Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. З. Голубчик, В. В. Соколов, Многокомпонентное обобщение иерархии уравнения Ландау–Лифшица, *ТМФ*, 2000, том 124, номер 1, 62–71

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf626>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 14:15:26

МНОГОКОМПОНЕНТНОЕ ОБОБЩЕНИЕ ИЕРАРХИИ УРАВНЕНИЯ ЛАНДАУ–ЛИФШИЦА

Для произвольного N построена $2N$ -компонентная интегрируемая система второго порядка со спектральным параметром, лежащим на кривой рода $g = 1 + (N-3)2^{N-2}$. Потoki нечетного порядка допускают N -компонентные редукции, которые при $N = 3$ совпадают с потоками нечетного порядка из иерархии уравнения Ландау–Лифшица.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим уравнение

$$u_t = \left(u_{xx} + \frac{3}{2} \langle u_x, u_x \rangle u \right)_x + \frac{3}{2} \langle u, R(u) \rangle u_x, \quad \langle u, u \rangle = 1, \quad (1.1)$$

где $u = (u^1, \dots, u^N)$ – вектор-столбец размерности $N > 1$, имеющий длину единица, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – обычное скалярное произведение, R – некоторая постоянная симметрическая матрица. Как будет показано ниже, это уравнение является точно интегрируемым с помощью метода обратной задачи рассеяния для любых N и R . Фактически, не ограничивая общности, будем считать что $R = \text{diag}(r_1, \dots, r_N)$.

При $N = 2$ после тригонометрической параметризации окружности

$$u^1 = \frac{\text{tg}^2(s) - 1}{\text{tg}^2(s) + 1}, \quad u^2 = \frac{2 \text{tg}(s)}{\text{tg}^2(s) + 1}$$

уравнение (1.1) записывается в виде

$$s_t = s_{xxx} + 2s_x^3 + \frac{3}{4}((r_1 + r_2) + (r_1 - r_2) \cos(4s))s_x.$$

Последнее уравнение хорошо известно в теории точно интегрируемых систем [1].

* Уфимский педагогический институт, Уфа, Россия

† Центр нелинейных исследований при ИТФ им. Л. Д. Ландау, Москва, Россия.

E-mail: sokolov@landau.ac.ru

В случае $N = 3$ уравнение (1.1) совпадает с высшей симметрией (коммутирующим потоком) третьего порядка для уравнения Ландау–Лифшица

$$u_t = u \times u_{xx} + R(u) \times u, \quad |u| = 1. \quad (1.2)$$

В формуле (1.2) “ $\times$ ” означает векторное произведение. Из-за наличия связи $\langle u, u \rangle = 1$ потоки из иерархии уравнения Ландау–Лифшица могут быть записаны разными, внешне непохожими, способами. Впервые форма (1.1) для записи потока третьего порядка была использована в [2].

Уравнение Ландау–Лифшица является одной из наиболее известных моделей, которые были проинтегрированы методом обратной задачи рассеяния (см. [3, 4]). Гамильтониан для этого уравнения задается формулой

$$H = \langle u_x, u_x \rangle + \langle u, R(u) \rangle. \quad (1.3)$$

Нетрудно проверить, что для произвольного N функция (1.3) является плотностью закона сохранения для уравнения (1.1).

Спектральный параметр в представлении Лакса для уравнения Ландау–Лифшица лежит на алгебраической кривой рода $g = 1$. Для произвольного N спектральная кривая, как будет показано ниже, имеет вид

$$\lambda_1^2 + r_1 = \lambda_2^2 + r_2 = \dots = \lambda_N^2 + r_N. \quad (1.4)$$

В случае $N = 3$ такая запись эллиптической спектральной кривой для уравнения Ландау–Лифшица содержится в [5]. Эллиптические функции параметра λ , которые часто пишут в формулах, связанных с уравнением Ландау–Лифшица, возникают при параметризации этой кривой.

Можно проверить, что род g кривой (1.4) дается формулой

$$g = 1 + (N - 3)2^{N-2}.$$

Как сообщил нам А. В. Стояновский, при $N > 3$ кривая (1.4) (даже в вырожденном случае, когда некоторые элементы матрицы R совпадают) никогда не бывает гиперэллиптической. По-видимому, (1.1) – это первый пример уравнения, для которого соответствующая спектральная кривая имеет род, больший единицы. Отметим, что для уравнения Ландау–Лифшица известна пара Лакса [6], полиномиально зависящая от спектрального параметра. Вполне вероятно, что такая пара существует и для уравнения (1.1) в случае произвольного N .

Во втором разделе мы приводим представление Лакса для некоторой системы второго порядка относительно двух N -мерных векторов u и v таких, что $\langle u, v \rangle = 1$. Симметрия третьего порядка этой системы допускает редукцию $u = v$, которая и дает уравнение (1.1).

Для любого N уравнение (1.1) обладает симметриями всех нечетных порядков. При $N = 3$ происходит расширение алгебры симметрий: добавляются симметрии всех четных порядков. В разделе 3 дается объяснение этого явления. Здесь мы используем конструкцию из работы [7], трактуя (1.1) как уравнение на орбите некоторого полупростого элемента, а представление Лакса – как разложение $\mathbb{Z}$ -градуированной бесконечномерной алгебры Ли в сумму двух подалгебр.

2. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ

Нетрудно проверить, что система

$$\begin{aligned} u_t &= -u_{xx} - (\langle u, v_x \rangle u)_x - 2\langle v, R(u) \rangle u, \\ v_t &= v_{xx} + (\langle v, u_x \rangle v)_x + 2\langle v, R(u) \rangle v, \end{aligned} \quad \langle u, v \rangle = 1, \quad (2.1)$$

где R – произвольная постоянная матрица, u и v – векторы-столбцы размерности N , а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – обычное скалярное произведение, допускает представление Лакса

$$L_t = [A, L],$$

где

$$L = D_x + \begin{pmatrix} 0 & \Lambda u \\ v^T \Lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \Lambda u v^T \Lambda & \Lambda (u v^T)_x u \\ -v^T (u v^T)_x \Lambda & \lambda^{-2} + \langle v, R(u) \rangle \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Здесь матрица Λ удовлетворяет условию

$$\Lambda^2 = \frac{E}{\lambda^2} - R, \quad (2.3)$$

где E – единичная матрица, λ – спектральный параметр.

Легко видеть, что произвольная замена вида

$$u \rightarrow Tu, \quad v \rightarrow Tv,$$

где T – ортогональная матрица, оставляя форму системы (2.1) той же самой, преобразует матрицу R по правилу $R \rightarrow T^{-1}RT$, поэтому в случае, если R – симметрическая матрица, без ограничения общности можно считать, что

$$R = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_N), \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N),$$

где

$$\lambda_i = \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - \lambda^2 r_i}.$$

Простейшие плотности законов сохранения для системы (2.1) имеют вид

$$\rho_1 = \langle v, u_x \rangle, \quad \rho_2 = \langle u_x, v_x \rangle + \frac{3}{4} \langle v, u_x \rangle^2 + \langle v, R(u) \rangle.$$

Система (2.1) имеет симметрию третьего порядка

$$\begin{aligned} u_\tau &= \left(u_{xx} - \frac{3}{2} \langle v, u_x \rangle u_x + \left(\frac{3}{4} \langle v_x, u_x \rangle - \frac{3}{4} \langle v, u_{xx} \rangle + \frac{15}{8} \langle v, u_x \rangle^2 \right) u \right)_x + \\ &\quad + \frac{3}{2} (\langle v, R(u_x) \rangle - \langle v_x, R(u) \rangle - 2 \langle v, R(u) \rangle \langle v, u_x \rangle) u + \frac{3}{2} \langle v, R(u) \rangle u_x, \\ v_\tau &= \left(v_{xx} - \frac{3}{2} \langle u, v_x \rangle v_x + \left(\frac{3}{4} \langle u_x, v_x \rangle - \frac{3}{4} \langle u, v_{xx} \rangle + \frac{15}{8} \langle u, v_x \rangle^2 \right) v \right)_x + \\ &\quad + \frac{3}{2} (\langle v_x, R(u) \rangle - \langle v, R(u_x) \rangle - 2 \langle v, R(u) \rangle \langle u, v_x \rangle) v + \frac{3}{2} \langle v, R(u) \rangle v_x. \end{aligned}$$

Легко видеть, что редукция $u = v$ в последней системе приводит к уравнению (1.1).

3. УРАВНЕНИЯ НА ОРБИТЕ ЭЛЕМЕНТА α , УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕГО УСЛОВИЮ $\alpha^3 = \alpha$

Для того чтобы построить для системы (2.1) симметрии и законы сохранения, а также изучить редукции в полученной иерархии симметрий, покажем, как L - A -пара (2.2) описывается в терминах разложения некоторой $\mathbb{Z}$ -градуированной алгебры Ли $\mathfrak{G} = \bigoplus \mathfrak{G}_i$ в сумму двух подалгебр [7].

3.1. Общая схема. Пусть $\mathfrak{G}$ – множество рядов Лорана вида

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} g_i \lambda^i$$

относительно параметра λ с матричными коэффициентами размера $(N+1) \times (N+1)$ такими, что g_i для $i = 2j$ имеет структуру

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

а для $i = 2j+1$ –

$$\begin{pmatrix} 0 & u \\ v^T & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Здесь A – матрица размера $N \times N$, a – скаляр, а u и v – векторы. Легко видеть, что $\mathfrak{G}$ является $\mathbb{Z}$ -градуированной алгеброй Ли с градуировкой, соответствующей степеням λ .

Обозначим через $\alpha \in gl(N+1)$ матрицу

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Очевидно, что множество $\mathfrak{G}_0$ всех матриц вида (3.1) является подалгеброй Ли в $gl(N+1)$. Нетрудно проверить, что орбита матрицы α относительно сопряжений элементами группы Ли этой подалгебры имеет вид (3.2), где u и v – произвольные векторы, удовлетворяющие условию $\langle u, v \rangle = 1$. Поэтому система (2.1) может быть интерпретирована как уравнение на орбите элемента α .

Если алгебра $\mathfrak{G}$ разложена как векторное пространство в прямую сумму подалгебры всех рядов Тейлора $\mathfrak{G}_+$ и некоторой дополнительной подалгебры Ли $\mathfrak{G}_-$, то оператор L для соответствующего этому разложению уравнения на орбите элемента α имеет вид

$$L = D_x + q_-, \quad (3.4)$$

где “ $-$ ” означает проекцию на $\mathfrak{G}_-$ параллельно $\mathfrak{G}_+$,

$$q = \frac{1}{\lambda} T \alpha T^{-1}.$$

Здесь T – произвольный элемент группы Ли алгебры Ли $\mathfrak{G}_0$. В нашем конкретном случае

$$q = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} 0 & u \\ v^T & 0 \end{pmatrix}, \quad \langle u, v \rangle = 1.$$

Общая схема построения оператора A , коммутирующих потоков и плотностей законов сохранения для операторов L вида (3.4) содержится, например, в [7]. Однако среди рассмотренных там конкретных примеров отсутствует случай (3.3), характерный тем, что $\alpha^3 = \alpha$. Как видно из настоящей статьи, с матрицей α вида (3.3) связано несколько интересных и, по-видимому, новых интегрируемых векторных систем.

Одним из стандартных способов построения оператора Лакса A является следующий. Известно, что существуют единственные элементы

$$U = \sum_{i=1}^{\infty} U_i \lambda^i \quad \text{и} \quad V = \sum_{i=0}^{\infty} V_i \lambda^i$$

из $\mathfrak{G}_+$ такие, что

$$\exp(\text{ad } U)(L) = D_x + q + V, \quad [D_x + q + V, q] = 0. \quad (3.5)$$

Возьмем произвольный элемент β из центра $\text{Ker}(\text{ad } \alpha)$ и положим

$$A_\beta = \exp(-\text{ad } U)(T\beta T^{-1}).$$

Тогда операторное уравнение Лакса $L_t = [(A_\beta)_-, L]$ задает эволюцию элемента q_- . Из формулы $q_- = q - q_+$ следует, что

$$q_- \in \sum_{i=-1}^{\infty} \mathfrak{G}_i,$$

причем проекция q_- на $\mathfrak{G}_{-1}$ параллельно $\mathfrak{G}_+$ совпадает с q . Поэтому проецирование уравнения Лакса на компоненту $\mathfrak{G}_{-1}$ приводит к некоторому эволюционному уравнению вида

$$Q_t = F(Q, Q_x, \dots, \underbrace{Q_{x \dots x}}_k) \quad (3.6)$$

относительно матрицы $Q \in \mathfrak{G}_{-1}$, лежащей на орбите матрицы α .

Потоки, соответствующие разным элементам β , коммутируют между собой. Поэтому система (3.6) обладает бесконечной серией высших симметрий. Кроме того, если на $\mathfrak{G}$ имеется инвариантная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$, то система (3.6) обладает бесконечной серией высших локальных законов сохранения вида $\langle T\gamma T^{-1}, V \rangle$, где γ – произвольный постоянный элемент из центра $\text{Ker}(\text{ad } \alpha)$.

Система (2.1) с $R = 0$ соответствует стандартной дополнительной подалгебре $\mathfrak{G}_-$, состоящей из всех рядов вида $\sum_{i=-k}^{-1} g_i \lambda^i$. Будем называть эту систему уравнением Гайзенберга на орбите элемента α вида (3.3).

3.2. Алгебраическая интерпретация представления Лакса для системы (2.1). В случае матрицы R общего вида дополнительная подалгебра устроена значительно сложнее:

$$\mathfrak{G}_- = \left\{ \sum_{i=-n}^0 \lambda^{2i} \begin{pmatrix} \Lambda A_i \Lambda & \Lambda u_i \\ v_i^T \Lambda & \lambda^{-2} a_i + \text{tr}(R A_i) \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}.$$

В этой формуле предполагается, что матрица

$$\Lambda = \frac{1}{\lambda} \sqrt{E - \lambda^2 R} = \frac{E}{\lambda} + \dots$$

разложена в ряд Лорана в нуле.

Высшие симметрии четного порядка системы (2.1) соответствуют матрицам β , коммутирующим со всеми рядами, с которыми коммутирует α , и имеющим вид (3.1). Для симметрий нечетного порядка матрица β должна иметь вид (3.2). Как легко проверить, всякая такая матрица вида (3.2) пропорциональна α . В случае же, если β имеет вид (3.1), она (с точностью до прибавления тривиальной скалярной матрицы) пропорциональна α^2 . Таким образом, система (2.1) имеет по одной высшей симметрии в каждом порядке.

В случае редукции $u = v$ ситуация меняется. Алгебраическое описание этой редукции состоит в следующем. $\mathbb{Z}$ -градуированная алгебра Ли $\mathfrak{G}$ состоит из рядов, в которых на коэффициенты, кроме (3.1), (3.2), наложено дополнительное требование: матрицы g_{2j} должны быть кососимметричны, а g_{2j+1} – симметричны. Теперь орбита матрицы α состоит из матриц (3.2), где $u = v$ и $|u| = 1$.

Допустимые матрицы $\beta \in \text{Ker}(\text{ad } \alpha)$, задающие симметрии нечетных порядков, по-прежнему пропорциональны α . Поскольку матрица α^2 не является кососимметричной, соответствующие симметрии четного порядка системы (2.1) не допускают редукции $u = v$. Однако, поскольку мы сузили алгебру рядов $\mathfrak{G}$, в принципе могли появиться новые матрицы β , принадлежащие $\text{Ker}(\text{ad } \alpha)$. Нетрудно проверить, что это происходит только в случае $N = 3$. При этом соответствующая матрица

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

задает серию симметрий четных порядков, младшей из которых и является уравнение Ландау–Лифшица (1.2).

3.3. Еще одно векторное нелинейное уравнение Шредингера. Кроме описанных выше уравнений, на орбите элемента α вида (3.3) с этим элементом связана некоторая система типа уравнения Шредингера, калибровочно-эквивалентная уравнению

(2.1) с $R = 0$. Соответствующий оператор L имеет вид

$$L = D_x + \lambda^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -w & u_1 & \dots & u_{N-1} & 0 \\ v_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{N-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & w \end{pmatrix}.$$

Меняя λ^{-1} на λ , перепишем оператор L в виде

$$L = D_x + \begin{pmatrix} -w & u^T & \lambda \\ v & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & w \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

где u и v – векторы-столбцы размера $N - 1$.

Оператор A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda^2 & -u_x^T - wu^T & 0 \\ v_x - wv & vu^T & \lambda v \\ 0 & \lambda u^T & \lambda^2 - u^T v \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

а соответствующее уравнение Лакса $L_t = [A, L]$ эквивалентно системе

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + (w_x - w^2)u - \langle u, v \rangle u, \\ v_t &= -v_{xx} + (w_x + w^2)v + \langle u, v \rangle v, \\ w_t &= \langle u, v \rangle_x. \end{aligned}$$

В отличие от двух известных векторных обобщений нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) [8, 9] наша система имеет нечетное число неизвестных, которые образуют два вектора u и v размера $N - 1$ и один скаляр w .

Согласно общей схеме из работы [10] эта система имеет коммутирующие потоки всех порядков. Нечетные потоки допускают редукцию $u = v$, $w = 0$. Поток третьего порядка после редукции имеет вид

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2} \langle u, u \rangle u_x,$$

т.е. совпадает с одним из двух известных векторных модифицированных уравнений Кортевега–де Фриза (КдФ) [9]. При $N = 3$ из-за наличия дополнительного элемента (3.7) это векторное модифицированное уравнение КдФ обладает симметриями не только нечетных, но и четных порядков, причем симметрия второго порядка (с точностью до линейной замены) совпадает с обычным НУШ.

4. ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ

Обычно гамильтонова структура определяется на конечномерном многообразии, состоящем из всех операторов L заданного вида. Нам не известны гамильтоновы структуры такого рода для системы (2.1). Однако, как мы покажем ниже, эту систему можно получить как конечномерную редукцию бесконечномерного уравнения вида

$$p_t = [(\text{grad}_p(H))_+, p]_-, \quad (4.1)$$

где как p , так и $\text{grad}_p(H)$ являются некоторыми рядами по параметру λ .

Наша гамильтонова структура годится для любой дополнительной подалгебры $\mathfrak{G}_-$ и является бесконечномерным аналогом первой гамильтоновой структуры [11]. Аналог второй гамильтоновой структуры для уравнения Ландау–Лифшица был рассмотрен в работе [12]. При этом вместо формальных рядов по параметру λ приходится рассматривать центральное расширение алгебры аналитических функций на соответствующей спектральной кривой.

Определим на $\mathfrak{G}$ инвариантную билинейную форму ω стандартным образом: если $X = \sum X_i$, $Y = \sum Y_i$, то

$$\omega(X, Y) = \int \sum_i \text{tr}(X_i Y_{-i}).$$

Обозначим через $\mathfrak{G}_+^o$ и $\mathfrak{G}_-^o$ ортогональные дополнения к $\mathfrak{G}_+$ и $\mathfrak{G}_-$.

Поскольку подалгебры $\mathfrak{G}_+$ и $\mathfrak{G}_-$ не являются изотропными, для введения необходимой гамильтоновой структуры следует расширить основную алгебру $\mathfrak{G}$. Для этого рассмотрим дубль $\mathfrak{A} = \mathfrak{G} + \epsilon \mathfrak{G}$, где $\epsilon^2 = 0$. Положим $\mathfrak{A}_+ = \mathfrak{G}_+ + \epsilon \mathfrak{G}_+^o$ и $\mathfrak{A}_- = \mathfrak{G}_- + \epsilon \mathfrak{G}_-^o$.

Введем на $\mathfrak{A}$ билинейную форму Ω формулой

$$\Omega(a + \epsilon b, c + \epsilon d) = \omega(a, d) + \omega(b, c).$$

Легко видеть, что относительно этой формы $\mathfrak{A}_+$ и $\mathfrak{A}_-$ являются изотропными подалгебрами. При этом

$$\Omega(p_+, q) = \Omega(p, q_-). \quad (4.2)$$

Зададим на функционалах, определенных на $\mathfrak{A}$, скобку Пуассона формулой

$$\{\phi, \psi\}(p) = \Omega([\text{grad}_p \phi_+, \text{grad}_p \psi_+], p). \quad (4.3)$$

Здесь “+” означает проекцию на $\mathfrak{A}_+$ параллельно $\mathfrak{A}_-$, градиент, как обычно, определяется формулой

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \phi(p + \epsilon q) \right|_{\epsilon=0} = \Omega(\text{grad}_p \phi, q).$$

Поскольку $\mathfrak{A}_+$ – подалгебра, то $[X_+, Y_+]$ – лиева операция на $\mathfrak{A}$. Поэтому соответствующая скобка Кириллова (4.3) удовлетворяет тождеству Якоби.

Для того чтобы проверить, что уравнение (4.1) является гамильтоновым относительно скобки (4.3), достаточно воспользоваться инвариантностью формы Ω и тождеством (4.2).

Построим иерархию коммутирующих гамильтонианов для системы (2.1). Положим

$$H_i(p) = -\Omega(\exp(\operatorname{ad} U)(D_x + p) - D_x, \lambda^{-i} p_{-1}^i).$$

Здесь

$$p = \sum_{i=-m}^{\infty} \lambda^i p_i,$$

ряд U определяется формулой (3.5), где $q = p_{-1}\lambda^{-1}$.

Легко проверить, что гамильтонианы $H_i(q_-)$ совпадают с законами сохранения уравнения (2.1), построенными в п. 3.1. Аналогично доказательству предложения 1.9 из работы [11] доказывается, что уравнение (4.1) для гамильтониана $H_i(p)$ допускает редукцию $p = q_-$. Эта редукция записывается в виде

$$(q_-)_t = [q_-, (A_\beta)_+]_-, \quad (4.4)$$

где $\beta = \alpha^i \lambda^{-i}$. Уравнение (4.4) равносильно уравнению Лакса $L_t = [(A_\beta)_-, L]$ из п. 3.1, поскольку

$$(q_-)_t = L_t = [(A_\beta)_-, L] = [q_-, (A_\beta)_+] + ((A_\beta)_+)_x = [q_-, (A_\beta)_+]_-.$$

В последней цепочке формул мы пользовались тем, что $[A_\beta, L] = 0$ и $q_- \in \mathfrak{G}_-$.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Можно проверить, что в результате разрешения связи $|u| = 1$ с помощью стереографической проекции

$$u_i = \frac{2p^i}{1 + \langle p, p \rangle}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad u_N = \frac{1 - \langle p, p \rangle}{1 + \langle p, p \rangle},$$

где p – вектор размера $N-1$ с компонентами $p^1, \dots, p^{N-1}$, уравнение (1.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} p_t = & p_{xxx} - 6\langle p, p_x \rangle \Delta^{-1} p_{xx} + \\ & + (-6\langle p, p_{xx} \rangle \Delta^{-1} + 24\langle p, p_x \rangle^2 \Delta^{-2} - 6\langle p, p \rangle \langle p_x, p_x \rangle \Delta^{-2}) p_x + \\ & + (6\langle p_x, p_{xx} \rangle \Delta^{-1} - 12\langle p, p_x \rangle \langle p_x, p_x \rangle \Delta^{-2}) p + \\ & + \frac{3}{2} \left(r_N + 4\Delta^{-2} \sum_{i=1}^{N-1} (r_i - r_N) p_i^2 \right) p_x, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $\Delta = 1 + \langle p, p \rangle$.

Записанное покомпонентно, это уравнение принадлежит к классу систем вида

$$p_t^i = p_{xxx}^i + \alpha_{jk}^i(\vec{p}) p_x^j p_{xx}^k + \beta_{jks}^i(\vec{p}) p_x^j p_x^k p_x^s + A_j^i(\vec{p}) p_x^j.$$

Этот класс замкнут относительно произвольных преобразований $p \rightarrow \vec{F}(p)$, а функции α_{jk}^i и A_j^i меняются как компоненты аффинной связности и аффинора соответственно. Функции β_{jkm}^i выражаются через компоненты связности и некоторый тензор σ_{jkm}^i , который, как показано Свинолуповым и Соколовым (см. [13]), в интегрируемых случаях ковариантно-постоянен. При отсутствии кручения (что справедливо, например, для системы (5.1)) для интегрируемых случаев пространство аффинной связности обязательно является симметрическим.

Интересно было бы изучить для системы (5.1) геометрические свойства аффинора A_j^i и описать в геометрических терминах его связь с объектами, упомянутыми выше.

Благодарности. Авторы благодарны П. Г. Гриневичу и А. В. Стояновскому за полезные обсуждения и А. Б. Шабату за внимание к работе. Работа была поддержана РФФИ (грант № 99-01-00294) и INTAS (грант № 1782).

Список литературы

- [1] A. Degasperis, F. Calogero. Reduction technique for matrix nonlinear evolution equations solvable by the spectral transform. Preprint № 151. Roma: Istituto di Fisica, Univ. di Roma, 1979.
- [2] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa. J. Phys. A. 1983. V. 16. P. 221–236.
- [3] Е. К. Склянин. О полной интегрируемости уравнения Ландау–Лифшица. Препринт ЛОМИ № Е-3. Л.: ЛОМИ, 1979.
- [4] А. Е. Боровик. Письма в ЖЭТФ. 1978. Т. 28. № 10. С. 629–632.
- [5] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [6] L. A. Bordag, A. B. Yanovski. J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 4007–4013.
- [7] И. З. Голубчик, В. В. Соколов. ТМФ. 1999. Т. 120. № 2. С. 248–255.
- [8] С. В. Манаков. ЖЭТФ. 1973. Т. 65. С. 505–516.
- [9] С. И. Свинолупов, В. В. Соколов. ТМФ. 1994. Т. 100. № 2. С. 214–218.
- [10] И. З. Голубчик, В. В. Соколов. ТМФ. 1997. Т. 112. № 3. С. 375–383.
- [11] В. Г. Дринфельд, В. В. Соколов. Алгебра Ли и уравнения типа Кортевега-де Фриза. В сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 24. Ред. Р. В. Гамкрелидзе. М.: ВИНТИ, 1984. С. 81–180.
- [12] А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тянь-Шанский. Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1986. Т. 150. С. 104–118.
- [13] I. T. Habibullin, V. V. Sokolov, R. I. Yamilov. Multi-component integrable systems and nonassociative structures. In: Nonlinear physics: Theory and Experiment. Eds. E. Alfinito, M. Boiti, L. Martina, F. Pempinelli. Singapore: World Sci. Publ., 1996. P. 139–168.

Поступила в редакцию 31.I.2000 г.