Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Белоусов, Р. С. Исмагилов, Задача Паули и связанные с ней математические вопросы, *ТМФ*, 2008, том 157, номер 1, 3–7

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6260>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 10:44:16

© 2008 г.

П. А. Белоусов*, Р. С. Исмагилов*

ЗАДАЧА ПАУЛИ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

Сформулировано несколько математических модификаций задачи Паули о возможности восстановления состояния частицы по результатам измерения ее координат и импульсов, в том числе и наиболее абстрактная постановка для двух проекционных мер. Описано, как задача Паули сводится к проблеме поиска собственных векторов некоторых операторов. Проведенный анализ является введением в проблематику, связанную с модификациями пар Паули, и предполагает дальнейшую проработку затронутых тем и сформулированных задач.

Ключевые слова: задача Паули, задача восстановления состояния, теория возмущений.

ВВЕДЕНИЕ

В первом разделе настоящей работы сформулирована задача Паули, ее обобщения и модификации. Во втором разделе описан способ сведения задачи Паули к проблеме поиска собственных векторов некоторых операторов. В третьем разделе для одного частного случая предложен способ решения этой проблемы методом теории возмущений. Мы полагаем, что все излагаемые ниже модификации задачи Паули заслуживают изучения и развития. Этому будут посвящены дальнейшие публикации.

1. ЗАДАЧА ПАУЛИ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ

1.1. Задача Паули. Пусть $L_2(\mathbb{R}^n)$ – обычное комплексное гильбертово пространство функций со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Преобразование Фурье определено формулой

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-isx} dx, \quad f \in L_2(\mathbb{R}^n).$$

*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия. E-mail: pavelbel@mail.ru, ismagil@serv.bmstu.ru

Назовем *парой Паули* пару элементов $f, g \in L_2(\mathbb{R}^n)$ со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} (f, f) &= (g, g) = 1; \\ |f(x)| &= |g(x)| \text{ при } x \in \mathbb{R}^n \pmod{0}; \\ |\hat{f}(s)| &= |\hat{g}(s)| \text{ при } s \in \mathbb{R}^n \pmod{0}; \\ \text{пара } f, g &\text{ линейно независима.} \end{aligned}$$

Запись $x \in \mathbb{R}^n \pmod{0}$ означает, что x пробегает множество полной меры в $\mathbb{R}^n$.

Существуют ли пары Паули? В этом и состоит задача Паули, сформулированная (в несколько иной форме) в учебнике “Handbuch der Physik”. Дальнейшая история вопроса описана в заметке Мороза и Переломова [1].

Заметим, что построить примеры пар Паули совсем нетрудно. Это сделано в [1], где указан следующий простой класс примеров (для упрощения ограничимся функциями одной переменной). Возьмем точку $a \in \mathbb{R}$ и вещественные измеримые функции $\rho(x)$, $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\begin{aligned} \rho \in L_2(\mathbb{R}), \quad \rho \neq 0, \quad \rho(x) \geq 0, \quad \rho(x) = \rho(a - x), \\ e^{i(\varphi(x) + \varphi(a - x))} \neq \text{const}, \quad x \in \mathbb{R} \pmod{0}. \end{aligned}$$

Тогда функции $f(x) = \rho(x)e^{i\varphi(x)}$ и $g(x) = \rho(x)e^{-i\varphi(a-x)}$ образуют пару Паули.

В [1] была выдвинута гипотеза, что описанная конструкция исчерпывает все пары Паули. Однако в работе [2] указаны пары Паули, имеющие иное происхождение. Описание всех пар Паули до сих пор является нерешенной задачей. Квантовомеханическое истолкование задачи Паули достаточно прозрачно (мы снова полагаем $n = 1$): можно ли найти пару состояний квантовомеханической системы, в которой наблюдаемые координаты и импульса имеют одинаковые плотности?

Переходим к обобщениям и модификациям задачи Паули.

1.2. Задача Паули с заданными фазовыми функциями. Возьмем измеримые непостоянные функции $\alpha(x), \beta(s)$, $x, s \in \mathbb{R}^n$, такие, что $|\alpha(x)| = |\beta(s)| = 1$ при $x \in \mathbb{R}^n$. Парой Паули с заданными фазовыми функциями назовем такую пару $f, g \in L_2(\mathbb{R}^n)$, что

$$\begin{aligned} (f, f) &= (g, g) = 1; \\ g(x) &= f(x)\alpha(x) \text{ при } x \in \mathbb{R}^n; \\ \hat{g}(s) &= \hat{f}(s)\beta(s) \text{ при } s \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

В работе [2] задача отыскания таких пар решена для “гауссовых” фаз $\alpha(x) = e^{i(ax, x)}$, $\beta(s) = e^{i(bs, s)}$, где a, b – вещественные симметрические матрицы порядка n . При некоторых ограничениях на матрицы a и b построены все пары Паули с указанными фазами; это построение опирается на теорию представлений симплектической группы. При этом другие фазовые функции не рассматривались.

1.3. “Абстрактная” задача Паули. Пусть H – комплексное гильбертово пространство, X – множество с фиксированной σ -алгеброй $\mathfrak{B}$ подмножеств, называемых, как обычно, измеримыми. Пусть каждому $E \in \mathfrak{B}$ поставлен в соответствие ортогональный проектор $P(E)$, действующий в H , причем $P(\emptyset) = 0$, $P(X) = I$ (так обозначен тождественный оператор в H) и $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$, $P(E_1) \times P(E_2) = 0$ при $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. В этом случае говорят, что на X задано разложение

единицы (или проекционная мера) $P(E)$. Для упрощения предположим дополнительно, что существует такой $h \in H$, что семейство векторов $P(E)h$ полно в H ; тогда h называется порождающим элементом, а наше разложение единицы имеет (по определению) простой спектр. При указанном ограничении существует унитарный изоморфизм $H \simeq L_2(X, \tau)$ (здесь τ – мера на X), переводящий любой оператор $P(E)$ в умножение на $\chi_E(x)$ ($\chi_E(x)$ – индикатор множества E). Для любого $\psi \in H$, $\|\psi\| = 1$, определена вероятностная мера $E \mapsto (P(E)\psi, \psi)$; обозначим ее через τ_ψ^P . Ее плотность определена равенством $p_\psi^P = d\tau_\psi^P/d\tau$. Если при указанном изоморфизме вектор ψ переходит в функцию $\tilde{\psi}(x)$, $x \in X$, то эта плотность совпадает с $|\tilde{\psi}(x)|^2$ почти всюду (по мере τ) на X .

После этих предварительных определений мы готовы описать “абстрактную” задачу Паули. Пусть даны два разложения единицы $P(E)$ и $Q(F)$ на пространствах X и Y . Тогда существуют унитарные изоморфизмы $H \simeq L_2(X, \tau)$ и $H \simeq L_2(Y, \theta)$, где τ и θ – меры на X и Y соответственно. Для любого $\psi \in H$, $\|\psi\| = 1$, определены плотности p_ψ^P и p_ψ^Q . Задача заключается в восстановлении вектора (состояния) ψ по этим двум плотностям. Удобно разбить эту задачу на две задачи. Чтобы описать их, обозначим через $\mathfrak{P}(H, P, Q)$ множество всех пар (p_ψ^P, p_ψ^Q) , соответствующих всевозможным состояниям $\psi \in H$, $\|\psi\| = 1$; назовем $\mathfrak{P}(H, P, Q)$ *множеством Паули*.

Задача 1. Описать множество Паули.

Задача 2. Дать обзор таких линейно-независимых пар состояний ψ_1, ψ_2 (“пар Паули”), которые переходят в один и тот же элемент множества Паули при описанном отображении $S(H) \rightarrow \mathfrak{P}(H, P, Q)$; здесь $S(H)$ означает множество состояний в H . Ясно, что исходная задача Паули из п. 1.1 является частным случаем задачи 2.

2. СВЕДЕНИЕ АБСТРАКТНОЙ ЗАДАЧИ ПАУЛИ К ЗАДАЧЕ НА СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ УНИТАРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Покажем, что задача 2 сводится к задаче о собственных векторах некоторых унитарных операторов. С этой целью обозначим через A_X и A_Y слабо замкнутые алгебры операторов в H , порожденные проекционными мерами $P(E)$, $E \in \mathfrak{B}_X$, и $Q(F)$, $F \in \mathfrak{B}_Y$. При изоморфизме $H \simeq L_2(X, \tau)$, переводящем $P(E)$ в умножение на индикатор множества E , алгебра A_X переходит в алгебру операторов умножения на всевозможные измеримые функции, ограниченные на множестве полной меры. Аналогичным образом реализуется алгебра A_Y при изоморфизме $H \simeq L_2(Y, \theta)$.

Пусть векторы ψ_1 и ψ_2 переходят в один и тот же элемент множества $\mathfrak{P}(H, P, Q)$. Это означает, что при унитарном изоморфизме $H \simeq L_2(X, \tau)$ они переходят в функции $\tilde{\psi}_1(x)$, $\tilde{\psi}_2(x)$, $x \in X$, такие, что $|\tilde{\psi}_1(x)| = |\tilde{\psi}_2(x)|$ (почти всюду по мере τ), а при изоморфизме $H \simeq L_2(Y, \theta)$ – в функции $\tilde{\tilde{\psi}}_1(y)$, $\tilde{\tilde{\psi}}_2(y)$, $y \in Y$, такие, что $|\tilde{\tilde{\psi}}_1(y)| = |\tilde{\tilde{\psi}}_2(y)|$ (почти всюду по мере θ). Но тогда должны существовать такие измеримые функции $u(x)$, $x \in X$, и $v(y)$, $y \in Y$, что $|u(x)| = 1$ (почти всюду по мере τ) и $|v(y)| = 1$ (почти всюду по мере θ), причем $\tilde{\psi}_2(x) = u(x)\tilde{\psi}_1(x)$ и $\tilde{\tilde{\psi}}_1(y) = v(y)\tilde{\tilde{\psi}}_2(y)$ (почти всюду по соответствующим мерам). Возвращаясь от $L_2(X, \tau)$ и $L_2(Y, \theta)$ к H , получим следующее: существуют такие унитарные операторы $U \in A_X$ и $V \in A_Y$,

что $\psi_2 = U\psi_1$, $\psi_1 = V\psi_2$ и, таким образом, $UV\psi_2 = \psi_2$. Для дальнейших рассуждений удобнее записать более общее соотношение $UV\psi = \lambda\psi$, где $\psi \in H$, $\|\psi\| = 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, $U \in A_X$, $V \in A_Y$. Эти рассуждения без труда могут быть обращены.

Итак, доказана следующая теорема, дающая основной метод изучения задачи Паули.

ТЕОРЕМА. Пусть даны два унитарных оператора $U \in A_X$, $V \in A_Y$ и собственный вектор ψ оператора UV , причем этот вектор не является собственным ни для U , ни для V по отдельности. Тогда $(\psi; V\psi)$ есть пара Паули. Верно и обратное: любая пара Паули получается указанным способом при некоторых операторах $U \in A_X$ и $V \in A_Y$.

Авторам не известен ответ на вопрос, для любых ли двух разложений единицы существуют пары Паули. В следующем разделе дан метод построения пар Паули в одном важном частном случае.

3. СЛУЧАЙ ПРОЕКЦИОННОЙ МЕРЫ НА ПРОСТРАНСТВЕ С “АТОМОМ”

Пусть одна из проекционных мер, скажем $P(E)$, имеет “атом” x_0 , т.е. точку, мера которой больше нуля: $\tau(x_0) > 0$, где τ – такая мера на X , что $H \simeq L_2(X, \tau)$. Тогда $P(x_0)$ – одномерный проектор на некоторое одномерное подпространство с базисом e_0 . При изоморфизме $H \simeq L_2(X, \tau)$ получим

$$(P(x_0)f)(x) = \begin{cases} f(x_0), & x = x_0, \\ 0, & x \neq x_0. \end{cases}$$

Обратимся к операторной алгебре A_Y . При изоморфизме $H \simeq L_2(Y, \theta)$ она переходит в умножение на измеримые ограниченные (mod 0) функции. Наложим следующее ограничение: вектор e_0 не является собственным ни для одного из операторов $A \in A_Y$ (за исключением операторов, кратных тождественному). Это условие достаточно естественно и выполняется во всех представляющих интерес случаях.

Теперь построим пару Паули. Для этого достаточно согласно теореме указать унитарные операторы $U \in A_X$, $V \in A_Y$ и вектор $\psi \in H$, $\|\psi\| = 1$, такие, что выполняются условия теоремы. Начнем с выбора оператора U . Для этого обратимся к реализации пространства H в виде $L_2(X, \tau)$. Возьмем произвольную измеримую функцию $u(x)$, $|u(x)| = 1$, $x \in X$, подчиненную ограничению $|u(x) - u(x_0)| > \varepsilon$ для почти всех $x \in X \setminus \{x_0\}$ и некоторого $\varepsilon > 0$. Другими словами, число $u(x_0)$ есть изолированная точка в множестве значений функции $u(x)$. Оператор умножения на эту функцию перейдет (возвращаясь из $L_2(X, \tau)$ в H) в унитарный оператор $U \in A_X$.

Обратимся к выбору оператора V . Возьмем в качестве V любой унитарный оператор из A_Y такой, что $\|V - I\| < \varepsilon/2$, $V \neq \lambda I$. При изоморфизме $H \simeq L_2(X, \tau)$ ему соответствует измеримая функция $v(y)$, $|v(y)| = 1$ (почти всюду на Y) такая, что $|v(y) - 1| < \varepsilon/2$ для почти всех $y \in Y$. Покажем, что указанная пара операторов удовлетворяет условиям, описанным в теореме.

Положим $K = V - I$. Тогда $UV = U + UK$ и $\|UK\| < \varepsilon/2$. Таким образом, оператор UV есть “малое” возмущение оператора U . С другой стороны, $Ue_0 = \beta_0 e_0$, где $\beta_0 = u(x_0)$. Согласно выбору функции $u(x)$ точка β_0 есть изолированная точка спектра оператора U , точнее, это единственная точка спектра этого оператора в круге $\{\lambda: |\lambda - \beta_0| < \varepsilon\}$. В соответствии с общими теоремами теории возмущений [3] для любого линейного оператора T такого, что $\|T\| < \varepsilon/2$, оператор $U + T$ имеет собственный вектор $e(T)$ с собственным значением $\lambda(T)$, причем $e(T)$ и $\lambda(T)$ голоморфно зависят от T , $\lambda(0) = \beta_0$, $e(0) = e_0$.

Итак, оператор UV имеет собственный вектор $e(UK)$ с собственным значением $\lambda(UK)$ (для краткости будем писать $e_1(K)$ и $\lambda_1(K)$), причем $|\lambda_1(K) - \beta_0| < \varepsilon/2$. Покажем, что $e_1(K)$ не может быть собственным для U . Действительно, если допустить противное, то $\lambda_1(K) = \beta_0$ (ибо β_0 – единственная точка спектра U в круге $\{\lambda: |\lambda - \beta_0| < \varepsilon\}$) и $e_1(K) = ce_0$, $c \neq 0$. Но тогда вектор e_0 будет собственным и для V , что невозможно в силу введенного ранее ограничения. В итоге получим пару Паули $e_1(K)$, $Ve_1(K)$.

Подчеркнем, что указанные в ходе рассуждений функции $u(x)$, $v(y)$ – это фазовые функции для задачи Паули (о них сказано в разделе 1). Мы видим, что пары Паули существуют для любых фазовых функций $u(x)$, $v(y)$, если только для почти всех $x \in X \setminus \{x_0\}$ выполняется $|u(x) - u(x_0)| > \varepsilon$, а для почти всех $y \in Y$ выполняется $|v(y) - 1| < \varepsilon/2$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предлагаемой работе сформулирован ряд математических модификаций задачи Паули (п. 1.1), в том числе и наиболее абстрактная постановка для двух проекционных мер. Описано, как задача Паули сводится к проблеме отыскания собственных векторов унитарных операторов. Для важного частного случая, когда одна из мер имеет изолированную точку, доказана теорема существования пар Паули.

Мы остановились только на задаче 2. Некоторым аспектам задачи 1 будет посвящена статья первого из авторов. Отметим, что задачи 1, 2 представляют собой ответвление от обширного круга задач квантовой механики, связанных с восстановлением состояния (чистого или смешанного) по известным распределениям некоторых наблюдаемых (так называемая “квантовая томография”, см. работу [4] и ссылки в ней).

Список литературы

- [1] Б. З. Мороз, А. М. Переломов, *ТМФ*, **101:1** (1994), 60–65.
- [2] Р. С. Исмаилов, *Функц. анализ и его прил.*, **30:2** (1996), 82–84.
- [3] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [4] L.M. Artiles, R. D. Gill, M.I. Gutză, *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.*, **67:1** (2005), 109–134.