Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Лебедев, Д. А. Лейтес, Детерминант Шаповалова для супералгебр петель, *ТМФ*, 2008, том 156, номер 3, 378–397

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6254>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 15:44:16

© 2008 г.

А. В. Лебедев*, Д. А. Лейтес†

ДЕТЕРМИНАНТ ШАПОВАЛОВА ДЛЯ СУПЕРАЛГЕБР ПЕТЕЛЬ

Показано, чему равны квадратичные элементы Казимира для супералгебр Каца–Мули, ассоциированных с супералгебрами петель со значениями в конечномерной супералгебре Ли $\mathfrak{g}$, если элемент Казимира для $\mathfrak{g}$ известен (если на $\mathfrak{g}$ есть инвариантная суперсимметричная четная билинейная форма). Основным инструментом является виковская нормальная форма четного квадратичного оператора Казимира для алгебры Каца–Мули, ассоциированной с $\mathfrak{g}$; эта форма представляет также самостоятельный интерес. При условии, что на $\mathfrak{g}$ есть инвариантная суперсимметричная нечетная билинейная форма, вычислены кубические элементы Казимира. Кроме простых супералгебр Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ с матрицей Картана A , для которых детерминант Шаповалова был известен, рассмотрена пуассонова супералгебра Ли $\text{poi}(0|n)$ и соответствующая ей алгебра Каца–Мули.

Ключевые слова: супералгебра Ли, детерминант Шаповалова.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Мотивировки: физика. Очень ясно и подробно резоны вычисления детерминанта Шаповалова и элементов Казимира (в несуперном случае) изложены в учебнике [1].

Заметим, что в разных приложениях простая алгебра Ли, которая инициировала изучение предмета, подчас не так интересна, как некоторые из ее “родственников” (ее нетривиальное центральное расширение, алгебра ее дифференцирований, и результат итераций этих конструкций). В дальнейшем, держа простые алгебры в центре внимания, мы будем следить также и за их родственниками.

1.1.1. Струнные алгебры. В основополагающей работе [2] Белавин, Поляков и А. Замолотчиков заметили, что бесконечное число образующих конформной группы в двумерном случае порождают тождества Уорда для корреляционных функций,

*Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig, Germany; Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Н. Новгород, Россия. E-mail: yorool@mail.ru

†Department of Mathematics, University of Stockholm, Stockholm, Sweden. E-mail: mleites@math.su.se

и эти дифференциальные уравнения (тождества Уорда) полностью определяют поведение корреляционных функций. Компоненты оператора энергии–импульса в конформной теории поля порождают вместе с центральным зарядом алгебру Вирасоро, и это сводит изучение конформной теории к изучению (неприводимых) представлений со старшим весом алгебры Вирасоро.

В работе [3] явно построен большой класс конформных теорий – так называемые минимальные модели. При их изучении исключительно важны полные описания (неприводимых) унитаризуемых представлений со старшим весом вещественных форм комплексных алгебр Вирасоро.

1.1.2. Алгебры токов. Бозонизация свободных фермионов со спином и группой G внутренних симметрий дают пример нетривиальной конформной теории, основанной на алгебре Каца–Муди¹⁾ $\widehat{\mathfrak{g}}^{(1)}$. Компоненты оператора энергии–импульса для этих теорий, построенные по квадратичным формам фермионных операторов токов для группы петель $G^{(1)}$, удовлетворяют соотношениям на элементы алгебры Вирасоро с центральным зарядом $C = \frac{\dim \mathfrak{g}}{k + c_{\mathfrak{g}}}$, где k – значение центрального заряда алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}^{(1)}$, а $c_{\mathfrak{g}}$ – значение (квадратичного) оператора Казимира для $\mathfrak{g}$ в присоединенном представлении [5]. Гамильтониан WZW -модели тоже можно построить с помощью квадратичных форм операторов тока, таким образом, он тоже представляет собой нетривиальную конформную теорию поля. Дифференциальные уравнения для многоточечных корреляционных функций примарных полей WZW -модели суть уравнения Книжника–Замолодчикова, введенные в [6].

Во всех этих случаях описание неприводимых представлений сделано с помощью детерминанта Шаповалова, определение и способы вычисления которого мы напомним ниже.

1.1.3. Суперверсии. Для (родственников) простых струнных супералгебр Ли детерминант Шаповалова был вычислен, но не во всех случаях (в недавней статье [7] утверждается, что рассмотрены все случаи, однако и в ней есть пропуски). В настоящей работе мы рассмотрим супералгебры Каца–Муди; случай струнных супералгебр будет рассмотрен в нашей следующей работе [8].

1.2. Способы вычислить детерминант Шаповалова: математика. Элементы Казимира. Из предыдущих рассуждений ясно, что элементы Казимира – элементы из центра универсальной обертывающей алгебры или ее пополнения – очень нужны. Во многих задачах достаточно знать лишь квадратичные элементы, зато в явном виде.

Детерминант Шаповалова представляет собой полезный инструмент для проверки неприводимости некоторых представлений с вакуумным вектором (со старшим или младшим весом) над алгебрами и супералгебрами Ли $\mathfrak{g}$, а именно в модулях

¹⁾Ее формальное определение (см. [4]) немного замысловато: $\widehat{\mathfrak{g}}^{(1)}$ есть некоторая подалгебра в алгебре Ли дифференцирований нетривиального центрального расширения $\widehat{\mathfrak{g}}^{(1)}$ алгебры петель $\mathfrak{g}^{(1)}$ – отображений окружности $S^1 \rightarrow \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ – простая конечномерная комплексная алгебра Ли (см. далее формулу (18)).

Верма, и даже при построении некоторых неприводимых модулей с вакуумным вектором.

Чтобы можно было определить детерминант Шаповалова, алгебра $\mathfrak{g}$ должна быть весьма “симметричной”, т.е.

у $\mathfrak{g}$ должна иметься подалгебра Картана (максимальная нильпотентная подалгебра, совпадающая со своим нормализатором) $\mathfrak{t}$, четная часть которой коммутативна и диагонализует $\mathfrak{g}$, причем нулевое весовое подпространство $\mathfrak{g}$ (относительно $\mathfrak{t}_0$) совпадает с $\mathfrak{t}$; у $\mathfrak{g}$ должен существовать инволютивный (или суперинволютивный, если мы следуем правилу знаков, см. (2)) антиавтоморфизм σ , который переставляет элементы противоположных относительно $\mathfrak{t}_0$ весов. (1)

Напомним, что *антиавтоморфизмом* супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется линейное отображение $\sigma: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, которое при любых $x, y \in \mathfrak{g}$ удовлетворяет соотношению

$$\sigma([x, y]) = \begin{cases} (-1)^{p(x)p(y)} [\sigma(y), \sigma(x)], & \text{если мы уважаем правило знаков,} \\ [\sigma(y), \sigma(x)], & \text{если мы не уважаем правило знаков.} \end{cases} \quad (2)$$

Эндоморфизм σ любого суперпространства называется *инволютивным*, если $\sigma^2 = \text{Id}$, (где Id – тождественный оператор) и *суперинволютивным*, если $\sigma^2(x) = (-1)^{p(x)}x$. Поскольку детерминант Шаповалова определен с точностью до скалярного множителя, а использование или игнорирование правила знаков влияет только на его знак, мы можем в каждом случае выбирать, как нам более удобно. При вычислениях детерминанта Шаповалова удобнее, как правило, игнорировать правило знаков.

Кроме того, необходимо наложить следующее условие конечности:

корневые подпространства в $\mathfrak{g}$ должны быть конечномерными; число разбиений любого веса пространства $U(\mathfrak{g}^+)$ (см. (9)) на положительные корни алгебры $\mathfrak{g}$ должно быть конечным. (3)

Для того чтобы определить детерминант Шаповалова, больше ничего, кроме условий (1) и (3), не нужно, но вот вычислить его много проще при наличии четного квадратичного элемента Казимира C_2 (из центра алгебры $U(\mathfrak{g})$ или ее пополнения²⁾ $\hat{U}(\mathfrak{g})$) или (что не совсем то же самое в случае $\dim \mathfrak{g} = \infty$, но для наших целей этого достаточно) в присутствии невырожденной **четной** инвариантной билинейной формы B на $\mathfrak{g}$. При наличии такого элемента C_2 детерминант Шаповалова есть произведение линейных членов. Примеры, для которых выделенное утверждение доказано, см. в [9]–[12].

1.3. Случай, когда четный квадратичный элемент Казимира существует. Кац и Каждан в работе [9] вычислили детерминант Шаповалова для любой алгебры Ли с симметризуемой матрицей Картана (с произвольными (комплексными)

²⁾Шляпка над U означает, что элементами алгебры $\hat{U}(\mathfrak{g})$ могут быть бесконечные суммы элементов из $U(\mathfrak{g})$.

элементами); их техника дословно переносится на случай супералгебры Ли с произвольной симметризуемой матрицей Картана (это показано в работе [10] и более детально разобрано в [11]). Более того, Кац и Каждан использовали детерминант Шаповалова, для того чтобы описать фильтрацию Янцена (о фильтрации Янцена см., например, в [13]) в модулях Верма над рассмотренными ими алгебрами Ли.

Технику Каца и Каждана можно применить и в случае, когда отсутствует симметризуемая матрица Картана, такая матрица лишь облегчает вычисление нужных значений оператора C_2 . Поэтому разумно оглядеться вокруг в поисках (супер)алгебр Ли без симметризуемой матрицы Картана, но с невырожденной четной инвариантной билинейной формой. Грозман и Лейтес рассмотрели все такие примеры простых супералгебр Ли среди $\mathbb{Z}$ -градуированных супералгебр полиномиального роста и их родственников³⁾: одну струнную супералгебру, алгебру $\mathfrak{t}^L(1|6)$ (в терминах физиков это $N = 6$ супералгебра Невё–Шварца), конечномерные супералгебры Пуассона $\mathfrak{poi}(0|2n)$ и супералгебры Каца–Муди, ассоциированные с $\mathfrak{poi}(0|2n)$. Точнее, в работе [10] приведены результаты вычисления элемента Казимира C_2 и описание неприводимых модулей Верма над $\mathfrak{t}^L(1|6)$ и $\mathfrak{poi}(0|2n)$.

В статье [13] продолжено исследование, начатое в [10], и приведено более явное выражение для детерминанта Шаповалова, чем то, что дано в [10]. Существенный и нетривиальный результат работы [13] – это явное описание фильтрации Янцена для модулей Верма над $\mathfrak{poi}(0|2n)$.

Имеется также значительное (возможно, необозримое) количество примеров фильтрованных (супер)алгебр Ли полиномиального роста (т.е. таких, что ассоциированные с ними градуированные (супер)алгебры растут полиномиально), у которых есть оператор C_2 (см., например, [14], [15]). Детерминант Шаповалова вычислен пока лишь для одной (самой простейшей) из таких (супер)алгебр, для $\mathfrak{gl}(\lambda)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, и лишь для самых простейших типов модулей Верма [12].

1.4. Случай, когда четного квадратичного элемента Казимира не существует.

1.4.1. Зато имеется нечетная невырожденная инвариантная билинейная форма. Таковы “странная” супералгебра Ли $\mathfrak{q}(n)$ – нетривиальный супераналог алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n)$, супералгебра Пуассона $\mathfrak{poi}(0|2n+1)$ и ассоциированные с ними супералгебры Каца–Муди. В 1990-х гг. Грозман и Лейтес предположили, что поскольку $\mathfrak{q}(n)$ (и даже $\mathfrak{poi}(0|2n+1)$) суть супераналоги алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n)$, для них тоже можно вычислить детерминант Шаповалова (который еще непросто определить в этом и других аналогичных случаях), но ошиблись при вычислении для $\mathfrak{q}(n)$ и сочли, что детерминант разлагается в произведение множителей, степени которых, казалось, ничем не ограничены. Горелик же ловко использовала специфически “суперное” понятие “антицентр” и опубликовала элегантное доказательство того, что детерминант Шаповалова для $\mathfrak{q}(n)$ разлагается в произведение линейных множителей [16].

³⁾По тем же причинам, по каким алгебры Каца–Муди “лучше”, чем простые алгебры петель, конечномерные супералгебры Пуассона $\mathfrak{poi}(0|n)$ “лучше”, чем их простые родственники $\mathfrak{h}'(0|n)$, где $\mathfrak{h}(0|n) = \mathfrak{poi}(0|n)/\text{center}$, а $\mathfrak{g}' := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Простые $\mathbb{Z}$ -градуированные супералгебры Ли полиномиального роста с нечетной невырожденной инвариантной билинейной формой суть следующие алгебры: ровно одна струнная супералгебра Ли (мы рассмотрим ее в [17]), кроме нее, супералгебры Ли $\mathfrak{q}(n)$, $\mathfrak{poi}(0|2n+1)$ и ассоциированные с ними супералгебры петель.

1.4.2. *Нет никакой невырожденной инвариантной билинейной формы.* Таковы большинство струнных (супер)алгебр Ли [8] и (супер)алгебры Ли вида $\mathfrak{q}(n)^{(2)}$ с не-симметризуемой матрицей Картана, недавно рассмотренные в [18].

1.5. Наши результаты и открытые вопросы. Таким образом, осталось рассмотреть не рассмотренные до сих пор (супер)алгебры Ли со свойствами (1) и (3). (Супер)алгебры Каца–Мууди со значениями в “симметричных” (супер)алгебрах Ли являются примерами таких (супер)алгебр, поэтому в настоящей работе мы явно опишем виковскую нормальную форму оператора Казимира для (супер)алгебр Каца–Мууди $\widehat{\mathfrak{g}}^{(1)}$ (и для “скрученных” алгебр Каца–Мууди $\widehat{\mathfrak{g}}^{(r)}$) в терминах оператора Казимира конечномерной простой (супер)алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Отсюда вытекает также описание детерминанта Шаповалова для $\widehat{\mathfrak{g}}^{(1)}$, которое раньше было известно лишь для (супер)алгебр Каца–Мууди с матрицей Картана. В частности, мы предложим гипотезу о виде детерминанта Шаповалова для супералгебры Каца–Мууди, связанной с $\mathfrak{poi}(0|2n)$ при $n > 2$.

Мы покажем, что если на $\mathfrak{g}$ есть **нечетная** инвариантная невырожденная симметричная билинейная форма, то $U(\mathfrak{g})$ (или $\widehat{U(\mathfrak{g})}$) содержит **кубический** центральный элемент (если $\dim \mathfrak{g} < \infty$, то из этого, как правило, следует, что детерминант Шаповалова разлагается в произведение множителей степени не выше 2). Мы также предложим гипотезы о виде детерминанта Шаповалова для $\mathfrak{poi}(0|2n+1)$.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ: СУПЕРАЛГЕБРЫ ЛИ

Подробности см. в [19]. Всюду дальше основное поле – это поле $\mathbb{C}$.

2.1. Супералгебра Пуассона. Пусть $G(m)$ – супералгебра Грассмана, порожденная элементами $\theta_1, \dots, \theta_m$. У супералгебры Ли Пуассона $\mathfrak{poi}(0|m)$ (не путайте с понятием (супер)алгебры Пуассона–Ли) такое же суперпространство, как и у $G(m)$, а умножение (скобка Пуассона) задано формулой

$$\{f, g\}_{\text{P.B.}} = (-1)^{p(f)} \sum_{j \leq m} \frac{\partial f}{\partial \theta_j} \frac{\partial g}{\partial \theta_j} \quad \text{для любых } f, g \in \mathbb{C}[\theta]. \quad (4)$$

Часто бывает удобно переобозначить образующие θ , положив (такое преобразование возможно над $\mathbb{C}$, но невозможно над $\mathbb{R}$, поэтому скобки (4) и (6) не эквивалентны над $\mathbb{R}$)

$$\xi_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_j - \sqrt{-1}\theta_{r+j}), \quad \eta_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_j + \sqrt{-1}\theta_{r+j}) \quad \text{при } j \leq r = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor, \quad (5)$$

$$\theta = \theta_{2r+1}, \quad \text{если } m = 2r + 1,$$

и соответствующим образом преобразовать скобку (если $m = 2r$, то члена с θ нет):

$$\{f, g\}_{\text{Р.Б.}} = (-1)^{p(f)} \left(\sum_{j \leq r} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial g}{\partial \eta_j} + \frac{\partial f}{\partial \eta_j} \frac{\partial g}{\partial \xi_j} \right) + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right). \quad (6)$$

Фактор супералгебры Ли $\mathfrak{poi}(0|n)$ по центру – это супералгебра Ли $\mathfrak{h}(0|n)$ гамильтоновых векторных полей, порождаемых функциями следующим образом:

$$H_f := (-1)^{p(f)} \left(\sum_{j \leq r} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial \eta_j} + \frac{\partial f}{\partial \eta_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (7)$$

2.2. Интеграл. До сих пор используемое обозначение $d^n \theta := d\theta_1 \dots d\theta_n$ для элемента объема в интеграле Березина совершенно неправильно (что было понятно уже в 1966 г. из явного вида березиниана матрицы Якоби замены координат). Кроме того, форма объема в суперслучае не является дифференциальной, а представляет собой частный случай интегральной формы. Осмысленное обозначение (с обязательным указанием координат) – $\text{vol}(\theta)$; мотивировки в общем случае изложены в [19].

На $\mathfrak{poi}(0|n)$, точнее, на суперпространстве производящих функций, интеграл (равный коэффициенту при старшем члене в разложении в ряд Тейлора по θ) задает невырожденную инвариантную билинейную форму той же четности, что и n :

$$(f|g) := \int fg \text{vol}(\theta).$$

2.3. Подалгебры Картана, максимальные торы, корни и коренни. В работах [20], [21] показано, что подалгебры Картана в любой конечномерной простой и некоторых непростых (таких, например, как $\mathfrak{poi}$, $\mathfrak{q}$ и их факторы по центру) конечномерных супералгебрах Ли сопряжены с помощью группы внутренних автоморфизмов. Мы всегда фиксируем подалгебру Картана $\mathfrak{t}$ (например, для $\mathfrak{poi}(0|2n)$ мы берем $\mathfrak{t} = \mathbb{C}[\xi_1 \eta_1, \dots, \xi_n \eta_n]$). Для любого веса $\alpha \in \mathfrak{t}_0^*$ обозначим $\mathfrak{g}_\alpha$ множество элементов $x \in \mathfrak{g}$ таких, что $(\text{ad}_h - \alpha(h))^N(x) = 0$ для достаточно большого $N \in \mathbb{N}$ и любого $h \in \mathfrak{t}_0$.

Тогда можно показать, что

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{t}_0^*} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \text{причем} \quad \mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}_0. \quad (8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Далее мы рассматриваем только алгебры, для которых $\mathfrak{t} = \mathfrak{g}_0$.

Пусть R – множество ненулевых функционалов $\alpha \in \mathfrak{t}_0^*$, для которых $\dim \mathfrak{g}_\alpha \neq 0$; это множество называется системой *корней* (супер)алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Для (супер)алгебр Ли, которые мы рассмотрим, существует элемент $H \in \mathfrak{t}_0$ такой, что $\alpha(H) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ для любых $\alpha \in R$. Благодаря этому свойству корней мы можем разделить их на положительные и отрицательные, положив

$$R^+ := \{\alpha \in R \mid \alpha(H) > 0\}, \quad R^- := \{\alpha \in R \mid \alpha(H) < 0\}; \quad \mathfrak{g}^\pm = \bigoplus_{\alpha \in R^\pm} \mathfrak{g}_\alpha. \quad (9)$$

Если алгебра $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0$ и $\mathfrak{t}$ коммутативна, мы можем отождествить $U(\mathfrak{t})$ с $S(\mathfrak{t})$. Пусть символ НС обозначает проекцию Хариш-Чандры, т.е. проекцию на прямое слагаемое $U(\mathfrak{t})$ в разложении

$$U(\mathfrak{g}) \simeq U(\mathfrak{t}) \oplus (\mathfrak{g}^- U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g}) \mathfrak{g}^+) \rightarrow U(\mathfrak{t}) \simeq S(\mathfrak{t}). \quad (10)$$

2.4. Детерминант Шаповалова.

СЛУЧАЙ 1. Алгебра $\mathfrak{t}$ чисто четна и коммутативна. Для фиксированного веса $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ положим $M^\lambda = U(\mathfrak{g})/I$, где I – левый идеал, порожденный пространством $\mathfrak{g}^+$ и элементами $h - \lambda(h)$, где $h \in \mathfrak{t}$. Модуль M^λ над $\mathfrak{g}$ называется *модулем Верма* со старшим весом λ . Очевидно, что как пространства $M^\lambda \simeq U(\mathfrak{g}^-)m^\lambda$, где m^λ – вакуумный вектор, причем действие $U(\mathfrak{g}^-)$ на m^λ точно (результат действия любого ненулевого элемента не равен нулю). Антиавтоморфизм (2) можно (единственным образом) продолжить до антиавтоморфизма алгебры $U(\mathfrak{g})$ с помощью соотношения

$$\sigma(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = \begin{cases} (-1)^{\sum_{i < j} p(x_i)p(x_j)} \sigma(x_k) \otimes \cdots \otimes \sigma(x_1) & \text{с учетом правила знаков,} \\ \sigma(x_k) \otimes \cdots \otimes \sigma(x_1) & \text{без учета правила знаков.} \end{cases} \quad (11)$$

Зададим на $U(\mathfrak{g}^-)$ билинейную форму $(\cdot | \cdot)$ со значениями в $U(\mathfrak{t}) = S(\mathfrak{t})$, полагая

$$(X | Y) = \text{НС}(\sigma(X)Y) \quad \text{для всех } X, Y \in U(\mathfrak{g}^-). \quad (12)$$

Очевидно, что разные весовые подпространства пространства $U(\mathfrak{g}^-)$ ортогональны друг другу относительно этой билинейной формы. Каждый детерминант Sh_χ матрицы Грама ограничения билинейной формы $(\cdot | \cdot)$ на подпространство $U(\mathfrak{g}^-)(-\chi)$ элементов веса $-\chi$ будет называться *детерминантом Шаповалова*. Поскольку $S(\mathfrak{t})$ – коммутативная алгебра, эти детерминанты корректно определены (как многочлены от $\mathfrak{t}$); если мы не фиксируем базис в пространстве $U(\mathfrak{g}^-)(-\chi)$ (а в дальнейшем мы не будем его фиксировать), то они определены с точностью до скалярного множителя.

Зададим на M^λ следующую билинейную форму (со значениями в $\mathbb{C}$):

$$(Xm^\lambda | Ym^\lambda)_\lambda = (X | Y)(\lambda) \equiv \text{НС}(\sigma(X)Y)(\lambda) \quad \text{для любых } X, Y \in U(\mathfrak{g}^-). \quad (13)$$

Это определение естественно в том смысле, что если $Xm^\lambda = X'm^\lambda$ и $Ym^\lambda = Y'm^\lambda$, то

$$\text{НС}(\sigma(X)Y)(\lambda) = \text{НС}(\sigma(X')Y')(\lambda)$$

для любых X, X', Y, Y' из $U(\mathfrak{g})$ (а не только из $U(\mathfrak{g}^-)$). Очевидно, что

1) элементы разных весов модуля M^λ ортогональны друг другу относительно билинейной формы $(\cdot | \cdot)_\lambda$;

2) ограничение билинейной формы $(\cdot | \cdot)_\lambda$ на подпространство $M^\lambda(\lambda - \chi)$ элементов веса $\lambda - \chi$ вырожденно тогда и только тогда, когда $\text{Sh}_\chi(\lambda) = 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. 1. *Всякий нетривиальный подмодуль модуля M^λ содержит элемент v такой, что вес v не равен λ и $\mathfrak{g}^+v = 0$ (такой элемент v называется особым вектором модуля M^λ).*

2. *Если v – особый вектор модуля M^λ , то $U(\mathfrak{g}^-)v$ – нетривиальный подмодуль модуля M^λ .*

3. *Элемент $x \in M^\lambda$ является изотропным элементом билинейной формы $(\cdot | \cdot)_\lambda$ тогда и только тогда, когда x может быть представлен в виде Av , где $A \in U(\mathfrak{g}^-)$, а v – особый вектор модуля M^λ .*

4. *Если v – особый вектор веса μ модуля M^λ , а C – центральный элемент алгебры $U(\mathfrak{g})$, то $\text{HC}(C)(\lambda) = \text{HC}(C)(\mu)$.*

В силу этого утверждения описание всех неприводимых модулей Верма эквивалентно вычислению всех детерминантов Шаповалова. Кроме того, видно, что элементы Казимира помогают вычислить детерминанты Шаповалова.

СЛУЧАЙ 2. Алгебра $t_1 \neq 0$ (но t_0 по-прежнему коммутативна). Более подробно этот случай рассмотрен в п. 5.1. Среди конечномерных простых супералгебр Ли таким свойством обладают лишь $\mathfrak{psq}(n)$ и $\mathfrak{h}'(0|2n+1)$. Горелик в работе [16] рассмотрела случай $\mathfrak{psq}(n)$ и ее родственников, а случай $\mathfrak{h}'(0|2n+1)$ можно теоретически получить из результатов Горелик сжатием, но нам нужна явная формула, а не разговоры. Ниже мы сформулируем гипотезу о виде детерминанта Шаповалова для $\mathfrak{poi}(0|2n+1)$; мы предполагаем, что ответ для $\mathfrak{h}'(0|2n+1)$ при $n > 1$ будет аналогичным.

3. ОПЕРАТОРЫ КАЗИМИРА НА СУПЕРАЛГЕБРАХ ЛИ – СЛУЧАЙ ЧЕТНОЙ ИНВАРИАНТНОЙ ФОРМЫ

В этом разделе $\mathfrak{g}$ – конечномерная супералгебра Ли, а $(\cdot | \cdot)$ – инвариантная четная суперсимметричная невырожденная билинейная форма на $\mathfrak{g}$. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^d$ – базис суперпространства $\mathfrak{g}$. Положим $a_{ij} = (e_i | e_j)$, пусть $(b_{ij}) = (a_{ij})^{-1}$ – обратная матрица.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Квадратичный элемент*

$$\Omega_0 = \sum_{i,j} b_{ij} e_i \otimes e_j \in U(\mathfrak{g}) \quad (14)$$

является центральным элементом в $U(\mathfrak{g})$ (элементом Казимира), т.е.

$$[x, \Omega_0] = 0 \quad \text{при любых } x \in \mathfrak{g}. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать равенство (15) для любых $x \in \{e_i\}_{i=1}^d$. Пусть c_{ij}^k – структурные константы в этом базисе. Пусть $p_i = p(e_i)$ – четности

элементов базиса. Имеем

$$\begin{aligned}
 [e_k, \Omega_0] &= \sum_{i,j} b_{ij} ([e_k, e_i] \otimes e_j + (-1)^{p_i p_k} e_i \otimes [e_k, e_j]) = \\
 &= \sum_{i,j} b_{ij} \sum_l (c_{ki}^l e_l \otimes e_j + (-1)^{p_i p_k} c_{kj}^l e_i \otimes e_l) = \\
 &= \sum_{i,j} \sum_l (b_{lj} c_{ki}^l + (-1)^{p_i p_k} b_{il} c_{kj}^l) e_i \otimes e_j.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Поэтому, чтобы доказать утверждение, достаточно показать, что

$$\sum_l (b_{lj} c_{ki}^l + (-1)^{p_i p_k} b_{il} c_{kj}^l) = 0 \quad \text{для всех } i, j, k \in \{1, 2, \dots, d\}. \tag{17}$$

Из инвариантности формы $(\cdot | \cdot)$ мы выводим, что

$$0 = ([e_p, e_k] | e_r) - (e_p | [e_k, e_r]) = \sum_s (c_{pk}^s a_{sr} - c_{kr}^s a_{ps}) \quad \text{для всех } k, p, r \in \{1, 2, \dots, d\}.$$

Умножим это равенство на $b_{ip} b_{rj}$ и просуммируем по p и r . Поскольку $(a_{ij})(b_{ij}) = 1_d$, мы получаем

$$0 = \sum_p c_{pk}^j b_{ip} - \sum_r c_{kr}^i b_{rj} = \sum_l (c_{lk}^j b_{il} - c_{kl}^i b_{lj}) = - \sum_l ((-1)^{p_k p_l} c_{kl}^j b_{il} + c_{kl}^i b_{lj}).$$

Форма $(\cdot | \cdot)$ четна, следовательно, матрица (b_{ij}) тоже четна, и первое слагаемое в последней сумме может быть отлично от нуля, лишь если $p_i = p_l$, поэтому последнее равенство эквивалентно условию (17). ■

По данной супералгебре петель $\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ построим супералгебру Каца–Мути, положив $\widehat{\mathfrak{g}}^{(1)} = \text{Span}(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}], u, z)$, где $u = t \frac{d}{dt}$ и z – четные элементы, а скобка задана следующими формулами:

$$\begin{aligned}
 [t^m x, t^n y] &= t^{m+n} [x, y] + m \delta_{m, -n} (x | y) z \quad \text{при любых } x, y \in \mathfrak{g}, \quad m, n \in \mathbb{Z}; \\
 [z, X] &= 0 \quad \text{при любых } X \in \widehat{\mathfrak{g}}^{(1)}; \\
 [u, t^n x] &= n t^n x \quad \text{при любых } x \in \mathfrak{g}, \quad n \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Положим

$$\Omega' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i,j} b_{ij} t^n e_i \otimes t^{-n} e_j \in \widehat{U}(\widehat{\mathfrak{g}}^{(1)}). \tag{19}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. Скобка $[X, 2u \otimes z + \Omega']$ равна нулю при любых $X \in \widehat{\mathfrak{g}}^{(1)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказываемое равенство легко проверить при $X = u, z$. Пусть теперь $X = t^m e_k$. Вычислим $[X, \Omega']$ с точностью до членов, содержащих z ,

получим

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i,j} b_{ij} (t^{m+n} [e_k, e_i] \otimes t^{-n} e_j + (-1)^{p_i p_k} t^n e_i \otimes t^{m-n} [e_k, e_j]) = \\
& = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i,j} b_{ij} (t^{m+n} [e_k, e_i] \otimes t^{-n} e_j + (-1)^{p_i p_k} t^{m+n} e_i \otimes t^{-n} [e_k, e_j]) = \\
& = \sum_{n=-\infty}^{\infty} "(t^{m+n} \otimes t^{-n}) \cdot [e_k, \Omega_0]" = 0,
\end{aligned} \tag{20}$$

где член в кавычках понимается так: представив $[e_k, \Omega_0]$ в виде суммы квадратичных элементов, умножим в каждом из них первый сомножитель на t^{m+n} , а второй – на t^{-n} .

Вычислим теперь члены с z в $[X, \Omega']$. Эти члены могут получиться лишь из слагаемых с $n = \pm m$, поэтому их сумма равна

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j} b_{ij} (m(e_k | e_i) z \otimes t^m e_j + (-1)^{p_k p_i} m t^m e_i \otimes (e_k | e_j) z) = \\
& = m \sum_{i,j} b_{ij} (a_{ki} z \otimes t^m e_j + (-1)^{p_k(p_i+p_j)} t^m e_i \otimes a_{kj} z).
\end{aligned} \tag{21}$$

Поскольку $b_{ij} \neq 0$ только при $p_i = p_j$, а $(a_{ij})(b_{ij}) = 1_d$, выражение (21) имеет вид

$$m \left(\sum_j \delta_{kj} z \otimes t^m e_j + \sum_i \delta_{ik} t^m e_i \otimes z \right) = m(z \otimes X + X \otimes z) = 2mX \otimes z.$$

В силу того, что $[X, 2u \otimes z] = -2mX \otimes z$, получаем $[X, 2u \otimes z + \Omega'] = 0$. ■

Представим квадратичный центральный элемент из $\widehat{U}(\widehat{\mathfrak{g}}^{(1)})$ в *виковской нормальной форме*, т.е. так, чтобы в каждом тензорном произведении первый сомножитель имел неположительную степень относительно u , а второй – неотрицательную. Виковскую нормальную форму оператора Ω обозначим символом $:\Omega:$. Положим

$$\Omega^{pm} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i,j} b_{ij} t^{-n} e_i \otimes t^n e_j.$$

Вычислим теперь $[X, \Omega_0 + 2\Omega^{pm} + 2u \otimes z]$. Это выражение, очевидно, равно нулю, если $X = u$ или $X = z$; так что положим $X = t^m x$. Вычисления, аналогичные предыдущим, показывают, что $[X, 2u \otimes z]$ сокращается с мономами из $[X, \Omega_0 + 2\Omega^{pm}]$, содержащими z , поэтому нам надо вычислить $[X, \Omega_0 + 2\Omega^{pm}]$ лишь с точностью до элементов, содержащих z . Если $X \in \mathfrak{g}$, то X коммутирует с Ω_0 (как это было показано ранее) и, аналогично, с каждым слагаемым в сумме по n в Ω^{pm} . Рассмотрим

случай $X = t^m x$, где $m > 0$. Из выражения для $[X, \Omega^{pm}]$ мы получим (см. (20))

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i,j} b_{ij} (t^{m-n} [e_k, e_i] \otimes t^n e_j + (-1)^{p_i p_k} t^{-n} e_i \otimes t^{m+n} [e_k, e_j]) = \\
 & = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i,j} b_{ij} t^{m-n} [e_k, e_i] \otimes t^n e_j + \sum_{n=m+1}^{\infty} \sum_{i,j} (-1)^{p_i p_k} t^{m-n} e_i \otimes t^n [e_k, e_j] = \\
 & = \sum_{n=1}^m \sum_{i,j} b_{ij} t^{m-n} [e_k, e_i] \otimes t^n e_j + \sum_{n=m+1}^{\infty} "(t^{m+n} \otimes t^{-n}) \cdot [e_k, \Omega_0]" = \\
 & = \sum_{n=1}^m \sum_{i,j} b_{ij} t^{m-n} [e_k, e_i] \otimes t^n e_j.
 \end{aligned}$$

Из $[X, \Omega_0 + \Omega^{pm}]$ мы получим

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i,j} b_{ij} (t^{m-n} [e_k, e_i] \otimes t^n e_j + (-1)^{p_i p_k} t^{-n} e_i \otimes t^{m+n} [e_k, e_j]) = \\
 & = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i,j} b_{ij} t^{m-n} [e_k, e_i] \otimes t^n e_j + \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{i,j} (-1)^{p_i p_k} t^{m-n} e_i \otimes t^n [e_k, e_j] = \\
 & = - \sum_{n=0}^{m-1} \sum_{i,j} b_{ij} (-1)^{p_i p_k} t^{m-n} e_i \otimes t^n [e_k, e_j] + \sum_{n=m}^{\infty} "(t^{m+n} \otimes t^{-n}) \cdot [e_k, \Omega_0]" = \\
 & = - \sum_{n=0}^{m-1} \sum_{i,j} b_{ij} (-1)^{p_i p_k} t^{m-n} e_i \otimes t^n [e_k, e_j].
 \end{aligned}$$

Заменой индексов суммирования $n \mapsto m - n$ и $i \leftrightarrow j$ последнее выражение преобразуется в

$$- \sum_{n=1}^m \sum_{i,j} b_{ji} (-1)^{p_j p_k} t^n e_j \otimes t^{m-n} [e_k, e_i] = - \sum_{n=1}^m \sum_{i,j} b_{ij} (-1)^{p_j (p_i + p_k)} t^n e_j \otimes t^{m-n} [e_k, e_i].$$

Поэтому при $m > 0$ имеем

$$\begin{aligned}
 & [t^m e_k, \Omega_0 + 2\Omega^{pm} + 2u \otimes z] = \\
 & = \sum_{n=1}^m \sum_{i,j} b_{ij} (t^{m-n} [e_k, e_i] \otimes t^n e_j - (-1)^{p_j (p_i + p_k)} t^n e_j \otimes t^{m-n} [e_k, e_i]) = \\
 & = \sum_{n=1}^m \sum_{i,j} t^m b_{ij} [[e_k, e_i], e_j] = m t^m \sum_{i,j} b_{ij} [[e_k, e_i], e_j].
 \end{aligned}$$

Аналогичное выражение получается с помощью тех же рассуждений при $m < 0$. Итак, мы получили следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. Если на $\mathfrak{g}$ отображение

$$A: x \mapsto \sum_{i,j} b_{ij} [[x, e_i], e_j] \tag{22}$$

равно λId , где $\lambda \in \mathbb{C}$, то

1) элемент

$$\Omega = \Omega_0 + 2\Omega^{pm} + 2u \otimes z + \lambda u$$

является центральным в $\widehat{U}(\widehat{\mathfrak{g}}^{(1)})$;

2) и Ω_0 , и Ω могут быть представлены в виковской нормальной форме;

3) линейные члены элементов Ω_0 : и Ω : отличаются на λu .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Пункт 2 утверждения 3.3 верен, потому что Ω_0 – конечная сумма, а элемент $2\Omega^{pm} + 2u \otimes z + \lambda u$ уже представлен в нормальной форме.

ГИПОТЕЗА. Если оператор A не является скаляром, то никакие ненулевые центральные квадратичные элементы из $\widehat{U}(\widehat{\mathfrak{g}}^{(1)})$ (если таковые имеются) не могут быть представлены в виковской нормальной форме.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.4. Отображение A коммутирует с $\mathfrak{g}$ -действием.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (17) имеем

$$\begin{aligned} [e_k, Ax] &= \sum_{i,j} b_{ij} \left([[e_k, x], e_i], e_j \right] + (-1)^{p_k p(x)} [[x, [e_k, e_i]], e_j] + \\ &\quad + (-1)^{p_k(p(x)+p_i)} [[x, e_i], [e_k, e_j]] \Big) = \\ &= A[e_k, x] + (-1)^{p_k p(x)} \sum_{i,j} b_{ij} \left([[x, [e_k, e_i]], e_j] + (-1)^{p_k p_i} [[x, e_i], [e_k, e_j]] \right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} b_{ij} \left([[x, [e_k, e_i]], e_j] + (-1)^{p_k p_i} [[x, e_i], [e_k, e_j]] \right) &= \\ = \sum_{i,j,l} b_{ij} \left(c_{ki}^l [[x, e_l], e_j] + (-1)^{p_k p_i} c_{kj}^l [[x, e_i], e_l] \right) &= \\ = \sum_{i,j} \left(\sum_l (b_{lj} c_{kl}^i + (-1)^{p_k p_i} b_{il} c_{kl}^j) \right) [[x, e_i], e_j] &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда $[e_k, Ax] = A[e_k, x]$ для всех $k \in \{1, 2, \dots, d\}$ и $x \in \mathfrak{g}$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Из леммы Шура мы выводим, что если $\mathfrak{g}$ – простая (супер)алгебра Ли, то A – скалярный оператор. Например, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(m|n)$ и $(X|Y) = \text{tr } XY$, то $A = 2(m-n)$. Заметим, что если $\mathfrak{g}$ – прямая сумма простых (супер)алгебр Ли, то A – прямая сумма соответствующих скалярных операторов, следовательно, A может и не быть скаляром.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.5. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{poi}(0|2n)$. Если $n > 1$, то $A = 0$; если $n = 1$, то A не является скалярным оператором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $n = 1$, то непосредственные вычисления показывают, что действие A не равно нулю на однородных многочленах степени 1 и 2, в то время как $A\mathbf{1} = 0$ (так как $\mathbf{1} \in \mathfrak{poi}(0|2n)$ – центральный элемент).

Заметим, что если x, y – однородные полиномы такие, что $(x|y) \neq 0$, то $\deg x + \deg y = 2n$. Поэтому для любого однородного полинома X , если $AX \neq 0$, то $\deg AX = \deg X + 2n - 4$.

Если $n = 2$, то $A(\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4)$ может быть только нулевым элементом. В самом деле, этот элемент должен быть либо равен нулю, либо быть однородным полиномом степени 4, но единственный (с точностью до постоянного множителя) такой полином, $\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4$, не лежит в $\mathfrak{g}'$. Любой элемент базиса можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial \theta_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \theta_{i_k}} \theta_1\theta_2\theta_3\theta_4 = \{\theta_{i_1}, \{\dots, \{\theta_{i_k}, \theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\}\} \dots\}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4,$$

где $\{\cdot, \cdot\}$ – скобка Пуассона, $k = 0$ означает, что дифференцирования не производятся, а A коммутирует с $\text{poi}(0|2n)$ -действием. Отсюда мы заключаем, что $A = 0$.

Если $n \geq 3$, то $AX = 0$ для любого однородного полинома X степени не меньше 5. Скобками с полиномом степени 5 можно получить любой полином степени не больше 4, а A коммутирует с действием алгебры, таким образом, $A = 0$. ■

3.1. Скрученные (супер)алгебры Каца–Муди. Рассмотрим теперь случай, когда (супер)алгебру Ли $\mathfrak{g}$ как линейное пространство можно представить в виде $\tilde{\mathfrak{g}}_0 \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_1$ так, что

$$[\tilde{\mathfrak{g}}_0, \tilde{\mathfrak{g}}_0] + [\tilde{\mathfrak{g}}_1, \tilde{\mathfrak{g}}_1] \subset \tilde{\mathfrak{g}}_0, \quad [\tilde{\mathfrak{g}}_0, \tilde{\mathfrak{g}}_1] \subset \tilde{\mathfrak{g}}_1, \quad (\tilde{\mathfrak{g}}_0 | \tilde{\mathfrak{g}}_1) = 0.$$

Другими словами, тильдой мы обозначаем $\mathbb{Z}/2$ -градуировку на $\mathfrak{g}$ (априори не имеющую ничего общего с четностью), согласованную с (невыврожденной четной) инвариантной билинейной формой $(\cdot | \cdot)$.

В этом случае мы можем задать скрученную супералгебру Каца–Муди

$$\widehat{\mathfrak{g}}^{(2)} = \text{Span}(\tilde{\mathfrak{g}}_0 \otimes \mathbb{C}[t^2, t^{-2}], \tilde{\mathfrak{g}}_1 \otimes t\mathbb{C}[t^2, t^{-2}], u, z),$$

где $u = t \frac{d}{dt}$ и z – четные элементы, со скобкой (18). Список простых скрученных алгебр Каца–Муди см. в [22], а простых скрученных супералгебр Каца–Муди – в [23].

Пусть по-прежнему A – скалярный оператор λId . Пусть $\{e_i^0\}_{i=1}^{d_0}$ – базис в $\tilde{\mathfrak{g}}_0$, а $\{e_i^1\}_{i=1}^{d_1}$ – базис в $\tilde{\mathfrak{g}}_1$; положим $a_{ij}^0 = (e_i^0 | e_j^0)$, $a_{ij}^1 = (e_i^1 | e_j^1)$ и $(b_{ij}^0) = (a_{ij}^0)^{-1}$, $(b_{ij}^1) = (a_{ij}^1)^{-1}$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \Omega'_0 &= \sum_{i,j} b_{ij}^0 e_i^0 \otimes e_j^0 \in U(\tilde{\mathfrak{g}}_0), \\ \Omega^{pm} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i,j} b_{ij}^0 t^{-2n} e_i^0 \otimes t^{2n} e_j^0 + \sum_{i,j} b_{ij}^1 t^{-2n+1} e_i^1 \otimes t^{2n-1} e_j^1 \right) \in \widehat{U}(\widehat{\mathfrak{g}}^{(2)}), \\ \Omega &= \Omega'_0 + 2\Omega^{pm} + 2u \otimes z + \lambda u. \end{aligned} \quad (23)$$

Заметим, что $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ – подалгебра в $\mathfrak{g}$, и Ω'_0 можно вычислить для $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ так же, как мы ранее вычислили Ω_0 для $\mathfrak{g}$. Теперь, как и в предыдущем разделе, мы можем доказать следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.6. Элемент Ω (см. (23)) является центральным элементом в $\widehat{U}(\widehat{\mathfrak{g}}^{(2)})$; линейная часть его виковой нормальной формы $:\Omega$: равна сумме линейной части $:\Omega'_0$: и λu , т.е.

линейная часть элемента $:\Omega$: (не считая λu) зависит лишь от $\tilde{\mathfrak{g}}_0$. (24)

Аналогично, если алгебра $\mathfrak{g}$ имеет $\mathbb{Z}/r$ -градуировку $\mathfrak{g} = \bigoplus_{s=0}^{r-1} \tilde{\mathfrak{g}}_s$, то можно построить алгебру

$$\widehat{\mathfrak{g}}^{(r)} = \text{Span} \left(\bigoplus_{s=0}^{r-1} \tilde{\mathfrak{g}}_s \otimes t^s \mathbb{C}[t^r, t^{-r}], u, z \right)$$

со скобкой (18). Как и раньше, введем следующие обозначения: e_i^s – элементы базиса в $\tilde{\mathfrak{g}}_s$, $a_{ij}^s = (e_i^s | e_j^s)$, $(b_{ij}^s) = (a_{ij}^s)^{-1}$;

$$\begin{aligned} \Omega'_0 &= \sum_{i,j} b_{ij}^0 e_i^0 \otimes e_j^0 \in U(\tilde{\mathfrak{g}}_0); \\ \Omega^{pm} &= \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i,j} b_{ij}^s t^{-2n+s} e_i^s \otimes t^{2n-s} e_j^s \in \widehat{U}(\widehat{\mathfrak{g}}^{(r)}). \end{aligned}$$

Если по-прежнему A – скалярный оператор λId , то $\Omega = \Omega'_0 + 2\Omega^{pm} + 2u \otimes z + \lambda u$ – центральный элемент.

Однако в простых конечномерных алгебрах, в которых имеется такая градуировка с $r > 2$ (например, в $\mathfrak{sl}(2m+1 | 2n+1)$ с автоморфизмом “минус супертранспонирование”⁴⁾, и в $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(4 | 2; \sqrt[3]{1})$ и $\mathfrak{o}(8)$ с градуировкой, заданной автоморфизмом третьего порядка), эта градуировка не согласована с весовыми. Поэтому подалгебру Картана (супер)алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}^{(r)}$ нужно строить не исходя из подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ (супер)алгебры $\text{Ли } \mathfrak{g}$, а из подалгебры Картана (супер)алгебры $\text{Ли } \tilde{\mathfrak{g}}_0$, которая может не иметь с $\mathfrak{h}$ ничего общего. Например, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2m+1 | 2n+1)$, то $\tilde{\mathfrak{g}}_0 \simeq \mathfrak{o}(2m+1) \oplus \mathfrak{o}(2n+1)$ и $\mathfrak{h} \cap \tilde{\mathfrak{g}}_0 = \{0\}$.

Поэтому, хотя элементы Казимира алгебр $\mathfrak{g}$ и $\widehat{\mathfrak{g}}^{(r)}$ похожи, их детерминанты Шаповалова не имеют ничего общего!

4. ОПЕРАТОРЫ КАЗИМИРА НА СУПЕРАЛГЕБРАХ ЛИ – СЛУЧАЙ НЕЧЕТНОЙ ИНВАРИАНТНОЙ ФОРМЫ

В этом разделе $\mathfrak{g}$ – конечномерная супералгебра Ли, на которой есть инвариантная нечетная суперсимметричная (что в данном случае то же, что и просто симметричная) невырожденная билинейная форма $(\cdot | \cdot)$. Пусть, как прежде, $\{e_i\}_{i=1}^d$ – базис суперпространства $\mathfrak{g}$, и $a_{ij} = (e_i | e_j)$, а $(b_{ij}) = (a_{ij})^{-1}$ – обратная матрица.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. Кубический элемент

$$C_3 = \sum (-1)^{p_i} c_{ij}^k b_{im} b_{jl} e_k \otimes e_l \otimes e_m$$

является центральным в $U(\mathfrak{g})$.

⁴⁾Порядок этого автоморфизма, казалось бы, равен 4, но во всех размерностях, за исключением $(2m+1 | 2n+1)$, он равен 2 по модулю внутренних автоморфизмов (см. работу [24], где перечислены все внешние автоморфизмы простых конечномерных супералгебр Ли).

Это утверждение доказывается аналогично утверждению 3.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Хотя элемент C_3 и выглядит менее симметричным, чем элемент Ω из утверждения 3.1, можно показать, что коэффициент

$$F(k, l, m) = \sum (-1)^{p_l} c_{ij}^k b_{im} b_{jl}$$

при $e_k \otimes e_l \otimes e_m$ подчиняется правилу знаков, примененному к $e_k \otimes e_l \otimes e_m$, относительно перестановки индексов k, l и m , т.е.

$$F(k, l, m) = (-1)^{p_k p_l} F(l, k, m) = (-1)^{p_l p_m} F(k, m, l).$$

Поэтому, если $\mathfrak{g}$ не коммутативна, то степень элемента C_3 в $U(\mathfrak{g})$ в точности равна 3 (а не меньше).

По алгебре $\mathfrak{g}$ с нечетной инвариантной формой мы можем построить алгебру $\widehat{\mathfrak{g}}^{(1)} = \text{Span}(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}], u, z)$ с соотношениями (18), но с нечетным z .

ГИПОТЕЗА. Если $\mathfrak{g}$ – простая супералгебра Ли, то в $\widehat{U}(\widehat{\mathfrak{g}}^{(1)})$ есть центральный элемент третьей степени, который может быть записан в виковской нормальной форме.

5. СУПЕРАЛГЕБРЫ ТИПА КАЦА–МУДИ, ПОСТРОЕННЫЕ ПО СТРАННЫМ СУПЕРАЛГЕБРАМ ЛИ

5.1. Что делать, если в подалгебре Картана есть нечетные элементы.

В этом пункте мы рассмотрим детерминант Шаповалова для супералгебр Ли $\mathfrak{g}$, подалгебра Картана $\mathfrak{t}$ которых такова, что $0 < n_{\bar{1}} := \dim \mathfrak{t}_{\bar{1}} < \infty$, а $\mathfrak{t}_0$ коммутативна. Среди $\mathbb{Z}$ -градуированных простых супералгебр Ли полиномиального роста (и их родственников) такими свойствами обладают лишь супералгебры Рамона $R(N) = \mathfrak{t}^M(1|N)$ [8], родственники странной супералгебры $\mathfrak{q}(n)$, рассмотренные в работе [16], а также алгебры, для которых детерминант Шаповалова пока никто не считал: родственники супералгебр Ли $\text{poi}(0|2n+1)$ и супералгебры Каца–Муди, ассоциированные как с $\mathfrak{q}(n)$, так и с $\text{poi}(0|2n+1)$.

Форма Шаповалова $(\cdot|\cdot)$, определенная формулами (12), принимает значения в $U(\mathfrak{t})$. Если подалгебра $\mathfrak{t}$ чисто четна, то $U(\mathfrak{t}) = S(\mathfrak{t})$ – коммутативная алгебра, а детерминант формы $(\cdot|\cdot)$ корректно определен с точностью до скалярного множителя. Если $\mathfrak{t}_{\bar{1}} \neq 0$, то даже не ясно, как определить детерминант Шаповалова. Простейший способ подойти к задаче (если $\mathfrak{t}_0$ коммутативна) – это

рассматривать лишь модули Верма с одномерным вакуумным вектором,
на котором $\mathfrak{t}_{\bar{1}}$ действует тривиально. (25)

Однако, такое ограничение сильно сужает возможные значения веса вакуумного вектора: при этом $[\mathfrak{t}_{\bar{1}}, \mathfrak{t}_{\bar{1}}]$ тоже тривиально действует на вакуумном векторе. Если $[\mathfrak{t}_{\bar{1}}, \mathfrak{t}_{\bar{1}}] = \mathfrak{t}_0$, то единственным одномерным $\mathfrak{t}$ -модулем является, с точностью до четности, лишь тривиальный модуль.

В работе [16] сказано, что И. Бернштейн предложил определить детерминант Шаповалова в данной ситуации следующим образом. Заметим, прежде всего, что $U(\mathfrak{t})$ – алгебра Клиффорда над $S(\mathfrak{t}_0)$. Для одномерного $\mathfrak{t}_0$ -модуля $\mathbb{C}(\lambda)$ веса $\lambda \in \mathfrak{t}_0^*$ определим *вакуумный модуль*, положив его равным

$$U(\mathfrak{t}) \otimes_{U(\mathfrak{t}_0)} \mathbb{C}(\lambda). \quad (26)$$

Ясно, что $\text{sdim } U(\mathfrak{t}) \otimes_{U(\mathfrak{t}_0)} \mathbb{C}(\lambda) = 2^{n_1-1} | 2^{n_1-1}$.

По теореме Пуанкаре–Биркгофа–Витта алгебра $U(\mathfrak{t})$ является фильтрованной, а ассоциированная с ней градуированная алгебра есть $S(\mathfrak{t}_0) \otimes \wedge(\mathfrak{t}_1)$. Поэтому существует естественное отображение (композиция сжатия $\mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{poi}$ с интегралом Березина)

$$\int : U(\mathfrak{t}) \longrightarrow S(\mathfrak{t}_0) \otimes \bigwedge^{\max}(\mathfrak{t}_1) \cong S(\mathfrak{t}_0).$$

Это отображение определено с точностью до умножения на скаляр, но нам этого достаточно. Поэтому, если $\mathfrak{t}_1 \neq 0$, мы можем задать другую форму – *бернштейнову форму Шаповалова*, положив

$$B(\cdot | \cdot) = \int (\cdot | \cdot). \quad (27)$$

Эта форма принимает значение в коммутативной алгебре $S(\mathfrak{t}_0)$, поэтому ее детерминант корректно определен.

Рассмотрим отдельно случай $n_1 = 1$. В этом случае $U(\mathfrak{t})$ – коммутативная (не суперкоммутативная!) супералгебра. Поэтому если мы в качестве вакуума возьмем $U(\mathfrak{t}) \otimes_{U(\mathfrak{t}_0)} \mathbb{C}(\lambda)$, то для обычной формы Шаповалова мы сможем корректно определить детерминант с точностью до скалярного множителя. Однако этот детерминант равен (с точностью до некоторой степени ненулевого элемента из $\mathfrak{t}_1$) тому, который определен и вычислен в [16].

5.2. Нерешенная задача. Вид детерминанта Шаповалова зависит от системы положительных корней, поэтому знать, как переходить от одной системы к другой, исключительно важно. Для конечномерных алгебр Ли (и алгебр Каца–Мути) переход осуществляется с помощью элементов (аффинной) группы Вейля. Для супералгебр Ли такой переход делается в том числе с помощью “нечетных” отражений, впервые введенных Скорняковым и независимо Пенковым и Сергановой [21]. Описать системы положительных корней (или хотя бы алгоритм перехода от одной системы к другой и явный вид хоть одной системы) для $\mathfrak{g} = \mathfrak{poi}$ или $\mathfrak{h}'$ (возможно, правильнее брать супералгебру $\mathfrak{g} = \mathfrak{poi}$ или $\mathfrak{h}'$, к которой добавлен градуирующий оператор) – интересный открытый вопрос.

6. ЯВНЫЕ ФОРМУЛЫ

6.1. Супералгебры Ли с симметризуемой матрицей Картана. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A, I)$ – супералгебра Ли с симметризуемой и нормализованной матрицей Картана A и $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – соответствующая система простых корней (тогда I – последовательность четностей корней $\alpha_1, \dots, \alpha_n$). Симметризуемость A означает, что существует обратимая диагональная матрица $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ такая, что $B = DA$ – симметричная матрица.

Зададим на решетке корней $\Delta = \text{Span}_{\mathbb{Z}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ следующие объекты:

1) симметричную билинейную форму $(\cdot, \cdot)$ с помощью условий

$$(\alpha_i, \alpha_j) = B_{ij} \quad \text{для всех } i, j = 1, \dots, n;$$

2) линейную функцию⁵⁾ F с помощью условий

$$F(\alpha_i) = \frac{1}{2}B_{ii} \quad \text{для всех } i = 1, \dots, n;$$

3) элемент

$$h_\gamma = \sum k_i d_i h_i \quad \text{для всякого } \gamma = \sum k_i \alpha_i \in \Delta$$

(заметим, что в общем случае $h_{\alpha_i} \neq h_i$).

Пусть $R \subset \Delta$ – система корней, а R^+ – система положительных корней. Поскольку каждое корневое пространство является либо чисто четным, либо чисто нечетным, у каждого корня можно задать четность. Пусть

$$\overline{R}_0^+ = \{\alpha \in R^+ \mid p(\alpha) = \bar{0}, \alpha/2 \notin R\}; \quad \overline{R}_1^+ = \{\alpha \in R^+ \mid p(\alpha) = \bar{1}, 2\alpha \notin R\}.$$

Определим *функцию разбиения* (которую, пока Костант активно работал, называли иногда *функцией Костанта* и обозначали буквой K в его честь) на множестве весов модуля $U(\mathfrak{g}^-)$, положив

$$K(\mu) = \dim U(\mathfrak{g}^-)(\mu).$$

ТЕОРЕМА 6.1 [25], [11]. Для $\mathfrak{g}(A, I)$ -модуля M^χ имеем

$$\begin{aligned} \text{Sh}_\chi &= \prod_{\alpha \in \overline{R}_0^+} \prod_{m \in \mathbb{N}} \left(h_\alpha + F(\alpha) - \frac{m}{2}(\alpha, \alpha) \right)^{K(\chi - m\alpha)} \times \\ &\times \prod_{\alpha \in \overline{R}_1^+} \prod_{m=2k+1 \in \mathbb{N}} \left(h_\alpha + F(\alpha) - \frac{m}{2}(\alpha, \alpha) \right)^{K(\chi - m\alpha)}. \end{aligned} \quad (28)$$

⁵⁾По сути, F является аналогом при $\dim \mathfrak{g} = \infty$ функции $(\rho, \cdot)$, где (суммы берутся с учетом кратностей)

$$\rho := \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha \in R_0^+} \alpha - \sum_{\alpha \in R_1^+} \alpha \right),$$

R_0^+ (соответственно R_1^+) – подмножества в R^+ , состоящие из четных (нечетных) корней; это означает, что соответствующие им корневые векторы четны (нечетны).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Не нужно использовать эту формулу для χ , не являющихся весами $U(\mathfrak{g}^+)$ (например, для $\chi = k\alpha$, где α – нечетный простой корень такой, что 2α – не корень, а $k > 1$): в этих случаях она может дать неправильный (не скалярный) результат.

6.2. Алгебра $\mathfrak{po}(0|2n+1)$. Обозначим переменные ξ_i, η_i, θ , где $1 \leq i \leq n$, и рассмотрим вид скобки

$$[f, g]_{\text{p.b.}} = (-1)^{p(f)} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial g}{\partial \eta_i} + \frac{\partial f}{\partial \eta_i} \frac{\partial g}{\partial \xi_i} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right).$$

Выберем в качестве подалгебры Картана ту, производящие функции которой – элементы из $\mathbb{C}[\xi_1\eta_1, \dots, \xi_n\eta_n, \theta]$. Пусть ϵ_i – вес элемента ξ_i (и тогда вес элемента η_i равен $-\epsilon_i$), где $i = 1, \dots, n$. Для веса $\gamma = \sum c_i \epsilon_i$ определим

$$h_\gamma := \sum c_i \xi_1 \eta_1 \dots \widehat{\xi_i \eta_i} \dots \xi_n \eta_n.$$

Также введем элемент $h_{\max} := \xi_1 \eta_1 \dots \xi_n \eta_n$.

6.2.1. Гипотеза. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{po}(0|2n+1)$, где $n > 2$, и выбрана одна из систем положительных корней, содержащих все корни ϵ_i . Тогда Sh_χ разлагается в произведение линейных множителей вида h_γ (где γ – такие положительные корни $\mathfrak{g}$, что $(\chi - \gamma)$ – положительные или нулевые веса) и $h_{\max}$.

Для $\mathfrak{poi}(0|3)$ и $\mathfrak{poi}(0|5)$ все системы положительных корней являются сопряженными, поэтому достаточно описать Sh_χ для одной системы. Для $\mathfrak{poi}(0|3)$ мы выбираем систему, состоящую из ϵ_1 , а для $\mathfrak{poi}(0|5)$ – систему, состоящую из $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_1 \pm \epsilon_2$.

Введем обозначения

для $\mathfrak{poi}(0|3)$: $h_1 = \xi_1 \eta_1$, $h_0 = \mathbf{1}$ (центральный элемент в $\mathfrak{po}(0|3)$);

для $\mathfrak{poi}(0|5)$: $h_{10} = \xi_1 \eta_1$, $h_{01} = \xi_2 \eta_2$; $h_{11} = \xi_1 \eta_1 \xi_2 \eta_2$.

6.2.2. Гипотеза. Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{poi}(0|3)$, то $\text{Sh}_{k\epsilon_1}$ разлагается в линейные множители вида h_0 и $h_1 - m/2$, где $m = 1, \dots, k$.

6.2.3. Гипотеза. Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{poi}(0|5)$, то для $\chi = k\epsilon_1 + l\epsilon_2$ (такой χ есть положительный вес, если $k, k+l \geq 0$ и хотя бы одно из чисел k, l положительно) Sh_χ разлагается на линейные множители следующего вида:

$$\begin{aligned} & h_{11}; \\ & h_{01}, \quad \text{если } k, k+l \geq 1; \\ & h_{10}, \quad \text{если } k+l \geq 1; \\ & h_{01} - h_{10} + m \quad \text{для } m \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq m \leq k; \\ & h_{01} + h_{10} - m \quad \text{для } m \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq m \leq k, \quad m \leq \frac{k+l}{2}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. В гипотезах 6.2.2 и 6.2.3 под скалярными слагаемыми подразумеваются скалярные члены $U(\mathfrak{poi}(0|2n+1))$, а не скалярные (центральные) элементы самой алгебры $\mathfrak{poi}(0|2n+1)$.

6.3. Алгебра $\mathfrak{po}(\widehat{0|2n})^{(1)}$. Обозначим переменные ξ_i, η_i , где $1 \leq i \leq n$, и возьмем скобку на $\mathfrak{po}(0|2n)$ в виде

$$[f, g]_{\text{P.B.}} = (-1)^{p(f)} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial g}{\partial \eta_i} + \frac{\partial f}{\partial \eta_i} \frac{\partial g}{\partial \xi_i} \right).$$

Выберем в качестве подалгебры Картана ту, производящие элементы которой – элементы из $\mathbb{C}[\xi_1 \eta_1, \dots, \xi_n \eta_n] \oplus \text{Span}(u, z)$. Пусть ϵ_i – вес элемента ξ_i (и тогда вес элемента η_i равен $-\epsilon_i$), где $i = 1, \dots, n$, а ϵ' – вес элемента t . Для веса $\gamma = \sum c_i \epsilon_i + c' \epsilon'$ определим

$$h_\gamma = \sum c_i \xi_1 \eta_1 \dots \widehat{\xi_i \eta_i} \dots \xi_n \eta_n + c' z.$$

Также введем элемент $h_{\max} := \xi_1 \eta_1 \dots \xi_n \eta_n$.

6.3.1. Гипотеза. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{po}(\widehat{0|2n})^{(1)}$, где $n > 2$, и выбрана одна из систем положительных корней, содержащих все корни ϵ_i, ϵ' . Тогда Sh_χ разлагается в произведение линейных множителей вида $h_{\max}$ и h_γ , где γ – положительные корни $\mathfrak{g}$ такие, что $(\chi - \gamma)$ – положительные или нулевые веса.

Благодарности. Мы благодарны Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Лейпциг, Германия, и Международной школе Макса Планка за финансовую поддержку и исключительно творческую атмосферу.

Список литературы

- [1] Ph. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Grad. Texts Contemp. Phys., Springer, New York, 1997.
- [2] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **241**:2 (1984), 333–380.
- [3] V. I. Dotsenko, V. A. Fateev, *Nucl. Phys. B*, **240**:3 (1984), 312–348.
- [4] V. Kac, “Some problems on infinite-dimensional Lie algebras and their representations”, *Lie Algebras and Related Topics*, Lecture Notes in Math., **933**, ed. D. Winter, Springer, Berlin, 1982, 117–126.
- [5] P. Goddard, D. Olive, *Nucl. Phys. B*, **257**:2 (1985), 226–252.
- [6] V. G. Knizhnik, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **247**:1 (1984), 83–103.
- [7] V. Kac, M. Wakimoto, *Adv. Math.*, **185**:2 (2004), 400–458; *Adv. Math.*, **193**:2 (2005), 453–455.
- [8] P. Grozman, A. Lebedev, D. Leites, “The Shapovalov determinant for stringy Lie superalgebras”, in preparation.
- [9] V. G. Kac, D. A. Kazhdan, *Adv. Math.*, **34**:1 (1979), 97–108.
- [10] P. Grozman, D. Leites, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **8**:2 (2001), 220–228; [arXiv: math.QA/0104287](#).
- [11] M. Gorelik, *On a generic Verma module at the critical level over affine Lie superalgebras*, [arXiv: math.RT/0504253](#).
- [12] B. B. Shoikhet, *J. Math. Sci. (New York)*, **92**:2 (1998), 3764–3806; [arXiv: q-alg/9703029](#).
- [13] M. Gorelik, V. Serganova, “Shapovalov forms for Poisson Lie superalgebras”, *Noncommutative Geometry and Representation Theory in Mathematical Physics*, Contemp. Math., **391**, eds. J. Fuchs, J. Mickelsson, G. Rozenblioum et al., AMS, Providence, RI, 2005, 111–121.
- [14] P. Grozman, D. Leites, “Lie superalgebras of supermatrices of complex size. Their generalizations and related integrable systems”, *Complex Analysis and Related Topics*, Oper. Theory Adv. Appl., **114**, eds. E. Ramírez de Arellano, M. Shapiro, L. Tovar, N. Vasilevski, Birkhäuser, Basel, 2000, 73–105; [arXiv: math.RT/0202177](#).

- [15] S. E. Konstein, *Resenhas*, **6**:2–3 (2004), 249–255; [arXiv:math-ph/0112063](#); S. E. Konstein, M. A. Vasiliev, *J. Math. Phys.*, **37**:6 (1996), 2872–2891; [arXiv:math-ph/9904032](#).
- [16] M. Gorelik, *Shapovalov determinants of Q-type Lie superalgebras*, [arXiv:math.RT/0511623](#).
- [17] P. Grozman, D. Leites, I. Shchepochkina, *Acta Math. Vietnam.*, **26**:1 (2001), 27–63; [arXiv:hep-th/9702120](#).
- [18] M. Gorelik, V. Serganova, “On representations of affine superalgebras $\mathfrak{q}(n)^{(2)}$ ”, *Mosc. Math. J.*, **8**:1 (2008).
- [19] P. Deligne, P. Etingof, D. S. Freed et al. (eds.), *Quantum Fields and Strings: a Course for Mathematicians*, V. 1, 2, AMS, Providence, RI, 1999.
- [20] В. А. Бунегина, Т. Н. Наумова, А. Л. Онищик, “Подалгебры Картана в супералгебрах Ли”, *Вопросы теории групп и гомологической алгебры*, ред. А. Л. Онищик, Ярослав. гос. ун-т, Ярославль, 1989, 99–104.
- [21] I. Penkov, V. Serganova, *Internat. J. Math.*, **5**:3 (1994), 389–419.
- [22] В. Кац, *Бесконечномерные алгебры Ли*, Мир, М., 1993.
- [23] В. И. Фейгин, Д. А. Лейтес, В. В. Серганова, “Супералгебры Каца–Мули”, *Теоретико-групповые методы в физике*, Т. 1 (Звенигород, 1982), ред. М. А. Марков, Наука, М., 1983, 274–278.
- [24] В. В. Серганова, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **48**:3 (1984), 585–598.
- [25] I. Musson, *Represent. Theory*, **1** (1997), 405–423.

Поступила в редакцию 7.02.2007