Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Смирнов, Системы $sl(2, \mathbb{C})$ -волчков как системы двух частиц, *ТМФ*, 2008, том 157, номер 1, 8–21

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6261>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 11:56:43

© 2008 г.

А. В. Смирнов*

СИСТЕМЫ $sl(2, \mathbb{C})$ -ВОЛЧКОВ КАК СИСТЕМЫ ДВУХ ЧАСТИЦ

Показано, что волчки Эйлера–Арнольда на алгебре $sl(2, \mathbb{C})$ эквивалентны системам двух частиц типа систем Калоджеро. Показано, что произвольный квадратичный гамильтониан $sl(2, \mathbb{C})$ -волчка действием группы автоморфизмов алгебры может быть приведен к одному из трех канонических гамильтонианов. Для каждого канонического гамильтониана получена соответствующая система двух частиц и явно выписаны формулы бозонизаций коприсоединенных орбит. Обсуждается связь полученных формул с нединамическими R -матрицами Антонова–Забродина–Хасегавы для систем Калоджеро–Сазерленда.

Ключевые слова: интегрируемые системы, волчки Эйлера–Арнольда, системы Калоджеро–Мозера.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известными примерами волчков Эйлера–Арнольда являются так называемые XYZ -, XXZ - и XXX -волчки. Операторы Лакса $L(z)$ для XYZ -, XXZ - и XXX -волчков строятся из уравнения на линейные скобки Пуассона

$$\{L(z) \otimes 1, 1 \otimes L(z)\} = [r, 1 \otimes L(z) + L(z) \otimes 1],$$

где r – соответственно эллиптическая, тригонометрическая и рациональная классическая r -матрица Бакстера для алгебры $sl(2, \mathbb{C})$. Гамильтониан волчка определяется свободным членом в разложении $\text{Tr } L^2(z)$ по спектральному параметру z .

В работе [1] в рамках похода Хитчина к интегрируемым системам [2]–[5] была установлена связь между эллиптическим $sl(2, \mathbb{C})$ -волчком и эллиптической системой Калоджеро–Мозера для двух частиц. Было показано, что операторы Лакса этих систем $L_{\text{ell}}^{\text{top}}(z)$ и $L_{\text{ell}}^{\text{CM}}(z)$ связаны сингулярным калибровочным преобразованием вида

$$L_{\text{ell}}^{\text{top}}(z) = \Xi(z) L_{\text{ell}}^{\text{CM}}(z) \Xi^{-1}(z), \quad (1)$$

где матрица $\Xi(z)$ является вырожденной в точке $z = 0$. Из уравнения (1) были получены так называемые формулы бозонизаций соответствующих коприсоединенных

*Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: asmirnov@itep.ru

орбит, которые явно описывают симплектоморфизм между двумя системами:

$$\begin{aligned} S_1 &= -\frac{\theta_{10}(0)\theta_{10}(2q)}{\vartheta'(0)\vartheta(2q)}p + \frac{\theta_{10}^2(0)\theta_{00}(2q)\theta_{01}(2q)}{\theta_{00}(0)\theta_{01}(0)\vartheta^2(2q)}\nu, \\ S_2 &= \frac{\theta_{00}(0)\theta_{00}(2q)}{i\vartheta'(0)\vartheta(2q)}p - \frac{\theta_{00}^2(0)\theta_{10}(2q)\theta_{01}(2q)}{i\theta_{10}(0)\theta_{01}(0)\vartheta^2(2q)}\nu, \\ S_3 &= -\frac{\theta_{01}(0)\theta_{01}(2q)}{\vartheta'(0)\vartheta(2q)}p + \frac{\theta_{01}^2(0)\theta_{00}(2q)\theta_{10}(2q)}{\theta_{00}(0)\theta_{10}(0)\vartheta^2(2q)}\nu, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\vartheta(q)$ и $\theta_{\alpha\beta}(q)$ – стандартная эллиптическая тета-функция и тета-функция с характеристиками соответственно. Относительно стандартной пуассоновой структуры $\{p, q\} = 1$ функции (2) обладают правильными коммутационными соотношениями

$$\{S_i, S_j\} = 2i\epsilon_{ijk}S_k.$$

Эта связь между двумя системами, очевидно, должна переноситься на тригонометрический и рациональный случаи, однако получить тригонометрический предел уравнения (1) просто путем стремления модулярного параметра к мнимой бесконечности ($\tau \rightarrow i\infty$) невозможно, поскольку матричные элементы $\Xi(z)$ в этом пределе расходятся. Можно получить решение данной проблемы, применяя к уравнению (1) некоторое калибровочное преобразование, матрица которого сама зависит от модулярного параметра, $A = A(\tau)$, и является при этом сингулярной в точке $\tau = i\infty$ [6]:

$$A(\tau)L_{\text{ell}}^{\text{top}}(z)A^{-1}(\tau) = A(\tau)\Xi(z)L_{\text{ell}}^{\text{CM}}(z)\Xi^{-1}(z)A^{-1}(\tau).$$

Переходя к пределам

$$\begin{aligned} L_{\text{trig}}^{\text{top}}(z) &= \lim_{\tau \rightarrow i\infty} A(\tau)L_{\text{ell}}^{\text{top}}(z)A^{-1}(\tau), \\ \Xi'(z) &= \lim_{\tau \rightarrow i\infty} A(\tau)\Xi(z), \quad L_{\text{trig}}^{\text{CM}}(z) = \lim_{\tau \rightarrow i\infty} L_{\text{ell}}^{\text{CM}}(z), \end{aligned}$$

получаем тригонометрическую версию уравнения (1):

$$L_{\text{trig}}^{\text{top}}(z) = \Xi'(z)L_{\text{trig}}^{\text{CM}}(z)\Xi'^{-1}(z). \quad (3)$$

При этом, в силу того что матрица A вырождена в точке $\tau = i\infty$, новый тригонометрический оператор Лакса $L_{\text{trig}}^{\text{top}}(z)$ не является калибровочно-эквивалентным стандартному

$$L_{\text{trig}}^{\text{top}}(z) = \lim_{\tau \rightarrow i\infty} L_{\text{ell}}^{\text{top}}(z)$$

и определяет совершенно другую динамическую систему на коприсоединенной орбите алгебры $sl(2, \mathbb{C})$. Таким образом, помимо стандартных XXZ - и XXX -волчков существуют не эквивалентные им тригонометрические и рациональные вырождения эллиптического волчка. Эти волчки описывают движение соответственно тригонометрической и рациональной систем Калоджеро. Далее мы будем называть эти волчки XXZ' - и XXX' -волчками.

В данной работе мы показываем, что произвольный волчок на алгебре $sl(2, \mathbb{C})$ может быть описан одним из трех приведенных ниже гамильтонианов. Мы представляем простой способ построения формул бозонизации для произвольного волчка без

применения аппарата алгебраической геометрии. При этом оказывается, что бозонизации, соответствующие каноническим видам гамильтонианов, отображают волчки в системы Калоджеро. Таким образом, представленные гамильтонианы являются гамильтонианами XYZ -, XXZ' - и XXX' -волчков. Описанные формулы бозонизации в XYZ -случае совпадают с полученными в [1], а в XXZ' - и XXX' -случаях являются их естественными тригонометрическими и рациональными аналогами.

Мы также показываем, что при попытке вывести тригонометрические формулы бозонизации из эллиптических выражений (2) путем простого перехода к пределу при $\tau \rightarrow i\infty$ мы получаем расходящиеся выражения. С целью получить конечные выражения мы производим регуляризацию алгебры, вводя сингулярное преобразование на алгебре $sl(2, \mathbb{C})$, зависящее от параметра τ . Данное преобразование является классической версией сингулярного калибровочного преобразования, введенного впервые в работах [6], [7], в которых были получены новые тригонометрические решения квантового уравнения Янга–Бакстера, представляющие собой нединамические квантовые R -матрицы для систем Калоджеро–Мозера–Сазерленда.

2. ВОЛЧКИ НА АЛГЕБРАХ ЛИ

Пусть g – полупростая алгебра Ли¹⁾. Волчок на алгебре g – это пример гамильтоновой системы, фазовое пространство которой определяется орбитой коприсоединенного действия соответствующей группы G :

$$M^{\text{rot}} = \{S \in g^* : S = g^{-1} S_0 g\}. \quad (4)$$

Групповой элемент в g определен по модулю левых сдвигов G_0 , коммутирующих с S_0 , поэтому в терминах группы G коприсоединенную орбиту можно отождествить с факторпространством $G_0 \backslash G$. На фазовом пространстве волчка определена невырожденная симплектическая форма Кириллова–Костанта

$$w = \langle S_0, dg g^{-1} \wedge dg g^{-1} \rangle, \quad (5)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – форма Киллинга. Динамика системы задается квадратичным гамильтонианом

$$H_J = J_{ij} S_i S_j, \quad (6)$$

где J – квадратичная форма на алгебре g , определенная с точностью до квадратичного элемента Казимира

$$\Omega = \Omega_{ij} S_i S_j, \quad \{\Omega, A\} = 0 \quad \forall A \in g^*. \quad (7)$$

Пуассонова структура на алгебре функций $F(M^{\text{rot}})$ может быть описана явно. На линейных функциях скобка Пуассона совпадает с коммутатором,

$$\{A, B\} = [A, B], \quad A, B \in g^*,$$

¹⁾Большинство утверждений из этого раздела может быть легко обобщено на произвольную алгебру Ли.

в результате скобка Пуассона от полиномиальных функций может быть вычислена по правилу Лейбница:

$$\{AB, C\} = \{A, C\}B + \{B, C\}A, \quad A, B, C \in F(M^{\text{rot}}).$$

Отсюда, в частности, можно легко получить уравнения движения волчка в некотором базисе S_i алгебры g :

$$\frac{dS_k}{dt} = \{H_J, S_k\} = \{J_{ij}S_iS_j, S_k\} = 2J_{ij}C_{mjk}S_iS_m, \quad (8)$$

где C – тензор структурных констант алгебры g в базисе S_i .

Таким образом, волчок определяется выбором квадратичной формы на алгебре g . Однако две квадратичные формы J_1 и J_2 могут приводить к одинаковым уравнениям движения (8). Такие квадратичные формы, а также волчки, которые им соответствуют, удобно считать эквивалентными. Более точно, справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть две квадратичные формы J_1 и J_2 эквивалентны относительно действия группы автоморфизмов алгебры g , т.е. $J_{2ij} = J_{1km}T_{ki}T_{mj}$, где $T_{ij} \in \text{Aut}(sl(2, \mathbb{C}))$, тогда они определяют одинаковые уравнения движения (8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для H_{J_1} из (8) имеем

$$\frac{dS_k}{dt} = 2J_{1ij}C_{mjk}S_iS_m. \quad (9)$$

Аналогично для H_{J_2} имеем

$$\frac{dS'_k}{dt} = \{H_{J_2}, S'_k\} = \{J_{2lm}S_lS_m, S'_k\} = \{J_{1ij}T_{il}T_{jm}S_lS_m, S'_k\} = \{J_{1ij}S'_iS'_j, S'_k\},$$

где мы положили $S'_i = T_{ij}S^j$. Таким образом,

$$\frac{dS'_k}{dt} = 2J_{1ij}C'_{jkm}S'_iS'_m, \quad (10)$$

где C' – тензор структурных констант в базисе S'_i . По определению действие группы автоморфизмов сохраняет коммутационные соотношения $\{S'_i, S'_j\} = C_{ijk}S'_k$, и $C'_{ijk} = C_{ijk}$. Поэтому уравнения (9) и (10) совпадают. ■

Из этих рассуждений следует, что пространство симметрических квадратичных форм на алгебре g распадается на классы эквивалентности относительно действия группы автоморфизмов. Эквивалентным квадратичным формам соответствуют эквивалентные волчки.

3. $sl(2, \mathbb{C})$ -СЛУЧАЙ

Как следует из раздела 2, вопрос о классификации волчков на алгебре g сводится к перечислению классов эквивалентности симметрических квадратичных форм относительно действия группы автоморфизмов. Оказывается, что в случае алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ матрицу произвольной симметрической квадратичной формы на алгебре

можно привести действием группы автоморфизмов к одному из трех канонических видов так, что в некотором базисе с коммутационными соотношениями

$$\{S_i, S_j\} = 2i\epsilon_{ijk}S_k \quad (11)$$

(далее мы называем такие базисы стандартными) матрица произвольной квадратичной формы совпадает с одной из следующих матриц:

$$\begin{aligned} XYZ: \quad J &= \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \\ XXZ': \quad J &= \begin{bmatrix} \alpha & i\alpha & 0 \\ i\alpha & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad XXX': \quad J = \begin{bmatrix} \alpha & i\alpha & \beta \\ i\alpha & -\alpha & i\beta \\ \beta & i\beta & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

Функции Гамильтона, соответствующие данным матрицам, очевидно, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} XYZ: \quad H &= \alpha S_1^2 + \beta S_2^2 + \gamma S_3^2, \\ XXY': \quad H &= \alpha(S_1 + iS_2)^2 + \beta S_3^2, \\ XXX': \quad H &= \alpha(S_1 + iS_2)^2 + \beta S_3(S_1 + iS_2). \end{aligned} \quad (13)$$

Для вычислений удобно также выписать данные гамильтонианы в базисе Шевалле:

$$\begin{aligned} XYZ: \quad H &= \alpha(e + if)^2 + \beta(e - if)^2 + \gamma h^2, \\ XXZ': \quad H &= \alpha e^2 + \beta h^2, \\ XXX': \quad H &= \alpha e^2 + \beta eh, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\{h, e\} = 2e, \quad \{h, f\} = -2f, \quad \{e, f\} = h. \quad (15)$$

Таким образом, произвольный волчок с квадратичным гамильтонианом на алгебре $sl(2, \mathbb{C})$ описывается одним из трех гамильтонианов (14). Далее мы изучим данные гамильтонианы и найдем двухчастичные системы, которые им соответствуют, и таким образом установим полное соответствие между $sl(2, \mathbb{C})$ -волчками и системами из двух взаимодействующих частиц. Доказательство данного утверждения является простым, но слишком громоздким с технической точки зрения, поэтому мы вынесли его в приложение к данной статье.

4. СООТВЕТСТВИЕ “ВОЛЧКИ-ЧАСТИЦЫ”

В этом разделе мы описываем основную технику, при помощи которой будем строить систему из двух взаимодействующих частиц, соответствующую данному волчку. Как известно, движение двух частиц на прямой, взаимодействующих с потенциалом $U(q)$, описывается квадратичной по импульсу функцией Гамильтона

$$H = p^2 + U(q). \quad (16)$$

Система определена на двумерном фазовом пространстве

$$M^{\text{part}} = \{(p, q) \in \mathbb{C}^2\}, \quad w = dp \wedge dq. \quad (17)$$

Пуассонова структура на алгебре функций $F(M^{\text{part}})$ определяется стандартной скобкой Пуассона

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p}, \quad \{p, q\} = 1. \quad (18)$$

Пусть волчок определен квадратичной формой J . Для определения системы двух частиц, которая соответствует данному волчку, нам необходимо получить явные выражения для генераторов алгебры $S_i(p, q)$ как функций от переменных p и q таких, что относительно скобки Пуассона (18) они имеют правильные коммутационные соотношения (11):

$$\{S_i(p, q), S_j(p, q)\} = 2i\epsilon_{ijk} S_k(p, q).$$

Для того чтобы привести квадратичный гамильтониан волчка (6) к виду (16), рассмотрим следующий линейный по импульсу p анзац для генераторов алгебры h , e и f (формулы бозонизации):

$$h = f_h(q)p + g_h(q), \quad e = f_e(q)p + g_e(q), \quad f = f_f(q)p + g_f(q), \quad (19)$$

где $f_h(q)$, $f_e(q)$, $f_f(q)$, $g_h(q)$, $g_e(q)$, $g_f(q)$ – неизвестные функции от q . Коммутационные соотношения (21) приводят к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} f_h(q) \frac{df_f(q)}{dq} - f_f(q) \frac{df_h(q)}{dq} &= -2f_f(q), \\ f_h(q) \frac{dg_f(q)}{dq} - f_f(q) \frac{dg_h(q)}{dq} &= -2g_f(q), \\ f_h(q) \frac{df_e(q)}{dq} - f_e(q) \frac{df_h(q)}{dq} &= 2f_e(q), \\ f_h(q) \frac{dg_e(q)}{dq} - f_e(q) \frac{dg_h(q)}{dq} &= 2g_e(q), \\ f_e(q) \frac{df_f(q)}{dq} - f_f(q) \frac{df_e(q)}{dq} &= f_h(q), \\ f_e(q) \frac{dg_f(q)}{dq} - f_f(q) \frac{dg_e(q)}{dq} &= g_h(q). \end{aligned} \quad (20)$$

Гамильтониан волчка (6) с учетом (19) можно записать как квадратичный полином по p :

$$H = \Lambda_1(f_h, f_e, f_f)p^2 + \Lambda_2(f_h, f_e, f_f, g_h, g_e, g_f)p + \Lambda_3(g_h, g_e, g_f), \quad (21)$$

где конкретный вид функций Λ_1 , Λ_2 и Λ_3 определяется выбором тензора J . Сравнивая это равенство с (16), находим

$$\begin{aligned} \Lambda_1(f_h, f_e, f_f) &= 1, \\ \Lambda_2(f_h, f_e, f_f, g_h, g_e, g_f) &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Данные уравнения вместе с условием фиксации орбиты волчка (элемент Казимира $\Omega = h^2 + 4ef$ равен константе на орбите),

$$h^2 + 4ef = \nu^2, \quad (23)$$

играют роль граничных условий для уравнений (20) и, как мы показываем далее, позволяют однозначно решить их. В результате мы получаем функцию $\Lambda_3(q)$, которая играет роль потенциала взаимодействия между частицами.

5. XXX' -СЛУЧАЙ

Найдем систему из двух частиц, соответствующую XXX' -волчку, следуя рецепту предыдущего раздела. Согласно последнему равенству в (14) гамильтониан $sl(2, \mathbb{C})$ -волчка, соответствующий XXX' -случаю, имеет вид

$$H = \alpha e^2 + \beta eh.$$

Не ограничивая общности, положим $\alpha = 1$, что соответствует нормировке гамильтониана

$$H = e^2 + \beta eh. \quad (24)$$

Подставляя линейный анзац для формул бозонизации (19) в этот гамильтониан и собирая члены при разных степенях p , находим выражения для граничных условий:

$$\begin{aligned} \Lambda_1(f_e, f_h, f_f) &= f_e^2(q) + \beta f_e(q) f_h(q) = 1, \\ \Lambda_2(f_e, f_h, f_f, g_e, g_h, g_f) &= 2f_e(q)g_e(q) + \beta f_e(q)g_h(q) + \beta f_h(q)g_e(q) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Решение системы уравнений (20), удовлетворяющее граничным условиям (23), (25), имеет вид*

$$\begin{aligned} f_h(q) &= \frac{1 - q^2 \beta^2}{q \beta^2}, & g_h(q) &= \frac{\nu(q^2 \beta^2 + 1)}{2q^2 \beta^2}, \\ f_f(q) &= \frac{(1 - q^2 \beta^2)^2}{4q \beta^3}, & g_f(q) &= \frac{\nu(1 - q^2 \beta^2)(1 + 3q^2 \beta^2)}{8q^2 \beta^3}, \\ f_e(q) &= -\frac{1}{q \beta}, & g_e(q) &= -\frac{\nu}{2q^2 \beta}. \end{aligned} \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается путем непосредственной проверки.

Таким образом, искомые формулы бозонизации (19) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} e &= -\frac{p}{q \beta} - \frac{\nu}{2q^2 \beta}, \\ h &= \frac{1 - q^2 \beta^2}{q \beta^2} p + \frac{\nu(q^2 \beta^2 + 1)}{2q^2 \beta^2}, \\ f &= \frac{(1 - q^2 \beta^2)^2}{4q \beta^3} p + \frac{\nu(1 - q^2 \beta^2)(1 + 3q^2 \beta^2)}{8q^2 \beta^3}. \end{aligned} \quad (27)$$

Для функции Гамильтона (16) получаем

$$H = e^2 + \beta eh = p^2 - \frac{\nu^2}{(2q)^2}. \quad (28)$$

Данный гамильтониан хорошо известен в теории интегрируемых систем. Он описывает так называемую двухчастичную систему Калоджеро с рациональным потенциалом. Таким образом, мы установили, что волчок, соответствующий XXX -случаю, и рациональная двухчастичная система Калоджеро эквивалентны.

6. XXZ' -СЛУЧАЙ

Проведем аналогичные выкладки в XXZ' -случае. Гамильтониан волчка в XXZ' -случае согласно второму равенству в (14) имеет вид

$$H = e^2 + \gamma^2 h^2,$$

где мы для простоты положили $\alpha = 1$, $\beta = \gamma^2$. Система граничных условий (22) в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} \Lambda_1(f_e, f_h, f_f) &= f_e^2(q) + \gamma^2 f_h^2(q) = 1, \\ \Lambda_2(f_e, f_h, f_f, g_e, g_h, g_f) &= f_e(q)g_e(q) + \gamma^2 f_h(q)g_h(q) = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Решение системы уравнений (20), удовлетворяющее граничным условиям (23), (29), имеет вид*

$$\begin{aligned} f_h(q) &= -\frac{1}{\gamma \operatorname{th}(2\gamma q)}, & g_h(q) &= -\frac{\nu}{\operatorname{sh}^2(2\gamma q)}, \\ f_e(q) &= -\frac{i}{\operatorname{sh}(2\gamma q)}, & g_e(q) &= -\frac{i\nu\gamma \operatorname{ch}(2\gamma q)}{\operatorname{sh}^2(2\gamma q)}, \\ f_f(q) &= -\frac{i \operatorname{ch}^2(2\gamma q)}{4\gamma^2 \operatorname{sh}(2\gamma q)}, & g_f(q) &= \frac{i\nu \operatorname{ch}(2\gamma q)(\operatorname{ch}^2(2\gamma q) - 2)}{4\gamma \operatorname{sh}^2(2\gamma q)}. \end{aligned} \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается путем непосредственной проверки.

Таким образом, формулы бозонизации (19) в XXZ -случае принимают вид

$$\begin{aligned} e &= -\frac{i}{\operatorname{sh}(2\gamma q)}p - \frac{i\nu\gamma \operatorname{ch}(2\gamma q)}{\operatorname{sh}^2(2\gamma q)}, \\ h &= -\frac{1}{\gamma \operatorname{th}(2\gamma q)}p - \frac{\nu}{\operatorname{sh}^2(2\gamma q)}, \\ f &= -\frac{i \operatorname{ch}^2(2\gamma q)}{4\gamma^2 \operatorname{sh}(2\gamma q)}p + \frac{i\nu \operatorname{ch}(2\gamma q)(\operatorname{ch}^2(2\gamma q) - 2)}{4\gamma \operatorname{sh}^2(2\gamma q)}. \end{aligned} \quad (31)$$

Для функции Гамильтона (16) получаем

$$H = e^2 + \gamma^2 h^2 = p^2 - \frac{\gamma^2 \nu^2}{\operatorname{sh}^2(2\gamma q)}. \quad (32)$$

Полученный гамильтониан отвечает двухчастичной системе Калоджеро–Мозера–Сазерленда, и мы имеем следующий результат: $sl(2, \mathbb{C})$ -волчок, соответствующий XXZ' -случаю, и система Калоджеро–Мозера–Сазерленда эквивалентны.

7. XYZ -СЛУЧАЙ

Согласно первому равенству в (14) гамильтониан волчка в XYZ -случае имеет вид

$$H = \alpha(e + f)^2 + \beta(e - f)^2 + \gamma h^2.$$

Это выражение, однако, можно несколько упростить. Действительно, воспользуемся тем, что гамильтониан волчка определен с точностью до центрального элемента в универсальной обертывающей алгебре $sl(2, \mathbb{C})$ (элемента Казимира)

$$\Omega = h^2 + 4ef = h^2 + (e + f)^2 - (e - f)^2.$$

Поэтому, вычитая из гамильтониана $\gamma\Omega$, получаем:

$$H = (\alpha - \gamma)(e + f)^2 + (\beta + \gamma)(e - f)^2,$$

и, полагая для нормировки $\beta + \gamma = k^2$, $\gamma - \alpha = 1$, имеем окончательно

$$H = k^2(e - f)^2 - (e + f)^2. \quad (33)$$

Условия (22) для данного гамильтониана принимают вид

$$\begin{aligned} \Lambda_2 &= k^2(f_e(q) - f_f(q))(g_e(q) - g_f(q)) - (f_e(q) + f_f(q))(g_e(q) + g_f(q)) = 0, \\ \Lambda_1 &= k^2(f_e(q) - f_f(q))^2 - (f_e(q) + f_f(q))^2 = 1. \end{aligned} \quad (34)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Решение системы уравнений (20), удовлетворяющее граничным условиям (23), (34), имеет вид*

$$\begin{aligned} f_h &= \frac{1}{\operatorname{sn}(2q, k)k}, & g_h &= -\frac{\nu \operatorname{dn}(2q, k) \operatorname{cn}(2q, k)}{\operatorname{sn}(2q, k)^2 k}, \\ f_f &= -\frac{k \operatorname{cn}(2q, k) + \operatorname{dn}(2q, k)}{2 \operatorname{sn}(2q, k)k\sqrt{1 - k^2}}, & g_f &= \frac{\nu(k \operatorname{dn}(2q, k) + \operatorname{cn}(2q, k))}{2 \operatorname{sn}(2q, k)^2 k\sqrt{1 - k^2}}, \\ f_e &= -\frac{k \operatorname{cn}(2q, k) - \operatorname{dn}(2q, k)}{2 \operatorname{sn}(2q, k)k\sqrt{1 - k^2}}, & g_e &= \frac{k\nu \operatorname{dn}(2q, k) - \nu \operatorname{cn}(2q, k)}{2 \operatorname{sn}(2q, k)^2 k\sqrt{1 - k^2}}, \end{aligned} \quad (35)$$

где $\operatorname{dn}(q, k)$, $\operatorname{sn}(q, k)$, $\operatorname{cn}(q, k)$ – эллиптические функции Якоби с модулярным параметром k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается непосредственной проверкой.

Формулы бозонизации

$$\begin{aligned} e &= -\frac{(k \operatorname{cn}(2q, k) - \operatorname{dn}(2q, k))p}{2 \operatorname{sn}(2q, k)k\sqrt{1 - k^2}} + \frac{k\nu \operatorname{dn}(2q, k) - \nu \operatorname{cn}(2q, k)}{2 \operatorname{sn}(2q, k)^2 k\sqrt{1 - k^2}}, \\ f &= -\frac{(k \operatorname{cn}(2q, k) + \operatorname{dn}(2q, k))p}{2 \operatorname{sn}(2q, k)k\sqrt{1 - k^2}} + \frac{\nu(k \operatorname{dn}(2q, k) + \operatorname{cn}(2q, k))}{2 \operatorname{sn}(2q, k)^2 k\sqrt{1 - k^2}}, \\ h &= \frac{p}{\operatorname{sn}(2q, k)k} - \frac{\nu \operatorname{dn}(2q, k) \operatorname{cn}(2q, k)}{\operatorname{sn}(2q, k)^2 k} \end{aligned} \quad (36)$$

удобнее выписать в базисе S_1, S_2, S_3 синус-алгебры, в котором коммутационные соотношения принимают вид

$$S_1 = e + f, \quad S_2 = i(f - e), \quad S_3 = h, \quad \{S_i, S_j\} = 2i\epsilon_{ijk}S_k. \quad (37)$$

Выражая эллиптические функции Якоби через тета-функции, получаем

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \left(-\frac{\operatorname{cn}(2q, k)}{\operatorname{sn}(2q, k)} p + \frac{\nu \operatorname{dn}(2q, k)}{\operatorname{sn}(2q, k)^2} \right) = \\
 &= -\frac{\theta_{10}(0)\theta_{10}(2q)}{\vartheta'(0)\vartheta(2q)} p + \frac{\theta_{10}^2(0)\theta_{00}(2q)\theta_{01}(2q)}{\theta_{00}(0)\theta_{01}(0)\vartheta^2(2q)} \nu, \\
 S_2 &= \frac{1}{ik\sqrt{1-k^2}} \left(\frac{\operatorname{dn}(2q, k)}{\operatorname{sn}(2q, k)} p - \frac{\nu \operatorname{cn}(2q, k)}{\operatorname{sn}(2q, k)^2} \right) = \\
 &= \frac{\theta_{00}(0)\theta_{00}(2q)}{i\vartheta'(0)\vartheta(2q)} p - \frac{\theta_{00}^2(0)\theta_{10}(2q)\theta_{01}(2q)}{i\theta_{10}(0)\theta_{01}(0)\vartheta^2(2q)} \nu, \\
 S_3 &= \frac{1}{k} \left(\frac{p}{\operatorname{sn}(2q, k)} - \frac{\nu \operatorname{dn}(2q, k) \operatorname{cn}(2q, k)}{\operatorname{sn}(2q, k)^2} \right) = \\
 &= -\frac{\theta_{01}(0)\theta_{01}(2q)}{\vartheta'(0)\vartheta(2q)} p + \frac{\theta_{01}^2(0)\theta_{00}(2q)\theta_{10}(2q)}{\theta_{00}(0)\theta_{10}(0)\vartheta^2(2q)} \nu,
 \end{aligned} \tag{38}$$

где $\vartheta(q)$, $\theta_{\alpha\beta}(q)$ – стандартная эллиптическая тета-функция и тета-функция с характеристиками соответственно. Для функции Гамильтона имеем

$$H = k^2(e - f)^2 - (e + f)^2 = p^2 - \nu^2 \wp(2q, k), \tag{39}$$

где $\wp(q, k)$ – эллиптическая функция Вейерштрасса. Данный гамильтониан описывает движение широко известной двухчастичной эллиптической системы Калодже–Мозера. Заметим, что полученные формулы бозонизации в точности совпадают с формулами, полученными в работе [1] на основе метода симплектического соответствия Гекке.

8. ПЕРЕХОД ОТ XYZ -СЛУЧАЯ К XXZ' -СЛУЧАЮ

В этом разделе мы коротко описываем связь между XYZ - и XXZ' -волчками, а также объясняем, как соответствующие формулы бозонизаций переходят друг в друга.

Как известно, при $k \rightarrow 0$ эллиптическая функция Вейерштрасса имеет предел:

$$\wp(q, k) \rightarrow \frac{1}{\sin^2 q}.$$

При этом XYZ -гамильтониан (39) переходит в гамильтониан (32), соответствующий XXZ' -волчку (для некоторого значения постоянной γ). Однако, как легко видеть, матрицы операторов инерции J для XYZ - и XXZ' -волчков не переходят друг в друга при обращении в нуль какого-нибудь коэффициента, а связаны более сложным преобразованием. Чтобы описать данное преобразование явно, рассмотрим, как ведут себя генераторы алгебры (38) в пределе $k \rightarrow 0$. Вычисления дают

$$S_1 \rightarrow -p \frac{\cos(2q)}{\sin(2q)} + \nu \frac{1}{\sin^2(2q)}, \quad S_2 \rightarrow \frac{1}{ik} \Phi(q, p), \quad S_3 \rightarrow \frac{1}{k} \Phi(q, p), \tag{40}$$

где

$$\Phi(q, p) = p \frac{1}{\sin(2q)} - \nu \frac{\cos(2q)}{\sin^2(2q)}. \tag{41}$$

Мы видим, что в этом пределе выражения для генераторов расходятся, и для получения конечных формул бозонизации необходима некоторая регуляризация. Рассмотрим, как ведут себя генераторы алгебры, выписанные в базисе Шевалле, в пределе $k \rightarrow 0$:

$$h = S_1, \quad e = \frac{1}{2}(S_3 - iS_2) \sim k, \quad f = \frac{1}{2}(S_3 + iS_2) \sim \frac{1}{k}. \quad (42)$$

Заметим, что преобразования $h' \rightarrow h$, $e' \rightarrow \frac{1}{k}e$, $f' \rightarrow kf$ не меняют коммутационные соотношения в алгебре и дают конечный предел для генераторов алгебры при $k \rightarrow 0$.

Теперь, возвращаясь к старым переменным, получаем конечные пределы:

$$\begin{aligned} S'_1 \rightarrow h' &= -p \frac{\cos(2q)}{4 \sin(2q)} + \nu \frac{1}{\sin^2(2q)}, \\ S'_2 \rightarrow \frac{1}{i}(f' - e') &= \frac{1}{4i} \left(p \frac{4 + \cos(2u)}{\sin(2q)} + \frac{\nu \cos(2q)(5 + \sin^2(2q))}{\sin^2 2q} \right), \\ S'_3 \rightarrow (e' + f') &= \frac{1}{4} \left(p \frac{4 - \cos^2(2q)}{\sin(2q)} - \frac{\nu \cos(2q)(3 - \sin^2(2q))}{\sin^2(2q)} \right). \end{aligned} \quad (43)$$

Легко проверить, что эти формулы совпадают с (31) при некотором значении константы γ и обладают всеми необходимыми свойствами:

$$\begin{aligned} \{S'_i, S'_j\} &= 2i\epsilon_{ijk}S'_k, \\ (S'_1)^2 + (S'_2)^2 + (S'_3)^2 &= \nu^2. \end{aligned} \quad (44)$$

В новом базисе S'_i квадратичная форма J должна иметь вид $J' = T J T^t$, где матрица перехода к новому базису, как понятно из предыдущих выкладок, определена как $T = A^{-1}BA$, где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i/2 & 1/2 \\ 0 & i/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}. \quad (45)$$

Видно, что матрица T является вырожденной при $k = 0$, однако при любом другом значении k ее определитель равен единице. Вычисляя матрицу оператора J в новом базисе, мы находим, что ее вид соответствует каноническому виду в XXZ' -случае.

Таким образом, XYZ - и XXZ' -волчки связаны некоторым сингулярным “калибровочным” преобразованием, которое зависит от модулярного параметра k . Преобразования такого вида встречались ранее в работах [6], [7]. В данных работах для серии алгебр A_n были получены новые тригонометрические решения уравнения Янга–Бакстера, которые представляют собой нединамические R -матрицы для систем Калоджеро–Мозера–Сазерленда. При этом новые решения получаются из известной эллиптической R -матрицы Белавина–Дринфельда путем применения к ней сингулярного калибровочного преобразования, зависящего от модулярного параметра k и последующего перехода к пределу $k \rightarrow 0$. Переход от XYZ - к XXZ' -случаю, описанный в данном разделе, является классической версией этих преобразований.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем коротко итог проделанной работы. Мы показали, что изучение волчков на алгебре $sl(2, \mathbb{C})$ сводится к рассмотрению трех канонических случаев, описываемых $XX'X'$ -, XXZ' -, XYZ -гамильтонианами. Для каждого из этих случаев мы построили естественные координаты Дарбу на коприсоединенных орбитах алгебры $sl(2, \mathbb{C})$. Динамика волчка в этих координатах имеет естественную физическую интерпретацию – это динамика двух взаимодействующих частиц на прямой. При этом потенциал взаимодействия описывает рациональную, тригонометрическую и эллиптическую системы Калоджеро для $XX'X'$ -, XXZ' - и XYZ - случаев соответственно. Таким образом мы приходим к выводу о полной эквивалентности двухчастичных систем Калоджеро и $sl(2, \mathbb{C})$ -волчков с квадратичным гамильтонианом.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы приводим доказательство основного утверждения раздела 2 о том, что все волчки на алгебре $sl(2, \mathbb{C})$ с квадратичным гамильтонианом исчерпываются $XX'X'$ -, XXZ' - и XYZ - гамильтонианами. Начнем с некоторых вспомогательных определений и утверждений.

Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – форма Киллинга на алгебре $sl(2, \mathbb{C})$. Будем называть базис S_1, S_2, S_3 нормальным, если

$$\langle S_i, S_j \rangle = \frac{1}{8} \text{Tr}(ad_{S_i}, ad_{S_j}) = \delta_{ij}. \quad (\text{П.1})$$

Легко показать, что коммутационные соотношения в этом базисе имеют вид

$$\{S_i, S_j\} = \pm 2i\epsilon_{ijk}S_k,$$

что после перенумерации индексов сводится к стандартной формуле

$$\{S_i, S_j\} = 2i\epsilon_{ijk}S_k. \quad (\text{П.2})$$

Базис, в котором коммутационные соотношения имеют вид (П.2), мы далее называем стандартным. Видно, что условие (П.1) может быть взято как определение стандартного базиса. Элемент Казимира, выраженный в переменных стандартного базиса S_i , имеет вид

$$\Omega = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2, \quad (\text{П.3})$$

при этом матрица Ω диагональна, $\Omega = \text{diag}(1, 1, 1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Группа автоморфизмов действует на множестве стандартных базисов транзитивно, т.е. если ζ_i и η_i – два стандартных базиса,*

$$\{\zeta_i, \zeta_j\} = 2i\epsilon_{ijk}\zeta_k, \quad \{\eta_i, \eta_j\} = 2i\epsilon_{ijk}\eta_k,$$

то найдется элемент группы автоморфизмов $A \in \text{Aut}(sl(2, \mathbb{C}))$ такой, что выполнено $A_{ij}\zeta_j = \eta_i$. Матрица оператора $A \in \text{Aut}(sl(2, \mathbb{C}))$ в стандартном базисе ортогональна, $A^t A = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ и (η_1, η_2, η_3) – два стандартных базиса. Тогда оператор перехода к базису $\zeta_i = A\eta_i$ не меняет коммутационные соотношения, следовательно, $A \in \text{Aut}(sl(2, \mathbb{C}))$. Ортогональность матрицы следует из того, что автоморфизмы сохраняют элемент Казимира (П.3). ■

СЛЕДСТВИЕ 1. Закон преобразования квадратичных форм на алгебре $sl(2, \mathbb{C})$ под действием группы автоморфизмов совпадает с законом преобразования операторов

$$J' = AJA^t = AJA^{-1}. \quad (\text{П.4})$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Для доказательства основного утверждения достаточно для произвольной квадратичной формы предъявить стандартный базис, в котором ее матрица совпадает с одной из матриц (12).

Введем обозначение

$$x^\perp = \{y \in sl(2, \mathbb{C}) : \langle x, y \rangle = 0\}. \quad (\text{П.5})$$

ЛЕММА 1. Не существует такого двумерного подпространства $L \in sl(2, \mathbb{C})$, что $\langle x, x \rangle = 0$ для любого $x \in L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В стандартном базисе условие $\langle x, x \rangle = 0$ имеет вид $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. Это уравнение определяет двумерный конус, в котором не лежит ни одна двумерная плоскость. ■

ЛЕММА 2. Пусть $x \in sl(2, \mathbb{C})$, $\langle x, x \rangle = 0$, тогда найдется стандартный базис S_1, S_2, S_3 , в котором вектор x имеет вид $x = (0, a, \pm ia)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $x^\perp$. Очевидно, $\dim x^\perp = 2$, $x \in x^\perp$. В силу леммы 1 в множестве $x^\perp$ существует такой вектор S_3 , что $\langle S_3, S_3 \rangle \neq 0$. Положим $\langle S_3, S_3 \rangle = 1$. Рассмотрим $S_3^\perp$, $\dim S_3^\perp = 2$, и $x \in S_3^\perp$. В силу леммы 1 в $S_3^\perp$ найдется вектор S_2 такой, что $\langle S_2, S_2 \rangle \neq 0$. Положим $\langle S_2, S_2 \rangle = 1$. Пусть теперь $S_1 \in S_3 \cap S_2$, тогда $\langle S_1, S_1 \rangle \neq 0$, ибо в противном случае $\langle S_1, x \rangle = 0$ для любого $x \in sl(2, \mathbb{C})$ и форма Киллинга является вырожденной. Положим $\langle S_1, S_1 \rangle = 1$.

По построению S_1, S_2, S_3 – стандартный базис. Координаты вектора x в этом базисе суть

$$x_1 = \langle x, S_1 \rangle, \quad x_2 = \langle x, S_2 \rangle, \quad x_3 = \langle x, S_3 \rangle = 0,$$

откуда $x_1^2 + x_2^2 = 0$ или $x_1 = a$, $x_2 = \pm ia$. ■

Доказательство основного утверждения. В произвольном стандартном базисе квадратичная форма определяется симметрической матрицей J . В силу следствия 1 в стандартном базисе мы можем связать с ней симметрический оператор $J^t = J$ и доказывать утверждение для этого оператора. Рассмотрим три случая.

1. Пусть все собственные векторы оператора J различны, тогда $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$, ибо в этом случае форма Киллинга была бы вырожденной. Поэтому мы можем выбрать стандартный базис, состоящий из собственных векторов x_i , $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$. Матрица оператора J в этом базисе диагональна:

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}.$$

2. Если один из собственных векторов таков, что $\langle v_1, v_1 \rangle = 0$, то в силу леммы 2 в некотором стандартном базисе он имеет вид $v_1 = (a, ia, 0)$. Так как J определен с точностью до элемента Казимира, то матрица J определена в стандартном базисе с точностью до диагональной матрицы $\text{diag}(\lambda, \lambda, \lambda)$. Поэтому, не ограничивая общности рассуждений, положим собственное значение соответствующее вектору v_1 равным нулю. Требование $Jv_1 = 0$, вместе с условием симметричности матрицы J_{ij} , приводит к следующему виду матрицы оператора J :

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & i\alpha & \beta \\ i\alpha & -\alpha & i\beta \\ \beta & i\beta & \gamma \end{bmatrix}.$$

У данного оператора J имеется всего два собственных вектора $v_1 = (1, i, 0)$ и $v_2 = (\beta/\gamma, i\beta/\gamma, 1)$, отвечающих собственным значениям $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = \gamma$ (т.е. этот оператор имеет нетривиальную жорданову структуру). Заметим, что $v_2 \in v_1^\perp$, поскольку $\langle v_2, v_1 \rangle = 0$, поэтому, выбирая при доказательстве леммы 2 вектор $S_3 = v_2$, мы приходим к стандартному базису, в котором оператор J имеет матрицу

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & i\alpha & 0 \\ i\alpha & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}.$$

3. При рассмотрении случая 2 мы положили $S_3 = v_2 = (\beta/\gamma, i\beta/\gamma, 1)$, что возможно при $\gamma \neq 0$. В противном случае матрица оператора J имеет вид

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & i\alpha & \beta \\ i\alpha & -\alpha & i\beta \\ \beta & i\beta & 0 \end{bmatrix}.$$

Благодарности. Автор благодарит М. А. Олышанецкого, А. М. Левина, А. В. Зотова за ценные обсуждения и интерес к работе. Работа была частично поддержана Федеральным агентством РФ по атомной энергии, РФФИ (гранты № 06-02-17382, 06-01-92054-КЕ_a), Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-8004.2006.2).

Список литературы

- [1] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, *Comm. Math. Phys.*, **236**:1 (2003), 93–133.
- [2] N. Hitchin, *Duke Math. J.*, **54**:1 (1987), 91–114.
- [3] A. Gorsky, N. Nekrasov, *Nucl. Phys. B*, **414**:1–2 (1994), 213–238; [arXiv: hep-th/9304047](#).
- [4] A. Gorsky, N. Nekrasov, *Elliptic Calogero–Moser system from two dimensional current algebra*, [arXiv: hep-th/9401021](#).
- [5] N. Nekrasov, *Comm. Math. Phys.*, **180**:3 (1996), 587–604.
- [6] A. Antonov, K. Hasegawa, A. Zabrodin, *Nucl. Phys. B*, **503**:3 (1997), 747–770; [arXiv: hep-th/9704074](#).
- [7] A. Gorsky, A. Zabrodin, *J. Phys. A*, **26**:15 (1993), L635–L639; [arXiv: hep-th/9303026](#).