_+(t, q, p) = \frac{\varphi_t^2 - t\varphi^2 - \varphi^4 + (2\alpha + 1)\varphi}{2} - \frac{t^2}{8}, \quad (38)$$

$$H_2(t, \lambda, \mu) = H_-(t, q, p) = \frac{\varphi_t^2 - t\varphi^2 - \varphi^4 + (2\alpha - 1)\varphi}{2} - \frac{t^2}{8}. \quad (39)$$

ОДУ (31), (35) представляют собой ОДУ Пенлеве типа тридцать четыре, так что уравнения (29) и (30) являются в нашей терминологии “квантованиями” тридцать четвертого уравнения Пенлеве.

В следующем разделе будет показано, что оба данных “квантования” также разрешимы в указанном в замечании 2 смысле, и что их соответствующие частные решения определяются как раз L - A -парой для второго уравнения Пенлеве из работы [10].

3. ПАРА ФЛЯШКИ–НЬЮЭЛЛА И РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ (29), (30). ФОРМАЛЬНАЯ СВЯЗЬ С ПАРой ГАРНЬЕ

Для исследования аналитических и асимптотических свойств решений второго уравнения Пенлеве (1) в современных работах (см. монографию [15]) чаще используется не указанная в предыдущем разделе пара Гарнье, а как раз пара Фляшки–Ньюэлл [10]. Она представляет собой две линейные (2×2) -системы ОДУ первого порядка

$$Z_{1\zeta} = (-4i\zeta^2 - i(t + 2\varphi^2))Z_1 + \left(4\zeta\phi + \frac{\alpha}{\zeta} + 2i\varphi_t \right) Z_2, \quad (40)$$

$$Z_{2\zeta} = \left(4\zeta\varphi + \frac{\alpha}{\zeta} - 2i\varphi_t \right) Z_1 + (4i\zeta^2 + i(t + 2\varphi^2))Z_2,$$

$$\begin{aligned} Z_{1t} &= -i\zeta Z_1 + \varphi Z_2, \\ Z_{2t} &= \varphi Z_1 + i\zeta Z_2, \end{aligned} \quad (41)$$

условием совместности которых как раз и является выполнение уравнения (1) для функции $\varphi(t)$.

Невырожденное преобразование

$$\Phi_1 = Z_1 + Z_2, \quad \Phi_2 = Z_1 - Z_2$$

переводит L - A -пару (40), (41) в следующую пару систем линейных ОДУ:

$$\begin{aligned}\Phi_{1\zeta} &= \left(4\zeta\varphi + \frac{\alpha}{\zeta}\right)\Phi_1 - i(4\zeta^2 + t + 2\varphi^2 + 2\varphi_t)\Phi_2, \\ \Phi_{2\zeta} &= -i(4\zeta^2 + t + 2\varphi^2 - 2\varphi_t)\Phi_1 - \left(4\zeta\varphi + \frac{\alpha}{\zeta}\right)\Phi_2,\end{aligned}\quad (42)$$

$$\begin{aligned}\Phi_{1t} &= \varphi\Phi_1 - i\zeta\Phi_2, \\ \Phi_{2t} &= -i\zeta\Phi_1 - \varphi\Phi_2.\end{aligned}\quad (43)$$

Исключая из этих систем компоненту Φ_2 , получаем соотношения

$$\Phi_{1t} = \frac{\Phi_{1\zeta\zeta}}{8} + \left(2\zeta^4 + t\zeta^2 + \frac{\alpha - \alpha^2}{8\zeta^2} - \frac{\varphi_t^2 - t\varphi^2 - \varphi^4 + (2\alpha - 1)\varphi}{2} + \frac{t^2}{8}\right)\Phi_1, \quad (44)$$

$$\Phi_{1t} = \frac{\zeta\Phi_{1\zeta} + (\varphi(2\varphi_t + 2\varphi^2 + t) - \alpha)\Phi_1}{4\zeta^2 + t + 2\varphi^2 + 2\varphi_t}. \quad (45)$$

В свою очередь, замена

$$y = 2\zeta^2, \quad \Phi_1(t, \zeta) = y^{(1-\alpha)/2}\Lambda_1(t, y)$$

сводит линейные уравнения (44), (45) к следующей паре уравнений:

$$\Lambda_{1t} = y\Lambda_{1yy} + \left(\frac{3}{2} - \alpha\right)\Lambda_{1y} + \left(\frac{y^2 + ty - \varphi_t^2 + t\varphi^2 + \varphi^4 - (2\alpha - 1)\varphi}{2} + \frac{t^2}{8}\right)\Lambda_1, \quad (46)$$

$$\Lambda_{1t} = \frac{2y\Lambda_{1y} + (2\varphi_t\varphi + 2\varphi^3 + t\varphi + 1 - 2\alpha)\Lambda_1}{2y + 2\varphi_t + 2\varphi^2 + t}, \quad (47)$$

условием совместности которых также является выполнение для функции $\varphi(t)$ второго уравнения Пенлеве (1).

Аналогичным образом, исключая из систем (42), (43) компоненту Φ_1 и осуществляя замены

$$y = 2\zeta^2, \quad \Phi_2(t, \zeta) = y^{(1+\alpha)/2}\Lambda_1(t, y), \quad (48)$$

получим следующие уравнения:

$$\Lambda_{2t} = y\Lambda_{2yy} + \left(\frac{3}{2} + \alpha\right)\Lambda_{2y} + \left(\frac{y^2 + ty - \varphi_t^2 + t\varphi^2 + \varphi^4 - (2\alpha + 1)\varphi}{2} + \frac{t^2}{8}\right)\Lambda_2, \quad (49)$$

$$\Lambda_{2t} = \frac{2y\Lambda_{2y} + (2\varphi_t\varphi - 2\varphi^3 - t\varphi + 1 + 2\alpha)\Lambda_2}{2y - 2\varphi_t + 2\varphi^2 + t}, \quad (50)$$

которые также определяют L - A -пару для ОДУ (1).

С помощью преобразований (см. правые части соотношений (38) и (39))

$$\begin{aligned}\Upsilon_1(t, y) &= \exp\left(\int_t^{t^*} H_2(\tau, \lambda_2(\tau), \mu_2(\tau)) d\tau\right)\Lambda_1, \\ \Upsilon_2(t, y) &= \exp\left(\int_t^{t^*} H_1(\tau, \lambda_1(\tau), \mu_1(\tau)) d\tau\right)\Lambda_2\end{aligned}\quad (51)$$

совместные решения L - A -пар (46), (47) и (49), (50) задают решения уравнений (29) и (30) соответственно.

Решения $\Upsilon_1(t, x)$, $\Upsilon_2(t, x)$ удовлетворяют также линейным уравнениям в частных производных первого порядка, получающимся в результате преобразований (51) из уравнений (47) и (50). При переходе от функций $\varphi(t)$, $\varphi_t(t)$ по формулам (34) и (37) к компонентам $\lambda_j(t)$, $\mu_j(t)$, $j = 1, 2$, гамильтоновых систем (32) с гамильтонианами (36) и (33) эти уравнения принимают следующий компактный вид:

$$\Upsilon_{1t} - H_2(t, \lambda_2(t), \mu_2(t))\Upsilon_1 = \frac{y\Upsilon_{1y} - \lambda_2(t)\mu_2(t)\Upsilon_1 + (1/2 - \alpha)\Upsilon_1}{y - \lambda_2(t)}, \quad (52)$$

$$\Upsilon_{2t} - H_1(t, \lambda_1(t), \mu_1(t))\Upsilon_2 = \frac{y\Upsilon_{2y} - \lambda_1(t)\mu_1(t)\Upsilon_2 + (1/2 + \alpha)\Upsilon_2}{y - \lambda_1(t)}. \quad (53)$$

Сделаем следующие замены:

$$\Upsilon_1(t, y) = y^{\alpha-1/2}\Gamma_1(t, y), \quad \Upsilon_2(t, y) = y^{-\alpha-1/2}\Gamma_2(t, y). \quad (54)$$

Первая замена приводит уравнение (52) к уравнению

$$\Gamma_{1t} - H_2(t, \lambda_2(t), \mu_2(t))\Gamma_1 = \frac{y\Gamma_{1y} - \lambda_2(t)\mu_2(t)\Gamma_1}{y - \lambda_2(t)}, \quad (55)$$

а вторая замена – уравнение (53) к уравнению

$$\Gamma_{2t} - H_1(t, \lambda_1(t), \mu_1(t))\Gamma_2 = \frac{y\Gamma_{2y} - \lambda_1(t)\mu_1(t)\Gamma_2}{y - \lambda_1(t)}. \quad (56)$$

При этом “квантование” (29) после первой из замен (54) принимает вид

$$\Gamma_{1t} = \left(y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} y \right) \frac{\Gamma_1}{2} + \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial \Gamma_1}{\partial y} + \frac{y^2 + ty}{2} \Gamma_1. \quad (57)$$

Вторая из замен (54) сводит “квантование” (30) к эволюционному уравнению

$$\Gamma_{2t} = \left(y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} y \right) \frac{\Gamma_2}{2} - \left(\frac{1}{2} + \alpha \right) \frac{\partial \Gamma_2}{\partial y} + \frac{y^2 + ty}{2} \Gamma_1. \quad (58)$$

Уравнение (57) представляет собой одно из “квантований” (13) ОДУ (35), соответствующее гамильтониану (36), а уравнение (58) – одно из “квантований” ОДУ (31), соответствующее гамильтониану (33).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пары уравнений (55), (57) и (56), (58) есть L - A -пары для ОДУ (35) и (31) соответственно. Оба этих нелинейных ОДУ эквивалентны второму уравнению Пенлеве. Однако отметим следующее обстоятельство: формальный переход в уравнениях (55), (56) от “квантовой” координаты x к классической координате $\lambda_2(t)$ (соответственно $\lambda_1(t)$) совместим лишь с одновременным переходом от Γ_{1x} к $\mu_2(t)\Gamma_1$ (соответственно от Γ_{2x} к $\mu_1(t)\Gamma_2$), т.е. с одновременным переходом от “квантового” импульса к классическому. Аналогичным свойством обладает второе из уравнений L - A -пары (17), (18), соответствующей гамильтониану (15). И, таким

образом, согласно результатам данной статьи пару Фляшки–Ньюэлла естественней рассматривать не как пару для второго уравнения Пенлеве, а скорее именно как пару для уравнения Пенлеве типа тридцать четыре. Это соответствует выводам статьи [16], в которой уравнения Пенлеве рассматриваются с точки зрения их положения в дополненной диаграмме Гарнье–Окамото (в неполном варианте она была описана в [17]).

Замены (24) переводят уравнение (18) в уравнения

$$\Psi_t^\pm - H_\pm(t, p, q)\Psi^\pm = \frac{\Psi_x^\pm - (\varphi_t \mp \varphi^2 \mp t/2)\Psi^\pm}{2(x - \varphi)}, \quad (59)$$

где функции $H_\pm(t, p, q)$ есть правые части соотношений (38), (39) (эти уравнения также обладают свойствами, аналогичными описанным в замечании 3). Дифференцируя уравнения (59) по переменной x , получим, что их совместные с “квантованиями” (22), (23) решения $\Psi^\pm(t, x)$ удовлетворяют также соотношениям

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \varphi_t \pm \varphi^2 \pm \frac{t}{2}\right)(\Psi_t^\pm - H_\pm(t, p, q)\Psi^\pm) = \mp(x + \varphi)\Psi_x^\pm - \left(\alpha \pm \frac{1}{2}\right)\Psi^\pm. \quad (60)$$

Обрами соотношений (60) относительно преобразований (27) и (28) как раз являются соотношения (52) и (53). И, таким образом, с точностью до преобразований (27), (28) L - A -пара второго уравнения Пенлеве (1), найденная в классической работе [4], сведена к паре из [10].

Преобразование $K[S(x)](y)$, обладающее свойствами (25), (26), определено пока лишь формально. Вопрос о его реальном определении в классе обычных дифференцируемых функций кажется непростым (для сравнения см., например, работы [18]–[22]). В следующем разделе будет показано, что для любой фиксированной прямой

$$y = ie^{-i\nu_*} \sigma, \quad \nu_* \in \mathbb{R}, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad -\infty < \sigma < \infty, \quad (61)$$

такое преобразование $K[S(x)](y)$ может быть неформально определено как преобразование Фурье линейных непрерывных функционалов на пространстве финитных бесконечно дифференцируемых функций.

4. О НЕФОРМАЛЬНОМ ХАРАКТЕРЕ СВЯЗИ L - A -ПАР

Если коэффициент M определяется формулой (14), то все решения линейного ОДУ (11) при конечных x могут иметь особенность лишь в точке $x = \varphi(t)$ – поведение общего решения этого ОДУ при $x \rightarrow \varphi(t)$ описывается формулой

$$V(t, x) = e_1(t)(x - \varphi(t))^{-1/2} + e_2(t)(x - \varphi(t))^{3/2}(1 + O(x - \varphi(t))).$$

Если функция $V(t, x)$ удовлетворяет не только уравнению (11), но и уравнению (12), то функции $e_1(t)$ и $e_2(t)$ аналитичны по переменной t в окрестностях всех значений этой переменной, отличных от дискретного множества точек, соответствующих полюсам конкретного решения $\varphi(t)$ второго уравнения Пенлеве. Поэтому решения (16)

для таких значений t аналитичны в каждой точке x как по переменной x , так и по переменной t . На любой прямой

$$x = e^{i\nu_* r}, \quad \nu_* \in \mathbb{R}, \quad r \in \mathbb{R}, \quad -\infty < r < \infty, \quad (62)$$

в комплексной плоскости переменного x решения (16) можно рассматривать ([23], гл. 1, § 4) как принадлежащие пространству $\mathcal{D}'(r)$ распределений $G(r)$ вещественной переменной r , действующих на пространстве $\mathcal{D}(r)$ пробных комплекснозначных бесконечно дифференцируемых финитных функций вещественной переменной r . Их действие $(\cdot, f(r))$ на пробные функции $f(r)$ корректно ([23], гл. 1, § 5) задается формулой

$$(\Psi(t, e^{i\nu_* r}), f(r)) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t, e^{i\nu_* r}) f(r) dr.$$

Пространство $\mathcal{D}(r)$ обратным преобразованием Фурье

$$F^{-1}[f(r)](\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(r) e^{-i\sigma r} dr$$

взаимно однозначно переводится ([23], гл. 8, § 28) в пространство $Z(\sigma)$ целых функций $\chi(\sigma)$ комплексной переменной $\sigma = \operatorname{Re} \sigma + i \operatorname{Im} \sigma$ таких, что существуют вещественные постоянные $C_{n,q}$ и a , для которых при всех σ и неотрицательных целых числах p, n

$$|\sigma|^q \left| \frac{d^n \chi(\sigma)}{d\sigma^n} \right| \leq C_{n,q} e^{a|\operatorname{Im} \sigma|}.$$

И наоборот, преобразование Фурье

$$F[\chi(\sigma)](r) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\sigma) e^{i\sigma r} d\sigma$$

любой функции $\chi(\sigma)$ из $Z(\sigma)$ является финитной бесконечно дифференцируемой функцией переменной r .

Пусть $Z'(\sigma)$ – пространство всех линейных непрерывных функционалов на $Z(\sigma)$. Следуя [23] (гл. 8, § 29), определим преобразование Фурье $F[G(r)](\sigma)$ распределений $G(r) \in \mathcal{D}'(r)$:

$$(F[G(r)](\sigma), \chi(\sigma)) = (G(r), F[\chi(\sigma)](r)). \quad (63)$$

Назовем функционалы из $Z(\sigma)$, как и в [23], обобщенными функциями.

Для определенного таким образом преобразования Фурье распределений сохраняются формулы дифференцирования для обычных преобразований Фурье:

$$\frac{dF[G(r)](\sigma)}{d\sigma} = F[irG(r)](\sigma), \quad F\left[\frac{dG(r)}{dr}\right](\sigma) = -i\sigma F[G(r)](\sigma).$$

Здесь имеются в виду обобщенные производные – взятые со знаком минус действия распределений и обобщенных функций на производные пробных функций.

На прямых (61) и (62) $xy = i\sigma r$. Таким образом, для этих прямых преобразования Фурье (63) распределений действительно определяют оператор $K[S(x)](y)$,

который обладает свойствами (25), (26). Поэтому из известных свойств распределений и обобщенных функций [23], [24] (гл. II), следует, что при таком определении оператора $K[S(x)](y)$ образы преобразований (27) и (28) являются обобщенными совместными решениями уравнений (29), (52) и (30), (53), а следовательно, обобщенными совместными решениями соответствующих пар линейных ОДУ по переменным y и t . Дифференцирования распределений по параметру t здесь понимаются в обобщенном смысле [24] (гл. II, § 9.5), под производной по t обобщенной функции понимается образ Фурье производной по t соответствующего распределения. Повторяя рассуждения, изложенные, например, в [24] (гл. I, § 5.1, § 5.2), или в [25] (гл. I, § 2.6), приходим к выводу, что обобщенные функции (27), (28) являются и обычными, дифференцируемыми решениями данных пар линейных ОДУ¹⁾.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По-видимому, связь между L – A -парами уравнений Пенлеве и их “квантованиями” долго оставалась незамеченной по той причине, что статьи [4] и [6] появились намного раньше, чем было получено и стало использоваться квантовое уравнение Шредингера. А в 20-е годы прошлого века уравнения Пенлеве уже не были в центре внимания исследователей. Положение дел изменилось вместе с возрождением интереса к уравнениям Пенлеве. Правда, кроме [5] и [26] до сих пор во всех публикациях речь шла лишь о связях со “стационарными квантованиями” уравнений Пенлеве, в которые переменная t входит лишь в качестве параметра.

Так, Окамото в замечании 5.4 работы [14] отмечает, что в случае второго уравнения Пенлеве соответствующее “стационарное квантование”

$$H\left(t_n, x, \frac{d}{dx}\right)Y = \text{const} \cdot Y \quad (64)$$

определяет положение подвижных полюсов t_n этого нелинейного ОДУ. Схожая связь, заметим, имеет место и для полюсов решений остальных уравнения Пенлеве. В частности, если в гамильтониане (5) заменить t на постоянную t_n , то возникает гамильтониан ангармонического осциллятора (любопытно, что как раз при попытках его квантования в статье Гейзенберга [27] “собственно и началось создание последовательной квантовой механики” [28], диалог 9), который определяет линейное ОДУ (64), описывающее распределение подвижных полюсов t_n решений первого уравнения Пенлеве (2).

А в серии публикаций [29]–[33] “стационарные квантования” были использованы, в частности, и для классификации ОДУ второго порядка, интегрируемых методом изомонодромных деформаций. Но эта классификация не лишена недостатков, как не лишены их и использовавшиеся ранее альтернативные подходы к определению интегрируемых ОДУ типа Пенлеве ([30], замечание 3).

¹⁾В [24] и [25] речь, правда, идет о распределениях, а не о функционалах из $Z'(\sigma)$, но принципиальных трудностей в обосновании утверждения о классической дифференцируемости обобщенных решений линейных ОДУ с дифференцируемыми коэффициентами из-за этой разницы не возникает.

Автор полагает, что классификация уравнений типа Пенлеве, которая была бы примерно так же естественна, как уже имеющиеся [34]–[40] классификации различных классов нелинейных интегрируемых уравнений, должна основываться на их нестационарных “квантованиях” вида (13). Результаты настоящей работы подтверждают неслучайный характер этих линейных уравнений. Данная классификация должна заодно перечислить и все эволюционные уравнения (13), допускающие решения, аналогичные решениям “квантования” ОДУ Пенлеве, описанным в [5] и в настоящей работе.

Предварительные соображения для вывода дополнительных постулатов, необходимых при проведении такой классификации, у автора имеются.

Благодарности. Работа была поддержана РФФИ (грант № 06-01-00124), Программой поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-2215.2008.1) и грантами № 06-01-92052 КЭ, DFG project GZ: TA 289/4-1.

Список литературы

- [1] Н. Flaschka, *J. Math. Phys.*, **21**:5 (1981), 1016–1018.
- [2] С. П. Новиков, *Функц. анализ и его прил.*, **24**:4 (1990), 43–53.
- [3] I. M. Krichever, *On Heisenberg relations for the ordinary linear differential operators*, Preprint IHES, Bur-Sur-Yvette, 1990.
- [4] R. Garnier, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **29** (1912), 1–126.
- [5] Б. И. Сулейманов, “Гамильтонова структура уравнений Пенлеве и метод изомонодромных деформаций”, *Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений*, Ин-т математики, Уфа, 1988, 93; *Дифференц. уравнения*, **30**:5 (1994), 791–796.
- [6] R. Fuchs, *Math. Ann.*, **63**:3 (1907), 301–321.
- [7] А. И. Овсеевич, *Докл. РАН*, **414**:6 (2007), 732–735.
- [8] А. А. Караев, E. Hubert, *J. Phys. A*, **32** (1999), 8145–8156.
- [9] А. А. Караев, “Lax pairs for Painlevé equations”, *Isomonodromic Deformations and Applications in Physics* (Montréal, Canada, May 1–6, 2000), CRM Proc. Lecture Notes, **31**, AMS, Providence, RI, 2002, 37–48.
- [10] Н. Flaschka, A. Newell, *Comm. Math. Phys.*, **76**:1 (1980), 65–116.
- [11] Ф. Р. Гантмахер, *Лекции по аналитической механике*, Наука, М., 1966.
- [12] А. Мессиа, *Квантовая механика*, т. 1, Наука, М., 1978.
- [13] K. Okamoto, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **56**:6 (1980), 264–268.
- [14] K. Okamoto, “The Hamiltonian associated to the Painlevé equations”, *The Painleve Property. One Century Later*, CRM Ser. Math. Phys., Springer, New York, 1999, 735–787.
- [15] А. Р. Итс, А. А. Капаев, В. Ю. Новокшенов, А. С. Фокас, *Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана*, РХД, Москва–Ижевск, 2005.
- [16] Y. Ohyama, S. Okumura, *J. Phys. A*, **39**:39 (2006), 12129–12151.
- [17] K. Okamoto, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **33**:3 (1986), 575–618.
- [18] J. Harnad, *Comm. Math. Phys.*, **166**:2 (1994), 337–365.
- [19] J. Harnad, A. R. Its, *Comm. Math. Phys.*, **226**:3 (2002), 497–530.
- [20] B. Dubrovin, “Painlevé transcendents in two dimensional topological field theory”, *The Painleve Property. One Century Later*, CRM Ser. Math. Phys., Springer, New York, 1999, 287–412.
- [21] M. Mazzocco, “Painlevé sixth equation as isomonodromic deformations equation of an irregular system”, *The Kowalevski Property* (Leeds, 2000), CRM Proc. Lecture Notes, **32**, AMS, Providence, RI, 2002, 219–238.

- [22] N. Joshi, A. V. Kitaev, P. A. Treharne, *J. Math. Phys.*, **48**:10 (2007), 103512; [arXiv: 0706.1750](#).
- [23] Г. Бремерман, *Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье*, Мир, М., 1968.
- [24] Г. Е. Шилов, *Математический анализ. Второй специальный курс*, Наука, М., 1965.
- [25] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Вып. 1, Физматлит, М., 1959.
- [26] С. П. Баландин, Б. И. Сулейманов, *Дифференц. уравнения*, **30**:12 (1994), 2175–2176.
- [27] W. Heisenberg, *Z. Phys.*, **33**:1 (1925), 879–893.
- [28] И. Ю. Кобзарев, Ю. И. Манин, *Элементарные частицы: диалоги физика и математика*, Фазис, М., 1997.
- [29] S. Yu. Slavyanov, *J. Phys. A*, **29**:22 (1996), 7329–7335.
- [30] С. Ю. Славянов, *ТМФ*, **119**:1 (1999), 3–19.
- [31] С. Ю. Славянов, *ТМФ*, **123**:3 (2000), 395–406.
- [32] С. Ю. Славянов, В. Лай, *Специальные функции. Единая теория, основанная на анализе особенностей*, Невский диалект, С.-Пб., 2002.
- [33] С. Ю. Славянов, Ф. Р. Вуялкович, *ТМФ*, **150**:1 (2007), 143–151.
- [34] А. В. Жибер, А. Б. Шабат, *Докл. АН СССР*, **247**:5 (1979), 1103–1107.
- [35] С. И. Свинолулов, *УМН*, **40**:5(245) (1985), 263–264.
- [36] A. V. Mikhailov, A. B. Shabat, R. I. Yamilov, *Comm. Math. Phys.*, **115**:1 (1988), 1–19.
- [37] A. V. Mikhailov, A. B. Shabat, V. V. Sokolov, “The symmetry approach to classification of integrable equations”, *What is Integrability?*, Springer Ser. Nonlinear Dynam., Springer, Berlin, 1991, 115–184.
- [38] В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *ТМФ*, **125**:3 (2000), 355–424.
- [39] А. В. Жибер, В. В. Соколов, *УМН*, **56**:1 (2001), 63–106.
- [40] R. Yamilov, *J. Phys. A*, **39**:45 (2006), R541–R623.

Поступила в редакцию 23.05.2007,
после доработки 9.01.2008