Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

У. А. Розиков, Ш. А. Шоюсупов, Плодородные НС-модели с тремя состояниями на дереве Кэли, *ТМФ*, 2008, том 156, номер 3, 412–424

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6256>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 13:26:36

© 2008 г.

У. А. Розиков^{*†}, Ш. А. Шоюсупов^{*}

ПЛОДОРОДНЫЕ НС-МОДЕЛИ С ТРЕМЯ СОСТОЯНИЯМИ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Рассматриваются плодородные hard-core (НС) модели с тремя состояниями на однородном дереве Кэли. Известно, что существуют четыре типа таких моделей. Для этих моделей описаны трансляционно-инвариантные и периодические НС-меры Гиббса. Также построено несчетное множество непериодических мер Гиббса.

Ключевые слова: дерево Кэли, конфигурация, НС-модель, мера Гиббса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Дерево Кэли $T^k = (V, L)$ порядка $k \geq 1$ определяется как бесконечно однородное дерево (т.е. граф без циклов), из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер. Здесь V – множество вершин и L – множество ребер.

Расстояние $d(x, y)$ для $x, y \in V$ на дереве Кэли вводится следующим образом: $d(x, y) = d$, если d есть минимальное значение, при котором найдутся вершины $x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y$ такие, что $\langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle$ – соседи. Последовательность $\pi = \{x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y\} \subset V$, реализующая указанный минимум, называется *путем* из x в y . Положим $W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}$, $V_n = \bigcup_{m=0}^n W_m$, где вершина $x^0 \in V$ фиксирована.

Рассмотрим НС-модель ближайших соседей с тремя состояниями на однородном дереве Кэли. В этой модели каждой вершине $x \in V$ ставится в соответствие одно из значений $\sigma(x) \in \{0, 1, 2\}$. Значения $\sigma(x) = 1, 2$ означают, что вершина x “занята”, а значение $\sigma(x) = 0$ означает, что вершина x “вакантна”.

Конфигурация $\sigma = \{\sigma(x), x \in V\}$ на дереве Кэли задается как функция из V в $\{0, 1, 2\}$. Аналогичным образом можно определить конфигурации в V_n и W_n .

В этой статье мы рассматриваем четыре типа плодородных (fertile) графов [1] с тремя вершинами 0, 1, 2 (на множестве значений $\sigma(x)$), которые имеют следующий

^{*}Институт математики и информационных технологий АН РУз, Ташкент, Узбекистан.
E-mail: rozikovu@yandex.ru, shokir79@mail.ru

[†]School of Mathematical Sciences, GC University, Lahore, Pakistan

Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

вид:

<i>ключ</i> :	$\{0, 1\}, \{0, 2\};$	петли в 0 и 1 (см. рис. 1),
<i>жезл</i> :	$\{0, 1\}, \{0, 2\};$	петли в 1 и 2 (см. рис. 2),
<i>петля</i> :	$\{0, 1\}, \{0, 2\};$	петли в 0, 1 и 2 (см. рис. 3);
<i>свисток</i> :	$\{0, 1\}, \{1, 2\};$	петля в 0 (см. рис. 4).

Графы, которые не являются плодородными, называются бесплодными (sterile) [1].

Пусть $O = \{\text{ключ}, \text{жезл}, \text{петля}, \text{свисток}\}$, $G \in O$. Назовем G -допустимой конфигурацией на дереве Кэли (в V_n, W_n) конфигурацию σ , для которой $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$ – ребро G для любой ближайшей пары соседей x, y из V (из V_n , из W_n соответственно). Обозначим множество G -допустимых конфигураций через Ω^G ($\Omega_{V_n}^G, \Omega_{W_n}^G$).

Множество активности [1] для графа G есть функция $\lambda: G \mapsto \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+$ – множество положительных действительных чисел). Значение λ_i функции λ в вершине $i \in \{0, 1, 2\}$ называется ее активностью.

Для данных G и λ мы определим гамильтониан G -НС-модели как

$$H_G^\lambda(\sigma) = \begin{cases} \sum_{x \in V} \ln \lambda_{\sigma(x)}, & \text{если } \sigma \in \Omega^G, \\ +\infty, & \text{если } \sigma \notin \Omega^G. \end{cases} \quad (1.1)$$

НС-модель вызывает интерес с точки зрения статистической механики, комбинаторики и теории нейронных сетей [2], [3].

Пусть $\mathbf{B}$ – σ -алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами Ω^G . Для любого n обозначим через $\mathbf{B}_{V_n} = \{\sigma \in \Omega^G: \sigma|_{V_n} = \sigma_n\}$ подалгебру $\mathbf{B}$, где $\sigma|_{V_n}$ – сужение σ на V_n , $\sigma_n: x \in V_n \mapsto \sigma_n(x)$ – допустимая конфигурация в V_n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. G -НС-мера Гиббса с тремя состояниями есть вероятностная мера μ на $(\Omega^G, \mathbf{B})$ такая, что для любого n и $\sigma_n \in \Omega_{V_n}^G$

$$\mu\{\sigma \in \Omega^G: \sigma|_{V_n} = \sigma_n\} = \int_{\Omega^G} \mu(d\omega) P_n(\sigma_n | \omega_{W_{n+1}}), \quad (1.2)$$

где

$$P_n(\sigma_n | \omega_{W_{n+1}}) = \frac{e^{-H_G^\lambda(\sigma_n)}}{Z_n(\lambda; \omega|_{W_{n+1}})} \mathbf{1}(\sigma_n \vee \omega|_{W_{n+1}} \in \Omega_{V_{n+1}}^G).$$

Здесь символ $\vee$ означает объединение конфигураций, $Z_n(\lambda; \omega|_{W_{n+1}})$ – нормировочный множитель с граничным условием $\omega|_{W_n}$:

$$Z_n(\lambda; \omega|_{W_{n+1}}) = \sum_{\tilde{\sigma}_n \in \Omega_{V_n}^G} e^{-H_G^\lambda(\tilde{\sigma}_n)} \mathbf{1}(\tilde{\sigma}_n \vee \omega|_{W_{n+1}} \in \Omega_{V_{n+1}}^G). \quad (1.3)$$

В работе [1] доказаны два утверждения: для каждого бесплодного графа G и некоторого множества положительной активности на G существует единственная инвариантная мера Гиббса на Ω^G ; для любого плодородного графа G существует множество активности λ на G , для которого Ω^G имеет по крайней мере две простые инвариантные меры Гиббса.

В этой статье мы рассмотрим случай $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$ и опишем соответствующие этому случаю трансляционно-инвариантные, периодические и некоторые непериодические меры Гиббса. В работе [4] эти проблемы решены в случае $G = \text{ключ}$. Мы рассмотрим случаи $G = \text{петля}$, $G = \text{свисток}$, $G = \text{жезл}$. Некоторые наши результаты улучшают аналогичные результаты работы [4].

Структура статьи следующая. В разделе 2 мы сводим нашу проблему к решению системы функциональных уравнений, которые зависят от матрицы смежности графа $G \in \mathcal{O}$. Раздел 3 посвящен трансляционно-инвариантным мерам Гиббса. В следующих разделах рассматриваются периодические и непериодические меры Гиббса. Все разделы содержат некоторые замечания, в которых мы сравниваем наши результаты с известными.

2. СИСТЕМА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Будем писать $x < y$, если путь от x^0 до y проходит через x . Вершина y называется прямым потомком x , если $y > x$ и x, y являются соседями. Через $S(x)$ обозначим множество прямых потомков x . Заметим, что в T^k всякая вершина $x \neq x^0$ имеет k прямых потомков, а вершина x^0 имеет $k + 1$ потомков.

Для $\sigma_n \in \Omega_{V_n}^G$ положим $\#\sigma_n = \sum_{x \in V_n} \mathbf{1}(\sigma_n(x) \geq 1)$ (т.е. $\#\sigma_n$ – число занятых вершин в σ_n).

Пусть $z: x \mapsto z_x = (z_{0,x}, z_{1,x}, z_{2,x}) \in \mathbb{R}_+^3$ – векторнозначная функция на V . Для $n = 1, 2, \dots$ и $\lambda > 0$ рассмотрим вероятностную меру $\mu^{(n)}$ на $\Omega_{V_n}^G$, определяемую как

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n} \lambda^{\#\sigma_n} \prod_{x \in W_n} z_{\sigma(x), x}, \quad (2.1)$$

где

$$Z_n = \sum_{\tilde{\sigma}_n \in \Omega_{V_n}^G} \lambda^{\#\tilde{\sigma}_n} \prod_{x \in W_n} z_{\tilde{\sigma}(x), x}.$$

Говорят, что вероятностная мера $\mu^{(n)}$ является согласованной, если для любого $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}^G$

$$\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}^G} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) \mathbf{1}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega_{V_n}^G) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \quad (2.2)$$

В этом случае существует единственная вероятностная мера μ на $(\Omega^G, \mathbf{B})$ такая, что $\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n)$ для любого n и $\sigma_n \in \Omega_{V_n}^G$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Мера μ , определенная формулой (2.1) с условием (2.2), называется G -НС-мерой Гиббса с $\lambda > 0$, соответствующей функции $z: x \in V \setminus \{x^0\} \mapsto z_x$.

Пусть $L(G)$ – множество ребер графа G , обозначим через $A \equiv A^G = (a_{ij})_{i,j=0,1,2}$ матрицу смежности G , т.е.

$$a_{ij} \equiv a_{ij}^G = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i, j\} \in L(G), \\ 0, & \text{если } \{i, j\} \notin L(G). \end{cases}$$

В следующей теореме сформулировано условие на z_x , гарантирующее согласованность меры $\mu^{(n)}$.

ТЕОРЕМА 1. Вероятностные меры $\mu^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, заданные формулой (2.1), согласованы тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} z'_{1,x} &= \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{10} + a_{11}z'_{1,y} + a_{12}z'_{2,y}}{a_{00} + a_{01}z'_{1,y} + a_{02}z'_{2,y}}, \\ z'_{2,x} &= \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{20} + a_{21}z'_{1,y} + a_{22}z'_{2,y}}{a_{00} + a_{01}z'_{1,y} + a_{02}z'_{2,y}}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $z'_{i,x} = \lambda z_{i,x} / z_{0,x}$, $i = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что левую часть (2.2) можно записать как

$$\frac{1}{Z_n} \lambda^{\# \sigma_{n-1}} \prod_{x \in W_{n-1}} \prod_{y \in S(x)} (a_{\sigma_{n-1}(x)0} z_{0,y} + a_{\sigma_{n-1}(x)1} \lambda z_{1,y} + a_{\sigma_{n-1}(x)2} \lambda z_{2,y}). \quad (2.4)$$

Достаточность. Предположим, что верно (2.3). Это эквивалентно тому, что

$$\prod_{y \in S(x)} (a_{i0} z_{0,y} + \lambda a_{i1} z_{1,y} + \lambda a_{i2} z_{2,y}) = a(x) z_{i,x}, \quad i = 0, 1, 2, \quad (2.5)$$

для некоторой функции $a(\cdot)$, $a(x) > 0$ при $x \in V$. Вводя $A_n = \prod_{x \in W_n} a(x)$ и подставляя (2.1) в левую часть (2.2), получим (2.4); из (2.5) мы имеем

$$\frac{1}{Z_n} \lambda^{\# \sigma_{n-1}} \prod_{x \in W_{n-1}} z_{\sigma_{n-1}(x),x} a(x) = \frac{A_{n-1}}{Z_n} \lambda^{\# \sigma_{n-1}} \prod_{x \in W_{n-1}} z_{\sigma_{n-1}(x),x}.$$

Отсюда

$$\sum_{\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}^G} \sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}^G} \mathbf{1}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega_{V_n}^G) \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) = 1,$$

следовательно, $A_{n-1}/Z_n = 1/Z_{n-1}$, и верно равенство (2.2).

Необходимость. Предположим, что верно (2.2). Подставляя (2.1) в (2.2) и используя (2.4), получим, что для любого $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}^G$

$$\begin{aligned} & \frac{Z_{n-1}}{Z_n} \lambda^{\# \sigma_{n-1}} \prod_{x \in W_{n-1}} \prod_{y \in S(x)} (a_{\sigma_{n-1}(x)0} z_{0,y} + a_{\sigma_{n-1}(x)1} \lambda z_{1,y} + a_{\sigma_{n-1}(x)2} \lambda z_{2,y}) = \\ & = \prod_{x \in W_{n-1}} z_{\sigma_{n-1}(x),x}. \end{aligned}$$

Из этого равенства вытекает, что

$$\frac{Z_{n-1}}{Z_n} \prod_{x \in W_{n-1}} \prod_{y \in S(x)} (a_{i0}z_{0,y} + \lambda a_{i1}z_{1,y} + \lambda a_{i2}z_{2,y}) = \prod_{x \in W_{n-1}} z_{i,x}, \quad i = 0, 1, 2. \quad (2.6)$$

Обозначая $z'_{i,x} = \lambda z_{i,x}/z_{0,x}$, $i = 1, 2$, из (2.6) получим (2.3). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для $G = \text{ключ}$ из теоремы 1 можно получить теорему 1 работы [4].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналогично можно доказать теорему 1 для общего случая, когда $\sigma(x)$ принимает значения $0, 1, \dots, q$, граф G является фиксированным графом с $q \geq 1$ вершинами, $\lambda: i \in G \mapsto \lambda_i \in \mathbb{R}_+$ – заданная функция. Тогда (2.3) принимает следующий вид:

$$z_{j,x} = \frac{\lambda_j}{\lambda_0} \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{j0} + \sum_{i=1}^q a_{ji}z_{i,y}}{a_{00} + \sum_{i=1}^q a_{0i}z_{i,y}}, \quad j = 1, 2, \dots, q.$$

Однако анализ решения этого уравнения весьма затруднителен.

3. ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ ГИББСА

Мы полагаем, что $z_{0,x} \equiv 1$ и $z_{i,x} = z'_{i,x} > 0$, $i = 1, 2$. Тогда для любых функций $z: x \in V \mapsto z_x = (z_{1,x}, z_{2,x})$, удовлетворяющих равенству

$$z_{i,x} = \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{i0} + a_{i1}z_{1,y} + a_{i2}z_{2,y}}{a_{00} + a_{01}z_{1,y} + a_{02}z_{2,y}}, \quad i = 1, 2, \quad (3.1)$$

существует единственная G -НС-мера Гиббса μ и наоборот. Естественно начать с трансляционно-инвариантных решений, в которых $z_x = z \in \mathbb{R}_+^2$, $x \neq x_0$.

3.1. Случай $G = \text{петля}$. В этом случае, предполагая $z_x = z$, мы получим из (3.1) следующую систему уравнений:

$$z_1 = \lambda \left(\frac{1 + z_1}{1 + z_1 + z_2} \right)^k, \quad z_2 = \lambda \left(\frac{1 + z_2}{1 + z_1 + z_2} \right)^k. \quad (3.2)$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$(z_1 - z_2) \left[1 - \lambda \frac{(1 + z_1)^{k-1} + \dots + (1 + z_2)^{k-1}}{(1 + z_1 + z_2)^k} \right] = 0.$$

Следовательно, $z_1 = z_2$ или

$$(1 + z_1 + z_2)^k = \lambda((1 + z_1)^{k-1} + \dots + (1 + z_2)^{k-1}) \quad \text{при} \quad z_1 \neq z_2. \quad (3.3)$$

Для $z_1 = z_2 = z$ из системы (3.2) следует, что

$$\lambda^{-1}z = f(z) = \left(\frac{1 + z}{1 + 2z} \right)^k, \quad (3.4)$$

где $f(\cdot)$ – убывающая функция при $z > 0$. Из этого вытекает, что уравнение (3.4) имеет единственное решение $z^* = z^*(k, \lambda)$ для любого $\lambda > 0$.

Если верно (3.3), то мы полагаем $k = 2$ и из (3.3) имеем

$$1 + z_1 + z_2 = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda}}{2}. \quad (3.5)$$

Используя это равенство, из первого уравнения системы (3.2) мы получим для $k = 2$

$$z_1^{(1)} = \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4a^2}}{2a} \right)^2, \quad z_1^{(2)} = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4a^2}}{2a} \right)^2, \quad a = \frac{2}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda + 4}}, \quad (3.6)$$

если $\lambda > 9/4$. Используя второе уравнение, мы получаем, что $z_2^{(1)}, z_2^{(2)} \in \{z_1^{(1)}, z_1^{(2)}\}$. Поскольку $z_1 \neq z_2$, мы заключаем, что $z_1 = z_1^{(1)}$, $z_2 = z_1^{(2)}$ и $z_1 = z_1^{(2)}$, $z_2 = z_1^{(1)}$. Можно легко проверить, что эти решения удовлетворяют условию (3.5).

Таким образом, если $k = 2$, $\lambda > 9/4$, то система (3.2) имеет три решения (z^*, z^*) , $(z_1^{(1)}, z_1^{(2)})$, $(z_1^{(2)}, z_1^{(1)})$, где z^* – единственное решение уравнения (3.4) и $z_1^{(i)}$, $i = 1, 2$, определены в (3.6). Заметим, что $z_1^{(1)} = 1/z_2^{(2)}$ и доказана

ТЕОРЕМА 2. Пусть $k = 2$, тогда в случае $G = \text{петля}$

- 1) при $\lambda \leq 9/4$ существует единственная трансляционно-инвариантная НС-мера Гиббса μ_0 ;
- 2) при $\lambda > 9/4$ существуют три трансляционно-инвариантные НС-меры Гиббса μ_i , $i = 0, 1, 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Идея анализа решений (3.2) взята из работы [4]. Значение $\lambda = \lambda_{\text{cr}} = 9/4$ является точным критическим значением для $k = 2$. Ясно, что $\lambda_{\text{cr}} < 4 = \lambda_{\text{cr}}^{\text{НС}}$ при $k = 2$, где $\lambda_{\text{cr}}^{\text{НС}} = \frac{1}{k-1} \left(\frac{k}{k-1} \right)^k$ – критическое значение НС-модели с двумя состояниями [5].

Следующая лемма дает оценки для произвольного решения системы (3.1).

ЛЕММА 1. Если $z_x = (z_{1,x}, z_{2,x})$ является решением (3.1) в случае $G = \text{петля}$, то $z_i^- \leq z_{i,x} \leq z_i^+$ для любого $x \in V$, $i = 1, 2$, где $(z_1^-, z_1^+, z_2^-, z_2^+)$ – решение следующей системы:

$$\begin{aligned} z_1^- &= \lambda \left(\frac{1 + z_1^-}{1 + z_1^- + z_2^+} \right)^k, & z_1^+ &= \lambda \left(\frac{1 + z_1^+}{1 + z_1^+ + z_2^-} \right)^k, \\ z_2^- &= \lambda \left(\frac{1 + z_2^-}{1 + z_1^+ + z_2^-} \right)^k, & z_2^+ &= \lambda \left(\frac{1 + z_2^+}{1 + z_1^- + z_2^+} \right)^k. \end{aligned} \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы аналогично доказательству леммы 5 из работы [4].

ЛЕММА 2. Если $z = (z_1^-, z_1^+, z_2^-, z_2^+)$ – решение системы (3.7), то $z_1^- = z_1^+$ тогда и только тогда, когда $z_2^- = z_2^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 6 из работы [4].

СЛЕДСТВИЕ 1. Если система (3.7) имеет единственное решение, то система (3.1) также имеет единственное решение. Это решение имеет вид $z_x = (z_1^*, z_2^*)$, $x \in V$, где (z_1^*, z_2^*) – единственное решение (3.2).

Теперь найдем точные значения z_i^- , z_i^+ , $i = 1, 2$, для $k = 2$. Рассмотрим систему, составленную из первого и последнего уравнений системы (3.7):

$$z_1^- = \lambda \left(\frac{1 + z_1^-}{1 + z_1^- + z_2^+} \right)^k, \quad z_2^+ = \lambda \left(\frac{1 + z_2^+}{1 + z_1^- + z_2^+} \right)^k. \quad (3.8)$$

Если $z_1^- = z_2^+$, то эта система имеет единственное решение. В случае $z_1^- \neq z_2^+$ получим

$$(1 + z_1^- + z_2^+)^k = \lambda((1 + z_1^-)^{k-1} + \dots + (1 + z_2^+)^{k-1}). \quad (3.9)$$

Если $k = 2$, то из (3.9) следует, что

$$1 + z_1^- + z_2^+ = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda}}{2}. \quad (3.10)$$

Используя это равенство, из первого уравнения системы (3.8) получаем, что при $k = 2$ и $\lambda > 9/4$

$$(z_1^-)^{(1)} = \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4a^2}}{2a} \right)^2, \quad (z_1^-)^{(2)} = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4a^2}}{2a} \right)^2, \quad (3.11)$$

где a определено в (3.6). Используя эти выражения и уравнение (3.10), получим

$$(z_2^+)^{(1)} = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4a^2}}{2a} \right)^2, \quad (z_2^+)^{(2)} = \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4a^2}}{2a} \right)^2.$$

Аналогично из второго и третьего равенств системы (3.7) имеем

$$z_1^+, z_2^- \in M = \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4a^2}}{2a} \right)^2, \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4a^2}}{2a} \right)^2 \right\}.$$

Заметим, что $(z_i^\pm)^{(1)} = 1/(z_i^\mp)^{(2)}$, $i = 1, 2$. Таким образом, доказана

ЛЕММА 3. Если $k = 2$, то в случае $G = \text{петля}$

- 1) при $\lambda \leq 9/4$ система (3.7) имеет единственное решение z^* ;
- 2) при $\lambda > 9/4$ система (3.7) имеет три решения $z_1^* = (z^-, 1/z^-, z^-, 1/z^-)$, $z_2^* = (1/z^-, 1/z^-, z^-, z^-)$, $z_3^* = (z^-, z^-, 1/z^-, 1/z^-)$, где $z^- = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4a^2}}{2a} \right)^2$.

Заметим, что при $\lambda > 9/4$ мы имеем неравенства $0 < a < 1/2$ и $z^- < 1$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $k = 2$, $\lambda > 9/4$, то для любого решения системы (3.1) (в случае $G = \text{петля}$) $z^- \leq z_{i,x} \leq 1/z^-$, $i = 1, 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. При получении точного решения системы (3.7) при $k = 2$ мы использовали независимость первого и последнего уравнений системы (3.7), а также независимость второго и третьего уравнений. Но это не выполняется в случаях $G = \text{свисток}$ и $G = \text{ключ}$. Поэтому аналог следствия 2 не ясен для этих случаев.

3.2. Случай $G = \text{жесл}$. В этом случае из (3.1) для $z_x = z$ имеем

$$z_1 = \lambda \left(\frac{1 + z_1}{z_1 + z_2} \right)^k, \quad z_2 = \lambda \left(\frac{1 + z_2}{z_1 + z_2} \right)^k. \quad (3.12)$$

Этот случай очень сходен со случаем $G = \text{петля}$ и можно аналогично доказать, что если $k = 2$, $\lambda > 1$, то система (3.12) имеет три решения, которые задаются формулами для $G = \text{петля}$ с заменой a из (3.6) на $a = 2(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda + 8})^{-1}$.

Таким образом, можно сформулировать теорему, аналогичную теореме 2, с заменой $\lambda_{\text{кр}} = 9/4$ на $\lambda_{\text{кр}} = 1$, но мы не имеем аналога лемм 1–3 для случая $G = \text{жесл}$.

3.3. Случай $G = \text{свисток}$. В этом случае из (3.1) для $z_x = z$ имеем

$$z_1 = \lambda \left(\frac{1 + z_2}{1 + z_1} \right)^k, \quad z_2 = \lambda \left(\frac{z_1}{1 + z_1} \right)^k. \quad (3.13)$$

Из этого получим ($x = z_2$)

$$\lambda^{-1}x = f(x) = \left(\frac{{}^{k+1}\sqrt{x(1+x)^k}}{1 + {}^{k+1}\sqrt{x(1+x)^k}} \right)^k. \quad (3.14)$$

Отсюда

$$f'(x) = \frac{k}{k+1} \frac{(k+1)x+1}{x(x+1)} \frac{({}^{k+1}\sqrt{x(1+x)^k})^k}{(1 + {}^{k+1}\sqrt{x(1+x)^k})^{k+1}} > 0.$$

Заметим, что уравнение (3.14) имеет по крайней мере одно положительное решение, поскольку $f(\cdot)$ – возрастающая функция и $f(0) = 0$, $f(+\infty) = 1$. Легко видеть, что уравнение (3.14) имеет более чем одно положительное решение тогда и только тогда, когда существует более чем одно положительное решение уравнения $xf'(x) = f(x)$, которое эквивалентно

$$(k^2 - 1)x = \varphi(x) = (k+1)(1+x) {}^{k+1}\sqrt{x(1+x)^k} + 1. \quad (3.15)$$

Повторяя эти рассуждения, можно получить, что (3.15) имеет более чем одно решение тогда и только тогда, когда $x\varphi'(x) = \varphi(x)$ имеет более чем одно решение. Это уравнение может быть записано в следующем виде:

$$(k+1)x = \psi(x) = \frac{1}{{}^{k+1}\sqrt{x(1+x)^k}} + k. \quad (3.16)$$

Поскольку $\psi(\cdot)$ – убывающая функция, уравнение (3.16) имеет единственное решение, следовательно, система (3.13) имеет единственное решение.

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 3. В случае $G = \text{свисток}$ для любых $\lambda > 0$ и $k \geq 1$ трансляционно-инвариантная G -НС-мера Гиббса единственна.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Для $k = 2$ эта теорема доказана в [4].

Для $G = \text{свисток}$ можно доказать следующие леммы, которые аналогичны леммам 1 и 2.

ЛЕММА 4. Если $z_x = (z_{1,x}, z_{2,x})$ – решение системы (3.1) в случае $G = \text{свисток}$, то $z_i^- \leq z_{i,x} \leq z_i^+$ для любого $x \in V$, $i = 1, 2$, где $(z_1^-, z_1^+, z_2^-, z_2^+)$ – решение системы

$$\begin{aligned} z_1^- &= \lambda \left(\frac{1 + z_2^-}{1 + z_1^+} \right)^k, & z_1^+ &= \lambda \left(\frac{1 + z_2^+}{1 + z_1^-} \right)^k, \\ z_2^- &= \lambda \left(\frac{z_1^-}{1 + z_1^-} \right)^k, & z_2^+ &= \lambda \left(\frac{z_1^+}{1 + z_1^+} \right)^k. \end{aligned} \quad (3.17)$$

ЛЕММА 5. Если $z = (z_1^-, z_1^+, z_2^-, z_2^+)$ – решение системы (3.17), то $z_1^- = z_1^+$ тогда и только тогда, когда $z_2^- = z_2^+$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Для $G = \text{свисток}$ мы не имеем утверждений, аналогичных лемме 3 и следствию 2, поскольку в этом случае отсутствует независимость (упомянутая в замечании 4) уравнений системы (3.17).

Следующие два раздела посвящены описанию периодических и некоторых непериодических мер Гиббса для случая $G = \text{петля}$. Результаты этих разделов можно получить также для $G = \text{свисток}$, но для $G = \text{жесл}$ требуется доказать аналог леммы 2.

4. ОПИСАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕР ГИББСА: СЛУЧАЙ $G = \text{петля}$

Для $G = \text{петля}$ запишем (3.1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} h_{1,x} &= \ln \lambda + \sum_{y \in S(x)} \ln \frac{1 + e^{h_{1,y}}}{1 + e^{h_{1,y}} + e^{h_{2,y}}}, \\ h_{2,x} &= \ln \lambda + \sum_{y \in S(x)} \ln \frac{1 + e^{h_{2,y}}}{1 + e^{h_{1,y}} + e^{h_{2,y}}}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $h_{i,x} = \ln z_{i,x}$, $i = 1, 2$. В этом разделе мы изучим периодические решения системы (4.1).

Заметим, что (см. [6]) существует взаимно однозначное соответствие между множеством вершин V дерева Кэли порядка $k \geq 1$ и группой G_k , представляющей собой свободное произведение $k + 1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть H_0 – подгруппа группы G_k . Совокупность векторов $h = \{h_x = (h_{1,x}, h_{2,x}) : x \in G_k\}$ называется H_0 -периодической, если $h_{i,yx} = h_{i,x}$ для любых $x \in G_k$ и $y \in H_0$, $i = 1, 2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Мера Гиббса, соответствующая H_0 -периодической совокупности векторов, называется H_0 -периодической; G_k -периодическая мера называется трансляционно-инвариантной.

Пусть функция $F(\cdot): h = (h_1, h_2) \mapsto F(h) = (F_1(h), F_2(h))$ задается равенствами

$$F_1(h) = \ln \frac{1 + e^{h_1}}{1 + e^{h_1} + e^{h_2}}, \quad F_2(h) = \ln \frac{1 + e^{h_2}}{1 + e^{h_1} + e^{h_2}}. \quad (4.2)$$

ЛЕММА 6. Равенство $F(h) = F(l)$ имеет место тогда и только тогда, когда $h = l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $F(h) = F(l)$, тогда $F_1(h) = F_1(l)$, $F_2(h) = F_2(l)$, где $h = (h_1, h_2)$, $l = (l_1, l_2)$. Из этих равенств мы получаем систему

$$\begin{aligned} -t_2(z_1 - t_1) + (1 + t_1)(z_2 - t_2) &= 0, \\ (1 + t_2)(z_1 - t_1) - t_1(z_2 - t_2) &= 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $z_i = e^{h_i}$, $t_i = e^{l_i}$, $i = 1, 2$. Заметим, что детерминант этой системы $\Delta = -(1 + t_1 + t_2) < 0$. Следовательно, (4.3) имеет единственное решение $z_i = t_i$, $i = 1, 2$.

Достаточность очевидна. Лемма доказана.

Пусть G_k^2 – подгруппа группы G_k , состоящая из слов четной длины. Очевидно, что G_k^2 является подгруппой индекса 2. Пусть H_0 – нормальный делитель конечного индекса группы G_k . Положим $I(H_0) = H_0 \cap \{a_1, \dots, a_{k+1}\}$.

Аналогично теоремам 2 и 3 из [4] можно доказать следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 4. Для любого нормального делителя конечного индекса H_0 всякая H_0 -периодическая мера Гиббса для НС-модели является либо трансляционно-инвариантной, либо G_k^2 -периодической мерой.

ТЕОРЕМА 5. Если $I(H_0) \neq \emptyset$, то всякая H_0 -периодическая мера Гиббса для НС-модели является трансляционно-инвариантной.

В силу теорем 4 и 5 задача описания H_0 -периодической меры Гиббса при $I(H_0) \neq \emptyset$ сводится к описанию неподвижных точек отображения $h = (h_1, h_2) \mapsto (\ln \lambda, \ln \lambda) + kF(h)$ (эти неподвижные точки отвечают трансляционно-инвариантным мерам Гиббса), а при $I(H_0) = \emptyset$ – к описанию решений системы

$$h = (\ln \lambda, \ln \lambda) + kF(l), \quad l = (\ln \lambda, \ln \lambda) + kF(h). \quad (4.4)$$

Заметим, что данная система описывает периодические меры с периодом 2, точнее, G_k^2 -периодические меры.

Как и ранее, положим $z_i = e^{h_i}$, $t_i = e^{l_i}$, $i = 1, 2$, тогда из (4.4) получим систему

$$\begin{aligned} z_1 &= \lambda \left(\frac{1 + t_1}{1 + t_1 + t_2} \right)^k, & z_2 &= \lambda \left(\frac{1 + t_2}{1 + t_1 + t_2} \right)^k, \\ t_1 &= \lambda \left(\frac{1 + z_1}{1 + z_1 + z_2} \right)^k, & t_2 &= \lambda \left(\frac{1 + z_2}{1 + z_1 + z_2} \right)^k. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Анализ решений этой системы достаточно сложен. В частном случае можно преобразовать ее к уравнению $\gamma(\gamma(x)) = x$ для некоторой функции γ и применить следующую лемму.

ЛЕММА 7 [7]. Пусть $f: [0, 1] \mapsto [0, 1]$ – непрерывная функция с неподвижной точкой $\xi \in (0, 1)$. Допустим, что f дифференцируема в точке ξ и $f'(\xi) < -1$. Тогда существуют точки $x_0, x_1, 0 \leq x_0 < \xi < x_1 \leq 1$, такие, что $f(x_0) = x_1$ и $f(x_1) = x_0$.

Если $z_1 = z_2 = z, t_1 = t_2 = t$, то (4.5) сводится к следующей системе:

$$z = \lambda \left(\frac{1+t}{1+2t} \right)^k, \quad t = \lambda \left(\frac{1+z}{1+2z} \right)^k, \quad (4.6)$$

которую можно переписать как

$$z = \gamma(t), \quad t = \gamma(z) \quad \text{при} \quad \gamma(x) = \lambda \left(\frac{1+x}{1+2x} \right)^k. \quad (4.7)$$

Заметим, что уравнение $x = \gamma(x)$ имеет единственное решение $x^* = x^*(k, \lambda)$ для любых $k \geq 1$ и $\lambda > 0$.

ТЕОРЕМА 6. При $k \geq 6$ и

$$\lambda \in \left\{ \lambda: \frac{k-3-\sqrt{(k-3)^2-8}}{4} < x^*(k, \lambda) < \frac{k-3+\sqrt{(k-3)^2-8}}{4} \right\} \quad (4.8)$$

существуют три G_k^2 -периодические меры μ_0, μ_*, μ_1 , соответствующие трем решениям $(x_0, x_1), (x_*, x_*), (x_1, x_0)$ системы (4.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\gamma(\cdot)$, заданная в (4.7), убывает при $x > 0$. В силу леммы 7, если x^* удовлетворяет соотношениям

$$\gamma(x^*) = x^*, \quad \gamma'(x^*) < -1, \quad (4.9)$$

то система (4.6) имеет два решения. Из (4.9) следует, что

$$2(x^*)^2 + (3-k)x^* + 1 < 0. \quad (4.10)$$

Решая это неравенство, получим, что $k \geq 6$ и справедливо (4.8). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Теорема 6 дает более легко применимые условия (в случае $G = \text{петля}$), чем теорема 4 работы [4] (в случае $G = \text{ключ}$).

5. НЕПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ ГИББСА: СЛУЧАЙ $G = \text{петля}$

Как следует из общих результатов работ [8], [9], если периодическая мера Гиббса не единственна, то существует по крайней мере счетное число непериодических мер Гиббса. Для $G = \text{петля}$ мы далее докажем более точное утверждение (см. теорему 8). Мы покажем, что система уравнений (4.1) допускает несчетное число решений, не являющихся трансляционно-инвариантными.

Рассмотрим произвольный бесконечный путь $\pi = \{x^0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots\}$ на дереве Кэли, начинающийся с $x_0 = x^0$. Можно установить взаимно однозначное соответствие между множеством таких путей и множеством действительных чисел на отрезке $[0, 1]$ (см. [10], [11]). Отобразим путь π в функцию $h^\pi: x \in V \mapsto h_x^\pi$, заданную

формулами (4.1). Заметим, что π разделяет дерево Кэли T^k на два подграфа T_1^k и T_2^k . Для $k = 2$, $\lambda > 9/4$ функция h^π определяется следующим образом:

$$h_x^\pi = \begin{cases} \ln z^-, & \text{если } x \in T_1^k, \\ -\ln z^-, & \text{если } x \in T_2^k, \end{cases} \quad (5.1)$$

где $z^- = \left(\frac{1-\sqrt{1-4a^2}}{2a}\right)^2$ (см. лемму 3). Пусть $F(\cdot): h \mapsto F(h)$ определяется (4.2).

ЛЕММА 8. Для $k = 2$, $\lambda > 9/4$ и любого $h = (h_1, h_2) \in [\ln z^-; -\ln z^-]^2$ (напомним, что $z^- < 1$) имеют место следующие неравенства:

$$\left| \frac{\partial F_1}{\partial h_1} \right| \leq \frac{1}{(\sqrt{z^- + 1} + \sqrt{z^-})^2}, \quad \left| \frac{\partial F_2}{\partial h_2} \right| \leq \frac{1}{(\sqrt{z^- + 1} + \sqrt{z^-})^2}, \quad (5.2)$$

$$\left| \frac{\partial F_1}{\partial h_2} \right| \leq \frac{1}{1 + z^- + (z^-)^2}, \quad \left| \frac{\partial F_2}{\partial h_1} \right| \leq \frac{1}{1 + z^- + (z^-)^2};$$

$$\|F(h) - F(l)\| \leq \frac{2}{1 + z^- + (z^-)^2} \|h - l\|. \quad (5.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя лемму 9 работы [12] и неравенства $\ln z^- \leq h_i \leq -\ln z^-$, $i = 1, 2$, мы имеем

$$\left| \frac{\partial F_1}{\partial h_1} \right| \leq \frac{e^{h_2}}{(\sqrt{e^{h_2} + 1} + 1)^2} = \psi(h_2).$$

Функция $\psi(\cdot)$ возрастает, поэтому

$$\left| \frac{\partial F_1}{\partial h_1} \right| \leq \psi(-\ln z^-) = \frac{1}{(\sqrt{z^- + 1} + \sqrt{z^-})^2}.$$

Доказательство неравенства для $\left| \frac{\partial F_2}{\partial h_2} \right|$ аналогично.

Теперь рассмотрим

$$\left| \frac{\partial F_1}{\partial h_2} \right| = \frac{e^{h_2}}{1 + e^{h_1} + e^{h_2}} = \varphi(h_1, h_2).$$

Поскольку $\varphi'_{h_2} > 0$ и $\varphi'_{h_1} < 0$, мы имеем

$$\left| \frac{\partial F_1}{\partial h_2} \right| \leq \max \varphi(h_1, h_2) = \varphi(\ln z^-, -\ln z^-) = \frac{1}{1 + z^- + (z^-)^2},$$

и третье неравенство в (5.2) доказано. Последнее неравенство в (5.2) доказывается аналогично.

Докажем (5.3). Легко видеть, что $(\sqrt{z^- + 1} + \sqrt{z^-})^{-2} < (1 + z^- + (z^-)^2)^{-1}$ для $z^- < 1$. Используя это неравенство, мы получим

$$\begin{aligned} \|F(h) - F(l)\| &= \max_{i=1,2} \{|F_i(h) - F_i(l)|\} \leq \\ &\leq \max_{i=1,2} \{|(F_i)'_{h_1}| |h_1 - l_1| + |(F_i)'_{h_2}| |h_2 - l_2|\} \leq \frac{2}{1 + z^- + (z^-)^2} \|h - l\|. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Если $2(1 + z^- + (z^-)^2)^{-1} < 1$, т.е. $z^- > (\sqrt{5} - 1)/2$, то с помощью леммы 8 легко доказать следующую теорему 7, аналогичную теореме 3 работы [11].

ТЕОРЕМА 7. Если $k = 2$ и $9/4 < \lambda < 2(\sqrt{5} - 1)$ (т.е. $(\sqrt{5} - 1)/2 < z^- < 1$), то для любого бесконечного пути π существует единственная функция h^π , удовлетворяющая (4.1) и (5.1).

Стандартным образом (см. [6], [8], [11]) можно доказать, что функции $h^{\pi(t)}$ различны для различных $t \in [0, 1]$. Обозначим теперь через $\mu(t)$ меру Гиббса, соответствующую функции $h^{\pi(t)}$, $t \in [0, 1]$. Следующий результат аналогичен теореме 3.2 из [13].

ТЕОРЕМА 8. Если условия теоремы 7 выполнены, то при $G = \text{петля}$ для любого $t \in [0, 1]$ существует единственная G -НС-мера Гиббса $\mu(t)$. Кроме того, меры Гиббса μ_1, μ_2 (см. теорему 2) определяются точно: $\mu(0) = \mu_1$ и $\mu(1) = \mu_2$.

Поскольку меры $\mu(t)$ различны для различных $t \in [0, 1]$, мы имеем несчетное число мер Гиббса, которые являются непериодическими.

Благодарности. Часть этой работы выполнена в рамках схемы Junior Associate в International Center of Theoretical Physics (Triest, Italy); У. А. Розиков благодарит ИСТР за финансовую поддержку (май–август 2006 г.). Он также благодарит Institut des Hautes Études Scientifiques (Bures-sur-Yvette, France) за поддержку (октябрь–декабрь 2006 г.) и School of Mathematical Sciences (Lahore, Pakistan), где была выполнена финальная часть этой работы.

Список литературы

- [1] G. Brightwell, P. Winkler, *J. Combin. Theory Ser. B*, **77**:2 (1999), 221–262.
- [2] G. Brightwell, O. Häggström, P. Winkler, *J. Statist. Phys.*, **94**:3–4 (1999), 415–435.
- [3] Н. О. Георгии, *Gibbs Measures and Phase Transitions*, de Gruyter Stud. Math., **9**, Walter de Gruyter, Berlin, 1988.
- [4] J. Martin, U. A. Rozikov, Yu. M. Suhov, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12**:3 (2005), 432–448.
- [5] U. A. Rozikov, Yu. M. Suhov, *Queueing Syst.*, **46**:1–2 (2004), 197–212.
- [6] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков, *ТМФ*, **111**:1 (1997), 109–117.
- [7] H. Kesten, *Adv. Appl. Probab.*, **2**:1 (1970), 1–82.
- [8] S. Zachary, *Ann. Probab.*, **11**:4 (1983), 894–903.
- [9] S. Zachary, *Stochastic Process. Appl.*, **20**:2 (1985), 247–256.
- [10] У. А. Розиков, *Сиб. матем. журн.*, **39**:2 (1998), 427–435.
- [11] У. А. Розиков, *ТМФ*, **118**:1 (1999), 95–104.
- [12] У. А. Розиков, Ш. А. Шоюсупов, *ТМФ*, **149**:1 (2006), 18–31.
- [13] П. М. Блехер, Н. Н. Ганиходжаев, *ТВП*, **35**:2 (1990), 220–230.

Поступила в редакцию 10.07.2007