Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Л. Бухбиндер, Н. Г. Плетнёв, Однопетлевое эффективное действие в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории массивного поля Янга–Миллса, *ТМФ*, 2008, том 157, номер 1, 22–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6262>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 13:04:54

© 2008 г.

И. Л. Бухбиндер*, Н. Г. Плетнев†

ОДНОПЕТЛЕВОЕ ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ В $\mathcal{N} = 2$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ МАССИВНОГО ПОЛЯ ЯНГА–МИЛЛСА

Рассматривается $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричная теория массивного поля Янга–Миллса, сформулированная в $\mathcal{N} = 2$ гармоническом суперпространстве. Приводятся различные калибровочно-инвариантные формы записи массового слагаемого в действии, в частности с использованием суперполя Штюкельберга, ведущие к дуальным формулировкам теории. Развивается калибровочно-инвариантная и явно суперсимметричная схема петлевого разложения суперполевого эффективного действия вне массовой оболочки. В рамках этой схемы вычисляются калибровочно-инвариантные и явно $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричные однопетлевые контрчлены, включая новые контрчлены, зависящие от суперполя Штюкельберга. Анализируется компонентная структура одного из таких контрчленов.

Ключевые слова: суперсимметрия, квантовая теория поля.

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантование массивных неабелевых теорий Янга–Миллса является предметом исследований с долгой историей (см., например, [1]). Обычно калибровочная инвариантность ассоциируется с безмассовостью соответствующих калибровочных полей. Однако ясно, что для понимания феноменологии частиц необходимо учитывать массивные степени свободы векторных бозонов.

В настоящее время известно несколько различных механизмов генерации массы векторных полей, совместимых с калибровочной инвариантностью. Их общей чертой является увеличение числа физических степеней свободы по сравнению с безмассовой теорией. Конечно, основной общепринятой парадигмой, на которой строится Стандартная Модель, является механизм спонтанного нарушения симметрии, в котором дополнительные физические степени свободы обусловлены скалярными полями Хиггса. Однако, поскольку до сих пор нет экспериментальных данных,

*Томский государственный педагогический университет, Томск, Россия.
E-mail: joseph@tspu.edu.ru

†Институт математики СО РАН, Новосибирск, Россия. E-mail: pletnev@math.nsc.ru

подтверждающих существование бозонов Хиггса, естественно рассматривать другие механизмы генерации массы бозонов и фермионов в калибровочных теориях таким способом, чтобы лишние степени свободы не появлялись в спектре физических частиц.

Наиболее популярной альтернативой механизму Хиггса является модель, в основе которой лежит теория массивного поля Янга–Миллса. Калибровочная инвариантность в такой модели достигается путем введения действительного псевдоскалярного поля Штюкельберга [2], что соответствует взаимодействию поля Янга–Миллса с калибровочной нелинейной сигма-моделью. В унитарной калибровке это поле поглощается продольной компонентой массивного вектора. Достаточно полный обзор и список литературы по этому направлению дан в [3]; среди многочисленных последних публикаций отметим работы [4].

Помимо моделей с полями Штюкельберга, можно также рассматривать неабелевы вектор-тензорные калибровочные теории с топологическими связями [5]. Все такие теории являются классически эквивалентными неабелевым теориям массивных векторных полей с полями Штюкельберга. Одни и те же степени свободы описываются любым из двух дуальных представлений. В зависимости от контекста задачи одна из формулировок может быть более удобна, чем другая, и поэтому обе формулировки и связи между ними заслуживают подробного исследования¹⁾. Следует отметить, что подобные модели возникают естественным образом в низкоэнергетическом пределе теории суперструн, а также в контексте супергравитации в высших измерениях. Так, в обнаруженных недавно компактификациях суперструны типа II на многообразия Калаби–Яу в присутствии нетривиальных потоков 3-формы естественным образом появляются степени свободы массивного антисимметричного тензорного поля и естественный механизм спонтанного нарушения суперсимметрии (см., например, [7]). Это обстоятельство возродило большой интерес к более детальному изучению массивных $\mathcal{N} = 1$ и $\mathcal{N} = 2$ тензорных мультиплетов и их связям со скалярным и векторным мультиплетами. Отметим, что такие связи играют важную роль в механизме сокращения аномалий в суперструнных моделях.

Конструкция $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричного массивного тензорного мультиплета как версия, дуальная массивному векторному мультиплету, давно известна (см., например, [8]). В $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии напряженность антисимметричного тензора содержится в тензорном мультиплете G^{++} , определенном на аналитическом подпространстве гармонического $\mathcal{N} = 2$ суперпространства и ограниченном связями [9], [10]. Для безмассового тензорного мультиплета действие содержит только G^{++} , но если антисимметричный тензор имеет массу, то требование калибровочной инвариантности приводит к связи полей Штюкельберга с векторным мультиплетом [11]. Особый интерес представляет изучение квантовых свойств дуальных реализаций одного и того же представления суперсимметрии.

В нашей работе мы рассмотрим квантовые свойства $\mathcal{N} = 2$ массивной теории поля Янга–Миллса с использованием суперполя Штюкельберга. Эта модель явля-

¹⁾ Квантовая эквивалентность различных дуальных формулировок является более деликатной проблемой и требует отдельного изучения для каждой конкретной теории (см., например, [6]).

ется непосредственной $\mathcal{N} = 2$ суперсимметризацией $\mathcal{N} = 0$ несуперсимметричной массивной теории Янга–Миллса в формализме Кунимасы–Гото [12]. Некоторые аспекты этой задачи уже рассматривались в работе [13], где было сделано наблюдение, что теория конечна во втором порядке по безразмерной константе связи g^2 Янга–Миллса, и массовый член не ренормируется, но при этом теория неперенормируема в секторе, который содержит размерную константу связи m^2/g^2 . Из этого факта делается заключение, что в секторе векторного мультиплета теория конечна во всех порядках петлевого разложения.

Заметим, однако, что уже на классическом уровне действие $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории поля Янга–Миллса в рамках формализма гармонического суперпространства [9] имеет вид бесконечной суммы по всем степеням потенциала V^{++} векторного мультиплета. Кроме того, сигма-модельный лагранжиан суперполя Штюкельберга сам имеет в высшей степени нелинейный вид. Поэтому для анализа квантовых свойств теории калибровочно-инвариантным способом даже на однопетлевом уровне мы не можем, вообще говоря, ограничиться только рассмотрением простейших диаграмм, приводящих к калибровочно-неинвариантным контрчленам, а должны суммировать все однопетлевые диаграммы для эффективного действия со всеми внешними концами. В рамках обычной нековариантной диаграммной техники эта задача представляется технически очень сложной, если не безнадежной.

В этой работе мы используем формулировку $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории поля Янга–Миллса, соответствующий формализм Штюкельберга в гармоническом суперпространстве [13] и метод фонового поля [14], позволяющий эффективно суммировать все диаграммы с возрастающим количеством вставок для конструкции эффективного действия. Наши выводы близки по смыслу к результатам работ [15], [16], где была решена проблема построения инвариантных вне массовой оболочки контрчленов для несуперсимметричной ($\mathcal{N} = 0$) массивной теории Янга–Миллса. Для сохранения калибровочной инвариантности на всех стадиях вычисления важно использовать инвариантную теорию возмущений, развитую достаточно давно в моделях главных киральных полей [17].

Работа организована следующим образом. В разделе 2 описывается формулировка $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной массивной теории поля Янга–Миллса в рамках гармонического суперпространства с учетом суперполя Штюкельберга. После исключения нефизических степеней свободы мы получаем явно калибровочно-инвариантную нелокальную форму для массового слагаемого в лагранжиане. Можно ожидать, что именно в такой форме становится более прозрачной дуальная связь с теорией $\mathcal{N} = 2$ массивного тензорного мультиплета [11]. В разделе 3 обсуждается процедура построения эффективного действия на основе $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричного метода фонового поля и отмечаются особенности применения этого метода к рассматриваемой теории. Раздел 4 посвящен вычислению однопетлевых расходимостей эффективного действия. Здесь впервые представлены калибровочно-инвариантные и явно $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричные контрчлены, зависящие от суперполя Штюкельберга. В разделе 5 обсуждается процедура вывода компонентной структуры в бозонном секторе одного из таких контрчленов.

2. $\mathcal{N} = 2$ СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ МАССИВНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ ЯНГА–МИЛЛСА В ГАРМОНИЧЕСКОМ СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ

Формулировка $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии в терминах неограниченных суперполей, определенных на аналитическом подпространстве гармонического суперпространства [9], [10], оказывается чрезвычайно полезной для исследования квантовых эффектов в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных моделях теории поля (см., например, [14], [18]). Концепция $\mathcal{N} = 2$ гармонического суперпространства была введена в [9] за счет расширения стандартного $\mathcal{N} = 2$ суперпространства с координатами $z^M = (x^m, \theta_i^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}^i)$, $i = 1, 2$, сферическими гармониками $u_i^\pm$, параметризующими двумерную сферу $S^2 = SU(2)/U(1)$: $u^{+i}u_i^- = 1$, $\bar{u}^{+i} = u_i^-$. Главное преимущество использования гармонического суперпространства состоит в том, что неограниченные суперполя материальных гипермультиплетов и векторного мультиплета Янга–Миллса “живут” в аналитическом подпространстве с координатами $\zeta^M = (x_A^m, \theta^{+\alpha}, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}^+, u_i^\pm)$, где так называемый аналитический базис, замкнутый относительно преобразований $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии, определяется соотношениями

$$x_A^m = x^m - i\theta^+ \sigma^m \bar{\theta}^- - i\theta^- \sigma^m \bar{\theta}^+, \quad \theta_\alpha^\pm = u_i^\pm \theta_\alpha^i, \quad \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}^\pm = u_i^\pm \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}^i.$$

$\mathcal{N} = 2$ векторный мультиплет с конечным числом физических и вспомогательных компонентных полей, но с бесконечным набором калибровочных степеней свободы описывается действительным аналитическим суперполем $V^{++} = V_a^{++} T_a$, принимающим значение в алгебре Ли калибровочной группы. Гипермультиплеты ω и q^+ с бесконечным количеством вспомогательных полей вне массовой оболочки, преобразующиеся в некотором представлении R калибровочной группы, задаются аналитическими суперполями $\omega(\zeta)$, $q^+(\zeta)$ и им сопряженными $\tilde{q}^+(\zeta)$ (для определения обобщенного сопряжения как комбинации комплексного сопряжения и антиподального отображения на 2-сфере см. работу [10]). Скалярные компонентные поля $\omega(x_A)$ и $\omega^{(ij)}(x_A)$ ω -мультиплета, являющиеся, соответственно, изоскаляром и изотриплетом группы $SU(2)$ внутренних изоморфизмов алгебры суперсимметрии, и дублет вейлевских фермионов ψ_α^i , $\bar{\psi}_{i\dot{\alpha}}$ появляются как нижние компоненты в разложении $\omega(\zeta)$ по степеням θ^+ , $\bar{\theta}^+$, $u_i^\pm$. Другие $\mathcal{N} = 2$ материальные мультиплеты с конечным числом вспомогательных полей описываются аналитическими суперполями, подчиненными должным образом выбранным гармоническим ограничениям.

Векторный $\mathcal{N} = 2$ потенциал V^{++} удовлетворяет соотношению вещественности по отношению к обобщенному сопряжению $\widetilde{V^{++}} = V^{++}$ и преобразуется относительно калибровочных преобразований, как $\delta V^{++} = -\mathcal{D}^{++}\lambda$, где λ – произвольное действительное аналитическое суперполе и $\mathcal{D}^{++}$ – ковариантная гармоническая производная в аналитическом базисе,

$$\mathcal{D}^{++} = D^{++} + iV^{++} = e^{ib(z,u)} D^{++} e^{-ib(z,u)},$$

$$D^{++} = u^{+i} \frac{\partial}{\partial u^{-i}} - 2i\theta^+ \sigma^m \bar{\theta}^+ \frac{\partial}{\partial x_A^m} + \theta^{+\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta^{-\alpha}} + \bar{\theta}^{+\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{-\dot{\alpha}}},$$

$b(z, u)$ – так называемый калибровочный мост. Этот калибровочный произвол позволяет устранить бесконечное количество вспомогательных полей и выбрать калибровку Весса–Зумино, в которой аналитическое суперполе V^{++} имеет конечное число физических и вспомогательных полей. Как было показано в [9], [10], все геометрические величины, такие как напряженности, определяются в терминах единственного неограниченного потенциала $V^{++}(\zeta, u)$.

Не останавливаясь на детальном описании конструкции $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории поля Янга–Миллса [10], приведем действие неабелева векторного супермультиплета, в состав которого входят следующие объекты: векторное поле $A_m(x)$, комплексное скалярное поле $M(x) + iN(x)$, майорановский изодублет спиноров $\lambda_\alpha^i(x)$, $\bar{\lambda}_\alpha^i(x)$ и триплет скалярных вспомогательных полей $F^{ij}(x)$. Вне массовой оболочки этот мультиплет задается суперполевым потенциалом V^{++} , принимающим значения в алгебре Ли калибровочной группы. Соответствующее действие имеет вид

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2g^2} \text{tr} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n} \int d^{12}z du_1 \dots du_n \frac{V^{++}(z, u_1) \dots V^{++}(z, u_n)}{(u_1^+ u_2^+) \dots (u_n^+ u_1^+)} = \\ &= -\frac{1}{2g^2} \text{tr} \int d^8z W^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где использованы гармонические распределения $1/u_1^+ u_2^+$ или, другими словами, функции Грина на сфере $G^{(-1, -1)}(u_1, u_2)$, которые удовлетворяют уравнению $\partial^{++} G^{(-1, -1)}(u_1, u_2) = \delta^{(1, -1)}(u_1, u_2)$. Правила дифференцирования и интегрирования по гармоникам были определены в пионерских работах [9], [10].

Не зависящая от гармоник киральная суперполевая напряженность $W = -(\bar{D}^+)^2 V^{--}/4$ определяется в терминах неаналитического суперполя

$$V^{--}(z, u) = \int du' \frac{e^{ib(z, u)} e^{-ib(z, u')} V^{++}(z, u')}{(u^+ u'^+)^2},$$

удовлетворяющего уравнению нулевой кривизны

$$D^{++} V^{--} - D^{--} V^{++} + i[V^{++}, V^{--}] = 0. \quad (2)$$

В λ -базисе действие (1) инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} gV^{++} &= e^{i\lambda}(V^{++} - iD^{++})e^{-i\lambda}, & V^{++} &= V_a^{++}T_a, \\ \lambda &= \lambda(\zeta, u) = \bar{\lambda}(\zeta, u), & \lambda &= \lambda_a T_a. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь T_a – генераторы калибровочной алгебры, заданные формулами

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c, \quad \text{tr}(T_a T_b) = \delta_{ab},$$

а суперполевой калибровочный параметр $\lambda(\zeta, u)$ является действительным аналитическим суперполем.

Построим калибровочно-инвариантное выражение для слагаемого в суперполе-вом действии, ответственное за массу калибровочного поля. Для этой цели мы

используем известный формализм Кунимасы–Гото [12], [3], развитый для описания массы калибровочных полей в $\mathcal{N} = 0$ теории Янга–Миллса. В $\mathcal{N} = 2$ суперполе-вом контексте этот формализм требует введения дополнительного голдстоуновского ω -гипермультиплета в присоединенном представлении калибровочной группы. Тогда соответствующее массовое слагаемое в действии имеет вид

$$S_m = -\frac{m^2}{2g^2} \text{tr} \int d\zeta^{(-4)} du \{ \Omega^{-1}(V^{++} - iD^{++})\Omega \}^2, \quad (4)$$

где $\Omega = \Omega(\omega) = e^{-i\omega}$. В такой форме записи²⁾ массовое слагаемое явно инвариантно относительно одновременных преобразований (3) и преобразований

$${}^g\Omega = e^{i\lambda}\Omega, \quad (5)$$

где ${}^g\Omega = g\Omega$ и g – элемент калибровочной группы. Отметим, что массовое слагаемое (4) также инвариантно относительно правых глобальных преобразований g_R : $(V^{++})^{g_R} = V^{++}$, $\Omega^{g_R} = \Omega g_R$. Поскольку действие $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной безмассовой теории поля Янга–Миллса (1) калибровочно-инвариантно, подстановка $V^{++} \rightarrow \Omega V^{++}$ не меняет структуры действия (1).

Интересно привести другую, явно калибровочно-инвариантную, но нелокальную форму массового слагаемого в терминах суперполе-вой напряженности W . Рассмотрим действие

$$S[V^{++}, \omega] = -\frac{1}{2g^2} \text{tr} \int d^4\theta W^2 - \frac{m^2}{2g^2} \text{tr} \int d\zeta^{(-4)} du \mathcal{V}^{++} \mathcal{V}^{++}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{++} &= V^{++} - L^{++}, \\ L^{++} &= i(D^{++}\Omega)\Omega^{-1} = \int_0^1 d\tau e^{-i\tau\omega} D^{++} \omega e^{i\tau\omega} = \int_0^1 d\tau D^{++} \omega_a R_{ab}(\tau\omega) T_b \end{aligned} \quad (7)$$

(определение изотопической матрицы $R_{ab}(\omega)$ дано ниже, см. (16)), и запишем вытекающее из него уравнение движения

$$\frac{1}{4}(D^+)^2 W + m^2 \mathcal{V}^{++} = 0. \quad (8)$$

Поскольку W не зависит от гармоник, условием совместности этого уравнения является уравнение движения ω -мультиплета:

$$D^{++} \mathcal{V}^{++} = 0. \quad (9)$$

Как видно из определения (7), компонентный состав калибровочно-ковариантного (${}^g\mathcal{V}^{++} = g\mathcal{V}^{++}g^{-1}$) потенциала $\mathcal{V}^{++}$ определяется сложными неполиномиальными

²⁾Также полезно представить другую форму записи (4):

$$S_m = -\frac{m^2}{2g^2} \text{tr} \int d\zeta^{(-4)} du (V^{++} - i\Omega^{-1}(D^{++}\Omega + i[V^{++}, \Omega]))^2,$$

в которой специфическая структура калибровочной сигма-модели более прозрачна.

комбинациями, которые составлены из физических компонент векторного мультиплета в калибровке Весса–Зумино и компонент ω -мультиплета. Однако на массовой оболочке благодаря ограничению (9) разложение по компонентам можно параметризовать:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{++}(\zeta, u) = & f^{++}(x_A) + (\theta^+)^2 \bar{\varphi}(x_A) + (\bar{\theta}^+)^2 \varphi(x_A) + \\ & + 2i(\theta^+ \sigma^m \bar{\theta}^+)(A_m(x_A) + \partial_m f^{+-}(x_A)) + 2[\theta^{+\alpha} \psi_\alpha^i - \bar{\theta}_\alpha^+ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}i}] u_i^+ + \\ & + 2i[(\bar{\theta}^+)^2 \theta^{+\alpha} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}i} + (\theta^+)^2 \bar{\theta}_\alpha^+ \partial^{\dot{\alpha}\alpha} \psi_\alpha^i] u_i^- - (\theta^+)^2 (\bar{\theta}^+)^2 \square f^{--}(x_A). \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда массовое слагаемое для векторной компоненты суперполя $\mathcal{V}^{++}$ имеет вид, подобный массовому слагаемому в формализме Штюкельберга для несуперсимметричной массивной теории поля Янга–Миллса [16]:

$$S_m = -\frac{m^2}{2g^2} \text{tr} \int d^4x du (A_m - L_m)^2,$$

где форма Картана L_m на группе определена в терминах изоскалярной ω и изотриплетной $\omega^{(ij)}$ физических компонент ω -супермультиплета. Вывести явное компонентное выражение для S_m технически достаточно сложно, так как для этого необходимо выполнить интегрирование по гармоникам в каждом члене бесконечного ряда в разложении формы Картана $L_m = e^{-if^{ij}u_i^+u_j^-} \partial_m e^{if^{ij}u_i^+u_j^-}$, где $f^{ij} = \omega \varepsilon^{ij} + \omega^{ij}$. Однако аналогия с соответствующей несуперсимметричной теорией очевидно прослеживается.

Уравнение (8) можно рассматривать как условие связи на ω -мультиплет, которое может быть пертурбативно разрешено и для неабелевой теории, но особенно просто выглядит решение для абелевого случая:

$$\omega(\zeta_1, u_1) = \int d\zeta_2^{(-4)} du_2 G_0^{(0,0)}(1|2) D_2^{++} V^{++}(2), \quad (11)$$

где

$$G_0^{(0,0)}(1|2) = -\frac{1}{\square} (D_1^+)^4 (D_2^+)^4 \delta^{12}(1|2) \frac{u_1^- u_2^-}{(u_1^+ u_2^+)^3} \quad (12)$$

– функция Грина ω -мультиплета [9], [10]. Действуя оператором D^{++} на обе части (11), мы получим

$$\begin{aligned} D_1^{++} \omega(\zeta_1, u_1) = & - \int d\zeta_2^{(-4)} du_2 \frac{1}{\square} (D_1^+)^4 (D_2^+)^4 \delta^{12}(1|2) V^{++}(2) \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{(u_1^+ u_2^+)^2} + \frac{1}{2} (D_2^{--})^2 \delta^{(2,-2)}(u_2, u_1) \right\} = \\ = & \int d\zeta_2^{(-4)} du_2 \{ \Pi_T^{(2,2)}(1|2) + \delta_A^{(2,2)}(1|2) \} V^{++}(2), \end{aligned}$$

где Π_T – аналитическое распределение со свойствами проекционного оператора [10]. Исключая теперь из (6) калибровочные степени свободы ω , после некоторой цепочки преобразований массового слагаемого получим

$$S_m = -\frac{m^2}{2g^2} \int d\zeta_1^{(-4)} du_1 d\zeta_2^{(-4)} du_2 V^{++}(1) \Pi_T^{(2,2)}(1|2) V^{++}(2) = \frac{m^2}{2g^2} \int d^8z W \frac{1}{\square} W. \quad (13)$$

В результате калибровочно-инвариантная форма массового члена полностью формулируется в терминах напряженности W . Очевидно, в неабелевом случае также можно пертурбативно найти ω -мультиплет в виде полинома по степеням V^{++} . Конечно, это разложение будет нелокальным выражением, но оно может быть локализовано посредством введения подходящих тензорных мультиплетов³⁾, и мы получаем интересную последовательность классических дуальностей с моделью, содержащей суперполя Штюкельберга ω . Аналогичная ситуация существует и при вычислении конденсатов $\langle A^2 \rangle$ в теории Янга–Миллса [19], где нелокальный калибровочно-инвариантный функционал, связанный с A^2 , содержит информацию о топологической структуре вакуума теории с неисчезающим вакуумным средним оператора (см. детальное обсуждение инфракрасной динамики $\mathcal{N} = 0$ теории Янга–Миллса в [20] и цитируемую там литературу).

Дальнейшей целью нашей работы является определение эффективного действия и анализ структуры однопетлевых расходимостей в теории с действием (6).

3. МЕТОД ФОНОВОГО ПОЛЯ

Калибровочно-инвариантное петлевое разложение эффективного действия в суперсимметричных теориях осуществляется в рамках суперполевого метода фонового поля (см., например, [8] для $\mathcal{N} = 1$ теорий и [14] для $\mathcal{N} = 2$ теорий). В формализме фонового поля мы должны последовательно выполнить фоновое-квантовое расщепление всех полей, фиксировать калибровочные степени свободы квантовых полей согласно процедуре Фаддеева–Попова и выполнить разложение в производящем функционале вершинных функций по степеням квантовых полей. При этом

³⁾Запишем действие для массивного тензорного мультиплета в гармоническом суперпространстве [11] в виде

$$S = \frac{1}{2} \int d\zeta^{-4} (G^{++})^2 + \frac{1}{2} m \left\{ \int d^8 z W \psi + \text{к.с.} \right\} + \frac{1}{2} \int d^8 z W^2,$$

где $G^{++}(z, u)$ – ограниченное связью $D^{++}G^{++} = 0$ действительное аналитическое суперполе. Эта связь может быть разрешена в терминах не зависящего от гармоник неограниченного кирального суперполя $\psi(z)$ и поля, ему сопряженного, в виде

$$G^{++}(z, u) = \frac{1}{8} (D^+)^2 \psi(z) + \frac{1}{8} (\bar{D}^+)^2 \bar{\psi}(z).$$

Это суперполе остается инвариантным относительно калибровочных преобразований

$$\delta\psi = i\Lambda, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}}^i \Lambda = 0, \quad D^{\alpha i} D_{\alpha}^j \Lambda = \bar{D}_{\dot{\alpha}}^i \bar{D}^{j\dot{\alpha}} \bar{\Lambda}.$$

Выберем функцию фиксации калибровки в виде

$$F^{++} = \frac{1}{8} (D^+)^2 \psi(z) - \frac{1}{8} (\bar{D}^+)^2 \bar{\psi}(z).$$

Тогда интегрирование в производящем функционале по препотенциалам $\psi, \bar{\psi}$,

$$\begin{aligned} Z &= \int D\psi D\bar{\psi} (\text{Det } \square) \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d\zeta^{-4} \{ (G^{++})^2 + (F^{++})^2 \} + \frac{i}{2} m \int d^8 z (W\psi + \text{к.с.}) \right\} = \\ &= \exp \left\{ i \int d^8 z \left(W \frac{m^2}{\square} W + \text{к.с.} \right) \right\}, \end{aligned}$$

приводит к нелокальному массовому слагаемому для векторного мультиплета (13).

вклад в эффективное действие в данном петлевом порядке вносит только конечное число членов разложения.

Рассмотрим теорию полей V^{++} , ω с действием (6). В секторе $\mathcal{N} = 2$ векторного мультиплетта V^{++} мы производим разделение $V^{++} \rightarrow V^{++} + gv^{++}$ и повторяем все те шаги, которые соответствуют безмассовой теории [14]. В секторе ω -мультиплетта с нелинейным киральным лагранжианом мы должны строить разложение, следуя теории возмущений в терминах не зависящих от параметризации инвариантных величин [17]. Основным моментом при фоново-квантовом разделении полей, принимающих значения на группе, является нелинейное правило группового сложения элементов группы Ли $\Omega(\omega)$ и $\Omega(\chi)$, определяемое соотношением [17]

$$\Omega(\omega \oplus \chi) = \Omega(\omega)\Omega\left(\frac{m}{g}\chi\right). \quad (14)$$

При таком правиле сложения полей $\Omega(\omega \oplus \chi)$ будет являться элементом того же пространства, что и $\Omega(\omega)$, и будет иметь тот же закон преобразования под действием группы, что и $\Omega(\omega)$.

Мы определим фоново-квантовое расщепление суперполя ω на фоновое суперполе ω и квантовое суперполе χ согласно правилу (14). Нетрудно показать, что фоновые ω -поля преобразуются, как в (5), а квантовые поля χ не преобразуются вовсе. При таком разделении полей на фоновые и квантовые как лагранжиан, так и все члены разложения в ряд Тейлора по квантовым полям будут инвариантны относительно локальной и глобальной групп преобразований. Как следствие, получающиеся контрчлены автоматически будут инвариантны относительно классических калибровочных и глобальных преобразований.

Для однопетлевых вычислений достаточно иметь разложение лагранжиана до второго порядка по квантовым полям v^{++} , χ :

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^{12}z du_1 du_2 \frac{v_a^{++}(1)v_a^{++}(2)}{(u_1^+ u_2^+)^2} - \frac{1}{2} \int d\zeta^{(-4)} du \{m^2(v_a^{++})^2 - \\ - 2mD^{++}\chi_a R_{ab}v_b^{++} + D^{++}\chi_a D^{++}\chi_a + f_{abc}D^{++}\chi_a \chi_b R_{cd}\mathcal{V}_d^{++}\}, \quad (15)$$

где изотопическая матрица $R_{ab}(\omega)$ определяется равенством $\Omega T_a \Omega^{-1} = R_{ab} T_b$. Как и в $\mathcal{N} = 0$ случае [16], она обладает следующими свойствами:

$$R_{ae}R_{be} = \delta_{ab}, \quad D^{++}R_{ab} = -R_{ae}f_{bec}L_c^{++}, \quad f_{abc} = R_{ad}R_{be}R_{cg}f_{deg}. \quad (16)$$

Мы должны также добавить к (15) член, фиксирующий калибровку в секторе квантового векторного суперполя, который удобно выбрать в фоново калибровочно-инвариантной форме

$$F^{(+4)} = \mathcal{D}^{++}v^{++}, \quad (17)$$

а также действие для духов Фаддеева–Попова и Нильсена–Каллош. Здесь мы следуем подходу, развитому в [14]. Чтобы фиксировать калибровку в функциональном интеграле $Z = N \int \mathcal{D}v^{++} e^{iS}$, согласно процедуре Фаддеева–Попова необходимо

вставить в него единицу, представленную в виде $1 = \Delta_{\text{FP}} \delta(F^{(+4)} - f^{(+4)})$, где детерминант Фаддеева–Попова имеет вид $\Delta_{\text{FP}}[v^{++}, V^{++}] = \text{Det}(\mathcal{D}^{++}(\mathcal{D}^{++} + iv^{++}))$. Далее мы должны вставить в функциональный интеграл единицу в виде

$$1 = \Delta_{\text{NK}} \int \mathcal{D}f^{(+4)} \exp \left\{ \frac{i}{2\alpha} \text{tr} \int d^{12}z du_1 du_2 f_{\tau}^{(+4)} \frac{(u_1^- u_2^-)}{(u_1^+ u_2^+)^3} f_{\tau}^{(+4)} \right\},$$

где α – калибровочный параметр, который в дальнейшем удобно выбрать равным -1 , $\Delta_{\text{NK}}[V^{++}]$ – детерминант Нильсена–Каллош и $f_{\tau}^{(+4)} = e^{-ib} f^{(+4)} e^{ib}$ – калибровочно-инвариантная функция со значениями в алгебре Ли калибровочной группы. Обратим внимание на то, что детерминант Нильсена–Каллош зависит от фонового суперполя, что означает присутствие третьего духа Нильсена–Каллош. Детали процедуры вычисления этого детерминанта $\Delta_{\text{NK}}[V^{++}] = \text{Det}^{-1/2}(\mathcal{D}^{++})^2 \text{Det}^{1/2} \widehat{\square}_{(4,0)}$ приведены в [14]. Здесь $\widehat{\square}$ есть ковариантно аналитический даламберриан, переводящий аналитические суперполя снова в аналитические суперполя [14]:

$$\begin{aligned} \widehat{\square} = & -\frac{1}{2}(\mathcal{D}^+)^4(\mathcal{D}^{--})^2 = \frac{1}{2}\mathcal{D}^{\alpha\dot{\alpha}}\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}} + \frac{i}{2}(\mathcal{D}^{+\alpha}W)\mathcal{D}_{\alpha}^{-} + \frac{i}{2}(\overline{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}^{+}\overline{W})\overline{\mathcal{D}}^{-\dot{\alpha}} + \\ & + \frac{1}{2}\{W, \overline{W}\} - \frac{i}{4}(\overline{\mathcal{D}}^{+}\overline{\mathcal{D}}^{+}\overline{W})\mathcal{D}^{--} + \frac{i}{8}[\mathcal{D}^+, \mathcal{D}^-]W. \end{aligned} \quad (18)$$

Конечный результат для лагранжиана, определяющего однопетлевые квантовые поправки в эффективное действие в секторе векторного мультиплетта, имеет вид

$$S_2 + S_{\text{GF}} = -\frac{1}{2} \text{tr} \int d\zeta^{(-4)} du v^{++} (\widehat{\square} + m^2) v^{++}. \quad (19)$$

Действие духов записывается как

$$S_{\text{ghost}} = \text{tr} \int d\zeta^{(-4)} du b(\mathcal{D}^{++})^2 c + \frac{1}{2} \int d\zeta^{(-4)} du \phi(\mathcal{D}^{++})^2 \phi + \text{tr} \int d\zeta^{(-4)} du \rho^{(+4)} \widehat{\square}_{4,0} \sigma. \quad (20)$$

Здесь b, c – антикоммутирующие суперполевые духи Фаддеева–Попова, $\rho^{(+4)}, \sigma$ – антикоммутирующие духи Нильсена–Каллош и ϕ – дополнительные коммутирующие духи со значениями в алгебре Ли калибровочной группы.

Суперполевое действие для квантового поля χ и его взаимодействия с квантовым полем v^{++} удобно записать в матричной форме

$$S_{\text{SYM}}^{(2)} + S_m^{(2)} = -\frac{1}{2} \int d\zeta^{(-4)} (v_a^{++}, \chi_a) \begin{pmatrix} \widehat{\square}_{ab} + m^2 & -mR_{ba}D^{++} \\ mD^{++}R_{ab} & -\nabla^{++}D^{++} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_b^{++} \\ \chi_b \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где D^{++} – обычная гармоническая производная [10], а

$$\nabla^{++}\chi_a = D^{++}\chi_a + f_{abc}\chi_b R_{cd}\mathcal{V}_a^{++} \quad (22)$$

представляет собой “удлиненную” производную в λ -базисе, где $\Omega\mathcal{V}_a^{++}T_a\Omega^{-1}$ играет роль (калибровочно-инвариантной) связности. Поскольку это поле является аналитическим, имеют место стандартные связи $[\nabla^{++}, \nabla_{\alpha,\dot{\alpha}}^+] = 0$. Здесь и далее для

единообразия используется обозначение $\nabla_{\alpha,\dot{\alpha}}^+ = D_{\alpha,\dot{\alpha}}^+$. Другие коммутационные соотношения, например

$$\begin{aligned} [\nabla^{++}, \nabla^{--}] &= D^0, & [\nabla^{\mp\mp}, \nabla_{\alpha,\dot{\alpha}}^{\pm}] &= \nabla_{\alpha,\dot{\alpha}}^{\mp}, \\ \{\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}^+, \nabla_{\alpha}^-\} &= -\{\nabla_{\alpha}^+, \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}^-\} = 2i\nabla_{\alpha\dot{\alpha}}, \\ \{\nabla_{\alpha}^+, \nabla_{\beta}^-\} &= -2i\epsilon_{\alpha\beta}\bar{\mathcal{W}}, & \{\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}^+, \bar{\nabla}_{\dot{\beta}}^-\} &= 2i\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\mathcal{W}, \end{aligned} \quad (23)$$

в точности копируют коммутационные соотношения для ковариантных производных $\mathcal{D}_{\alpha,\dot{\alpha}}^{\pm}$, $D^{\pm\pm,0}$ [14] и определяют $\nabla_{\alpha,\dot{\alpha}}^-$ и киральное суперполе гармонически независимой напряженности $\mathcal{W}[V^{++}] = -(\nabla^+)^2\mathcal{V}^{--}/4$, $\bar{\mathcal{W}}[V^{++}] = -(\bar{\nabla}^+)^2\mathcal{V}^{--}/4$ для калибровочно-инвариантного потенциала $\Omega V^{++}\Omega^{-1}$.

4. ОДНОПЕТЛЕВЫЕ РАСХОДИМОСТИ

Перейдем к анализу однопетлевых расходимостей в рассматриваемой теории. Эффективное действие дается суммой вкладов от действия квантовых суперполей духов (20) и действия квантовых суперполей v^{++} , χ (21):

$$\Gamma^{(1)}[V^{++}, \omega] = \Gamma_1^{(1)}[V^{++}] + \Gamma_2^{(1)}[V^{++}, \mathcal{V}^{++}], \quad (24)$$

где $\Gamma_1^{(1)}[V^{++}]$ – вклад духов в эффективное действие, $\Gamma_2^{(1)}[V^{++}, \mathcal{V}^{++}]$ – вклад от суперполей v^{++} и χ . Здесь $\mathcal{V}^{++}$ дается выражением (7). Заметим, что вся зависимость эффективного действия от суперполя Штюкельберга ω содержится в V^{++} (7). Действия (20), (21) полностью определяют структуру пертурбативного разложения для вычисления однопетлевого эффективного действия массивной $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории поля Янга–Миллса в явно суперсимметричной и калибровочно-инвариантной форме. Далее мы интересуемся только структурой расходимостей рассматриваемой теории. Для этой цели мы используем размерную регуляризацию (см. применение размерной регуляризации в суперполевых теориях в [8]) и схему минимальных вычитаний.

Вклад в однопетлевое эффективное действие, обусловленный духами, зависит только от потенциала V^{++} и точно совпадает с соответствующим вкладом для обычной безмассовой $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории поля Янга–Миллса [14]:

$$i\Gamma_1^{(1)}[V^{++}] = \text{Tr} \ln(\mathcal{D}^{++})^2 - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln(\mathcal{D}^{++})^2 + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \widehat{\square}_{(4,0)}. \quad (25)$$

Поэтому мы можем без каких-либо изменений воспользоваться результатами работ [14], [18] для расходящейся части эффективного действия:

$$\Gamma_{1,\text{div}}^{(1)}[V^{++}] = -\frac{C_2}{32\pi^2\varepsilon} \text{tr} \int d^8z W^2, \quad (26)$$

где C_2 – квадратичный оператор Казимира калибровочной группы и ε – параметр размерной регуляризации.

Новые вклады в расходимости соответствуют однопетлевым поправкам в эффективное действие, связанным с квантовыми полями v^{++} , χ внутри петли и их смешиванием. Для вычисления функционального детерминанта матричного оператора в действии (21) удобно привести матрицу к диагональному виду и записать ее как

$$\begin{pmatrix} 1 & mRD^{++}\frac{1}{\nabla^{++}D^{++}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\square} + m^2 - m^2RD^{++}\frac{1}{\nabla^{++}D^{++}}D^{++}R & 0 \\ 0 & -\nabla^{++}D^{++} \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\nabla^{++}D^{++}}mD^{++}R & 1 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Тогда все вклады в эффективное действие обусловлены диагональными элементами матрицы

$$\begin{pmatrix} \widehat{\square} + m^2\Pi^T & 0 \\ 0 & -\nabla^{++}D^{++} \end{pmatrix}, \quad (28)$$

где было использовано обозначение Π^T для ковариантно аналитического распределения [14] со свойствами проекционного оператора. Хорошо известно, что оператор $\widehat{\square} + m^2\Pi^T$, так же как и $\widehat{\square}_{(4,0)}$, не вносит вклад в голоморфную часть эффективного действия [14], [18]. Тогда все возможные вклады в однопетлевой контрчлен возникают за счет известного вклада духов (26) и вклада

$$\Gamma_2^{(1)}[0, \mathcal{V}^{++}] = \Gamma^{(1)}[\mathcal{V}^{++}] = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln(\nabla^{++}D^{++}) \quad (29)$$

квантовых суперполей χ , обусловленного правым нижним блоком в (28). Для того чтобы воспользоваться известными приемами вычисления [14], [18] для $\Gamma^{(1)}[\mathcal{V}^{++}]$, мы приведем дифференциальный оператор, присутствующий в (29), к виду

$$(\nabla^{++})^2 + U^{(+4)}, \quad (30)$$

где

$$U_{ab}^{(+4)} = \frac{1}{2}f_{abc}D^{++}\mathcal{V}_c^{++} + \frac{1}{4}f_{ace}f_{bde}\mathcal{V}_c^{++}\mathcal{V}_d^{++}. \quad (31)$$

Очевидно, что точная функция Грина для оператора $(\nabla^{++})^2$ совпадает с (12) после замены $D^{++} \rightarrow \nabla^{++}$, $W \rightarrow \mathcal{W}$. Функция Грина для омега-мультиплета во внешнем поле $U^{(+4)}$ определяется уравнением

$$[(\nabla_1^{++})^2 + U_1^{(+4)}]G_U^{(0,0)}(1|2) = \delta_A^{(4,0)}(1|2). \quad (32)$$

Определим аналитическое суперполевое ядро согласно правилу

$$G^{(0,0)}(1|2) = \int d\zeta_3^{(-4)} G_U^{(0,0)}(1|3)Q^{(4,0)}(3|2),$$

где $G^{(0,0)}(1|2)$ – функция Грина во внешнем поле $\mathcal{V}^{++}$, удовлетворяющая уравнению $(\nabla_1^{++})^2 G^{(0,0)}(1|2) = \delta^{(4,0)}(1|2)$. Это ядро содержит все эффекты внешнего поля:

$$Q^{(4,0)}(1|2) = \delta_A^{(4,0)}(1|2) + U_1^{(+4)}G^{(0,0)}(1|2). \quad (33)$$

Тогда эффективное действие определяется как

$$\Gamma[\mathcal{V}^{++}] = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln((\nabla^{++})^2 + U^{(4)}) = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln(\nabla^{++})^2 + \frac{i}{2} \text{Tr} \ln Q^{(4,0)}. \quad (34)$$

Первое слагаемое в правой части этого уравнения точно совпадает с известным однопетлевым вкладом гипермультиплетта во внешнем поле [18]. Это можно легко увидеть из сравнения этого вклада с выражением (26). Все различия состоят в замене знака на противоположный и замене суперполевой напряженности $W[V^{++}] = -(\overline{D}^+)^2 V^{--}/4$ на $\mathcal{W}[\mathcal{V}^{++}] = -(\overline{\nabla}^+)^2 \mathcal{V}^{--}/4$. Поэтому без всяких новых вычислений мы можем написать дополнительный к (26) вклад для расходящейся части эффективного действия:

$${}_1\Gamma_{\text{div}}^{(1)}[\mathcal{V}^{++}] = \frac{C_2}{32\pi^2\varepsilon} \text{tr} \int d^8z \mathcal{W}^2. \quad (35)$$

На языке диаграмм разложение второго члена в правой части равенства (34) в ряд по степеням взаимодействия полей внутри петли с внешними вставками $U^{(4)}$ и пропагатором во внешнем поле $\mathcal{V}^{++}$ имеет вид

$$\Gamma[U^{(4)}] = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n[U^{(4)}], \quad (36)$$

где n -й член этого ряда описывается суперграфом с n внешними линиями $U^{(4)}$. Таким образом, функционал (34) содержит всю информацию об однопетлевых вкладах с произвольным числом внешних линий $\mathcal{V}^{++}$.

Первый член (29) в разложении $\Gamma[\mathcal{V}^{++}]$ в ряд теории возмущений по степеням $U^{(4)}$ равен нулю, поскольку он содержит исчезающее в пределе совпадения аргументов произведение гармоник: $u_1^- u_2^-|_{u_1=u_2} = 0$. Во втором порядке эффективное действие имеет вид

$$\begin{aligned} {}_2\Gamma^{(1)}[\mathcal{V}^{++}] &= -\frac{i}{4} \text{tr} \int d\zeta_1^{(-4)} d\zeta_2^{(-4)} du_1 du_2 U^{(4)}(1) U^{(4)}(2) \times \\ &\times \frac{1}{\square_1} (\nabla_1^+)^4 (\nabla_2^+)^4 \delta^{12}(1|2) \frac{u_1^- u_2^-}{(u_1^+ u_2^+)^3} \frac{1}{\square_2} (\nabla_2^+)^4 (\nabla_1^+)^4 \delta^{12}(2|1) \frac{u_2^- u_1^-}{(u_2^+ u_1^+)^3}. \end{aligned}$$

Восстанавливая полную грассманову меру интегрирования, мы снимаем одну дельта-функцию и используем тождество $(D_1^+)^4 (D_1^+)^4 \delta^8(\theta - \theta')|_{\theta=\theta'} = (u_1^+ u_2^+)^4$. Далее, после стандартных преобразований расходящийся вклад принимает вид

$${}_2\Gamma_{\text{div}}^{(1)}[\mathcal{V}^{++}] = \frac{1}{(8\pi)^2\varepsilon} \text{tr} \int d^{12}z du_1 du_2 U^{(4)}(z, u_1) U^{(4)}(z, u_2) \frac{(u_1^- u_2^-)^2}{(u_1^+ u_2^+)^2}. \quad (37)$$

Следующие члены в разложении (29) дают конечные вклады в эффективное действие.

Соотношение (37) является основным результатом нашей работы. Оно представляет собой новый суперполевой контрчлен в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной массивной теории поля Янга–Миллса в формализме Штюкельберга, зависящий от фонового суперполя ω . Очевидно, что на массовой оболочке этот функционал не содержит

гармонических сингулярностей. Это следует из того факта, что ненулевой вклад в интеграл по нечетным координатам должен содержать максимальную степень грассмановых координат в каждом из сомножителей. Но $(\theta_1^+)^2(\bar{\theta}_1^+)^2(\theta_2^+)^2(\bar{\theta}_2^+)^2 = (u_1^+ u_2^+)^4(\theta)^4(\bar{\theta})^4$. Среди многих членов в компонентной форме функционал (37) содержит нестандартные контактные четырехвекторные взаимодействия и члены, необходимые для их суперсимметризации. Так, для калибровочной группы $SU(2)$ эти взаимодействия имеют вид $a_m^i a_n^i a_m^j a_n^j + (a_m^i a_m^i)^2$, где $a_m = A_m - L_m$ – векторная компонента $SU(2)$ -суперполя $\mathcal{V}^{++}$ (7). Для калибровочной группы $SU(3)$ соответствующие взаимодействия выглядят так: $5(a_m^a a_m^a)^2/6 + a_m^a a_n^a a_m^b a_n^b - d_{abe} d_{ecd} a_m^a a_n^b \times a_m^c a_n^d$. Именно такой контрчлен возникает как препятствие для ренормируемости и в обычной несуперсимметричной массивной теории поля Янга–Миллса [15], [16]. Подобные отклонения от Стандартной Модели ведут к интересным феноменологическим следствиям, например, для процессов рождения $W^+ W^-$, WZ векторных бозонов (см. [21] и цитируемую там литературу). Заметим, что, в отличие от несуперсимметричного случая [16], массовое слагаемое в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной массивной теории поля Янга–Миллса не ренормируется.

Все контрчлены (26), (35), (37)⁴ явно калибровочно-инвариантны, причем контрчлены (35), (36) не имеют формы исходного лагранжиана. Тогда $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричная теория поля Янга–Миллса с массой, точно так же, как и несуперсимметричная $\mathcal{N} = 0$ массивная теория поля Янга–Миллса, может рассматриваться только как низкоэнергетическая эффективная теория. Другими словами, действие (6) не является наиболее общим $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричным функционалом, совместным с локальной левой и глобальной правой калибровочными симметриями теории, и для ренормируемости теории в современном смысле (см., например, [22]) в следующем порядке разложения эффективного действия по производным необходимо рассматривать новые вершины, индуцированные функционалами (35), (37).

5. О КОМПОНЕНТНОЙ СТРУКТУРЕ $\mathcal{N} = 2$ СУПЕРПОЛЕВОГО ФУНКЦИОНАЛА (35)

Отдельной интересной задачей является изучение специфических особенностей компонентного разложения $\mathcal{N} = 2$ суперполевого напряженности $\mathcal{W}$, построенной для калибровочно-инвариантного потенциала $\Omega \mathcal{V}^{++} \Omega^{-1}$, который включает в себя дополнительную степень свободы в векторном мультиплете, обусловленную суперполем Штюкельберга ω . Очевидно, это инвариантное относительно калибровочных преобразований суперполе отличается от ковариантного кирального суперполя напряженности, построенного по потенциалу $\mathcal{V}^{++}$, только Ω -обкладками, которые исчезают под знаком следа.

Как правило, $\mathcal{N} = 2$ суперполевого формализм наиболее адекватно описывает супермультиплеты вне массовой оболочки и процедуру включения их взаимодействия. Однако переход к компонентным полям требует исключения бесконечного

⁴В схеме минимальных вычитаний контрчлены отличаются от расходимостей (26), (35), (37) только знаками.

числа вспомогательных полей, что является технически достаточно сложной задачей. Нахождение компонентной структуры контрчлена (26) не вызывает трудности, его компонентная форма совпадает с классическим действием $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории поля Янга–Миллса [9], [10]. Но при этом компонентная форма (35), (37) требует специального рассмотрения, поскольку потенциал (7) преобразуется как ${}^g\mathcal{V}^{++} = e^{i\lambda}\mathcal{V}^{++}e^{-i\lambda}$ и в отличие от закона преобразования для V^{++} в данном законе преобразования отсутствует член с производной $D^{++}\lambda$. В силу этого суперполе $\mathcal{V}^{++}$ содержит в секторе векторного поля неустранимые продольные степени свободы. В частности, калибровка типа Весса–Зумино для $\mathcal{V}^{++}$ невозможна. Таким образом, задача нахождения компонентной формы суперполевого функционала (35) предполагает компонентное разложение $\mathcal{W}$ без наложения калибровки на $\mathcal{V}^{++}$. Общее решение этой задачи в литературе не рассматривалось. Частные аспекты компонентной структуры массивного векторного мультиплетта без фиксации суперкалибровки изучались в [23] для абелевого случая и для неабелевого случая в первом порядке по константе связи.

В этом разделе мы опишем процедуру нахождения компонентной формы суперполевого функционала (35) в бозонном секторе, в котором компонентный состав суперполя $\mathcal{V}^{++}$, необходимый для записи (35), (37) в терминах физических полей, фактически совпадает с компонентной структурой суперполя V^{++} в калибровке Весса–Зумино, где, однако, каждая компонента “обрастает” бесконечной башней взаимодействий с продольными степенями свободы, связанными с компонентными полями ω -мультиплетта.

Удобный способ нахождения компонентного состава суперполевого напряженности для нестандартных теорий [24] основан на решении гармонического уравнения нулевой кривизны [9], [10] для неаналитического потенциала $\mathcal{V}^{--}$:

$$D^{++}\mathcal{V}^{--} - D^{--}\mathcal{V}^{++} + i[\mathcal{V}^{++}, \mathcal{V}^{--}] = 0. \quad (38)$$

Поскольку $\mathcal{V}^{++} = V^{++} - L^{++}$ и V^{++} подчиняется обычным калибровочным преобразованиям, мы можем наложить на V^{++} калибровку Весса–Зумино. В результате калибровочно-ковариантный аналитический потенциал (7) принимает вид (10):

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{++}(\zeta) = & f^{++}(x_A) + (\theta^+)^2 \bar{\varphi}(x_A) + (\bar{\theta}^+)^2 \varphi(x_A) + \\ & + 2i(\theta^+ \sigma^m \bar{\theta}^+)(A_m(x_A) + \partial_m f^{+-}(x_A)) - (\theta^+)^2 (\bar{\theta}^+)^2 \square f^{--}(x_A) + \text{fermions}, \end{aligned} \quad (39)$$

где $\zeta = (x_A^m, \theta^{\pm\alpha}, \bar{\theta}^{\pm\dot{\alpha}}, u_i^{\pm})$ и мы сохранили обозначения для компонентной формы потенциала в калибровке Весса–Зумино. При этом мы должны помнить, что каждая компонента V^{++} дополнена бесконечным рядом по степеням взаимодействия с компонентами ω -мультиплетта $\omega(\zeta) = \omega(x_A) + \omega^{(ij)}(x_A)u_i^+ u_j^-$. Поскольку суперполевая напряженность

$$\mathcal{W} = -\frac{1}{4}(\bar{D}^+)^2 \mathcal{V}^{--} \quad (40)$$

является не зависящим от гармоник $\mathcal{N} = 2$ киральным суперполем, решение уравнения (38) удобно искать в кирально-аналитических координатах $Z_c = (z_c, \bar{\theta}^{\pm\dot{\alpha}})$, где

$$z_c = (x_L^m, \theta^{\pm\alpha}), \quad x_L^m = x_A^m + 2i\theta^- \sigma^m \bar{\theta}^+.$$

В этом базисе каждая компонента потенциала (39) разлагается как

$$f(x_A) = f(x_L) - 2i\theta^- \sigma^m \bar{\theta}^+ \partial_m f(x_L) + (\theta^-)^2 (\bar{\theta}^+)^2 \square f(x_L).$$

Следуя [24], удобно представить разложение $\mathcal{V}^{--}$ в этих координатах в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{--}(Z_c, u) = & v^{--}(x_L, \theta^\pm, u) + \bar{\theta}_\alpha^+ v^{(-3)\dot{\alpha}} + \bar{\theta}_\alpha^- v^{-\dot{\alpha}} + \\ & + (\bar{\theta}^-)^2 \mathcal{A} + (\bar{\theta}^+ \bar{\theta}^-) \varphi^{--} + \bar{\theta}^{-\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{+\dot{\beta}} \varphi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}^{--} + \\ & + (\bar{\theta}^+)^2 v^{(-4)} + (\bar{\theta}^-)^2 \bar{\theta}_\alpha^+ \tau^{-\dot{\alpha}} + (\bar{\theta}^+)^2 \bar{\theta}_\alpha^- \tau^{(-3)\dot{\alpha}} + (\bar{\theta}^+)^2 (\bar{\theta}^-)^2 \tau^{--}. \end{aligned}$$

Заметим, что напряженность (40) определяется не всеми киральными суперполями этого разложения, а только $\mathcal{A}$, $\tau^{-\dot{\alpha}}$, τ^{--} . Однако фактически, как показано в работе [24], только киральное суперполе

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + (\theta^-)^2 \mathcal{A}_4^{++} + (\theta^- \theta^+) \mathcal{A}_5 + \theta^{-\alpha} \theta^{+\beta} \mathcal{A}_{6\alpha\beta} + (\theta^+)^2 \mathcal{A}_7^{--} + (\theta^-)^2 (\theta^+)^2 \mathcal{A}_{10} + \text{fermions}$$

определяет компонентную форму суперполевого функционала (35), которая в бозонном секторе выглядит следующим образом:

$$S_{\text{bos}} = \frac{1}{4} \text{tr} \int d^4 x_L du \left\{ 2\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_{10} + 2\mathcal{A}_4^{++} \mathcal{A}_7^{--} - \frac{1}{2} \mathcal{A}_5^2 - \frac{1}{4} \mathcal{A}_6^2 \right\}. \quad (41)$$

Уравнения, определяющие компоненты суперполя $\mathcal{A}$, строятся как коэффициенты в разложении (38) по степеням $\theta^\pm$, $\bar{\theta}^\pm$:

$$\begin{aligned} d^{++} \mathcal{A}_1 = 0, \quad d^{++} \mathcal{A}_4^{++} = 0, \quad d^{++} \mathcal{A}_5 + 4\mathcal{A}_4^{++} = 0, \quad d^{++} \mathcal{A}_{6\alpha\beta} = 0, \\ d^{++} \mathcal{A}_7^{--} + 2\mathcal{A}_5 + [\bar{\phi}, \mathcal{A}_1] = 0, \quad d^{++} \mathcal{A}_{10} + [\bar{\phi}, \mathcal{A}_4^{++}] = 0, \end{aligned} \quad (42)$$

где введено обозначение

$$d^{++} \mathcal{A} = \partial^{++} \mathcal{A} + i[f^{++}, \mathcal{A}].$$

Общее решение этого набора гармонических уравнений может быть записано в терминах функций Грина для оператора ∂^{++} [10]. Так, решение для первого уравнения из цепочки (42) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1(u) = & \varphi - i \int du_1 \frac{u^+ u_1^-}{u^+ u_1^+} [f^{++}(u_1), \mathcal{A}_1(u_1)] = \\ = & \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int du_1 \dots du_n \frac{u^+ u_1^-}{u^+ u_1^+} \dots \frac{u_{n-1}^+ u_n^-}{u_{n-1}^+ u_n^+} \times \\ & \times [f^{++}(u_1), [\dots, [f^{++}(u_n), \varphi]]] = e^{ib} \varphi, \end{aligned} \quad (43)$$

где φ – частное решение однородного уравнения, а e^{ib} – неаналитическое суперполе, называемое мостом [9], [10] для поля $f^{++} = -ie^{ib} \partial^{++} e^{-ib}$. Это решение может быть построено итерациями с помощью ряда Тейлора по степеням f^{++} , как это было сделано в [9].

Таким образом, каждая компонента $\mathcal{A}$ определяется бесконечным рядом по степеням взаимодействия обычных компонент суперполя W с полем f^{++} :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4^{++} &= e^{ib} \square f^{++}, & \mathcal{A}_7^{--} &= 4e^{ib} \square f^{--}, & \mathcal{A}_6^{\alpha\beta} &= e^{ib} F^{\alpha\beta}, \\ \mathcal{A}_5 &= e^{ib} \left(-4 \square f^{+-} + \frac{1}{2} [\varphi, \bar{\varphi}] \right), & \mathcal{A}_{10} &= e^{ib} \left(-\square \bar{\varphi} + \frac{1}{8} [\bar{\varphi}, [\bar{\varphi}, \varphi]] \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь компонентные поля f^{ij} , φ , $\bar{\varphi}$, $F^{\alpha\beta}$ определяются разложением (39), а действие матричного оператора e^{ib} дается соотношением (43).

Итак, наше рассмотрение доказывает, что существует формальное решение для компонент суперполевого напряженности (40) в неполиномиальной форме, и действие (41) содержит кроме стандартного действия в калибровке Весса–Зумино, модифицированного взаимодействием с компонентами ω -мультиплета, четвертые степени пространственно-временных производных ω , $\omega^{(ij)}$ компонент ω -мультиплета. Нахождение более детальной компонентной формы для выражения (41) является технически очень сложной задачей, хотя описанная процедура в принципе дает ее решение. Заметим также, что в секторе компонент векторного мультиплета (т.е. при выключенной зависимости от компонент ω -мультиплета) расходимости (26) и (35) сокращаются.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведем основные результаты работы.

1. Рассмотрена $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричная массивная теория поля Янга–Миллса, действие которой зависит от $\mathcal{N} = 2$ калибровочного суперполя V^{++} и гипермультиплетного суперполя Штюкельберга ω . Предложены различные дуально эквивалентные формулировки этой теории, отличающиеся способами введения калибровочно-инвариантного массивного слагаемого в суперполевое действие.

2. Развита метод фонового поля, позволяющий получить петлевое разложение эффективного действия в явно калибровочно-инвариантной и $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной форме. Показано, что вклад суперполя Штюкельберга ω в эффективное действие формулируется в терминах суперполя $\mathcal{V}^{++}$ (7), являющегося специальной калибровочно-ковариантной комбинацией фоновых суперполей V^{++} и ω .

3. Изучена структура однопетлевых расходимостей рассматриваемой теории. Получены явно калибровочно-инвариантные и $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричные выражения для однопетлевых расходимостей (26), (35), (37). Обратим внимание на то, что выражение (37) представляет собой новый калибровочно-инвариантный и $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричный функционал, построенный из суперполей V^{++} и ω . Появление этого функционала в качестве выражения, определяющего однопетлевые расходимости, позволяет сделать заключение о (мультипликативной) неперенормируемости рассматриваемой теории. Данный функционал можно рассматривать как $\mathcal{N} = 2$ суперсимметризацию ковариантного контрчлена в несуперсимметричной теории поля Янга–Миллса [15], [16]. Однако в отличие от несуперсимметричного случая массовое слагаемое в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной массивной теории поля Янга–Миллса не ренормируется. Таким образом, дан полный анализ $\mathcal{N} = 2$ суперполевого структуры

однопетлевых расходимостей в рассматриваемой теории. Частичной проверкой полученных результатов является предельный случай выключенного взаимодействия векторного мультиплета с мультиплетом Штюкельберга или, другими словами, предел нулевой массы. В этом пределе мы имеем единственную расходимость, обусловленную однопетлевыми вкладами духов (26), которая определяет известное значение для β -функции чистой $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории поля Янга–Миллса [18].

4. Рассмотрена компонентная структура контрчлена вида (35) в бозонном секторе. Поскольку калибровочное преобразование для $\mathcal{V}^{++}$ (7) не содержат производной калибровочного параметра, мы не можем наложить на $\mathcal{V}^{++}$ калибровку Весса–Зумино, обычно используемую при переходе от суперполевого описания векторного мультиплета к компонентному описанию. В связи с этим возникает проблема нахождения компонентной формы суперполевого функционала (35). Предложена процедура решения этой проблемы в бозонном секторе (см. (41), (44)).

Обсудим кратко перспективы дальнейшего исследования $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной массивной теории поля Янга–Миллса. Как известно, $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричная безмассовая теория поля Янга–Миллса конечна за пределами однопетлевого приближения (см., например, [14]). Вопрос о расходимостях рассматриваемой массивной теории в высших петлях является открытым. Представляет определенный интерес нахождение конечных вкладов в однопетлевое эффективное действие и изучение эффективного действия при наличии взаимодействия массивного калибровочного $\mathcal{N} = 2$ суперполя с материальными гипермультиплетами. Особый интерес, на наш взгляд, вызывает проблема квантовой эквивалентности массивной $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории поля Янга–Миллса в рамках формализма Штюкельберга и $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных неабелевых вектор-тензорных моделей, которые, как было показано, дуальны на классическом уровне.

Благодарности. Н. Г. Плетнев благодарен И. Самсонову за полезные обсуждения. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты № 06-02-16346, 08-02-00334-а), ИНТАС (грант № 05-7928) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2553.2008.2).

Список литературы

- [1] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *ТМФ*, **3**:1 (1970), 18–23; А. И. Вайнштейн, И. Б. Хрипович, *ЯФ*, **13** (1971), 198–211; М. Veltman, *Nucl. Phys. B*, **7**:5 (1968), 637–650; G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B*, **33**:1 (1971), 173–199.
- [2] Т. С. G. Stueckelberg, *Helv. Phys. Acta*, **11** (1938), 225–244; В. И. Огиевецкий, И. В. Полубаринов, *Письма в ЖЭТФ*, **14** (1962), 179–184.
- [3] H. Ruegg, M. Ruiz-Altaba, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:20 (2004), 3265–3347.
- [4] N. Dragon, T. Hurth, P. van Nieuwenhuizen, *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, **56**:3 (1997), 318–321; B. Krs, P. Nath, *JHEP*, **07** (2005), 069; D. Bettinelli, R. Ferrari, A. Quadri, *Phys. Rev. D*, **77** (2008), 045021; [arXiv: 0705.2339](https://arxiv.org/abs/0705.2339).
- [5] D. Z. Freedman, P. K. Townsend, *Nucl. Phys. B*, **177**:2 (1981), 282–296.
- [6] А. А. Цейтлин, *ЯФ*, **40** (1984), 1363; E. S. Fradkin, A. A. Tseytlin, *Ann. Phys.*, **162**:1 (1985), 31–48; А. А. Славнов, С. А. Фролов, *ТМФ*, **75**:2 (1988), 201–211; I. L. Buchbinder, S. M. Kuzenko, *Nucl. Phys. B*, **308**:1 (1988), 162–190.

- [7] M. Graña, *Phys. Rep.*, **423**:3 (2006), 91–158; M.R. Douglas, S. Kachru, *Rev. Modern Phys.*, **79**:2 (2007), 733–796.
- [8] I. L. Buchbinder, S. M. Kuzenko, *Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity or a Walk Through Superspace*, Studies in High Energy Physics Cosmology and Gravitation, IOP, Bristol, 1998.
- [9] A. Galperin, E. Ivanov, S. Kalitzin et al., *Classical Quantum Gravity*, **1**:5 (1984), 469–498; A. Galperin, E. Ivanov, V. Ogievetsky et al., *Classical Quantum Gravity*, **2**:5 (1985), 601–616; 617–630; Б. М. Зупник, *ТМФ*, **69**:2 (1986), 207–213; В. М. Zupnik, *Phys. Lett. B*, **183**:2 (1987), 175–176.
- [10] A. S. Galperin, E. A. Ivanov, V. I. Ogievetsky, E. S. Sokatchev, *Harmonic Superspace*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [11] S. M. Kuzenko, *JHEP*, **01** (2005), 041.
- [12] Т. Kunimasa, Т. Gotō, *Progr. Theoret. Phys.*, **37**:2 (1967), 452–464; И. Я. Арефьева, А. А. Славнов, *ТМФ*, **44**:1 (1980), 3–16.
- [13] G. A. Khelashvili, V. I. Ogievetsky, *Modern Phys. Lett. A*, **6**:23 (1991), 2143–2154.
- [14] I. L. Buchbinder, E. I. Buchbinder, S. M. Kuzenko, B. A. Ovrut, *Phys. Lett. B*, **417**:1–2 (1998), 61–71; I. L. Buchbinder, S. M. Kuzenko, B. A. Ovrut, *Phys. Lett. B*, **433**:3–4 (1998), 335–345; Е. И. Бухбиндер, Б. А. Оврут, И. Л. Бухбиндер и др., *ЭЧАЯ*, **32**:5 (2001), 1222–1290.
- [15] K. Shizuya, *Nucl. Phys. B*, **121**:1 (1977), 125–140.
- [16] Yu. N. Kafiev, *Nucl. Phys. B*, **201**:2 (1982), 341–351.
- [17] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *ТМФ*, **8**:3 (1971), 297–307; Д. В. Волков, *ЭЧАЯ*, **4**:1 (1973), 3–41; В. Н. Первушин, *ТМФ*, **22**:3 (1975), 291–299; Д. И. Казаков, В. Н. Первушин, С. В. Пушкин, *ТМФ*, **31**:2 (1977), 169–176; Д. И. Kazakov, V. N. Pervushin, S. V. Pushkin, *J. Phys. A*, **11**:10 (1978), 2093–2105.
- [18] I. L. Buchbinder, E. I. Buchbinder, E. A. Ivanov et al, *Phys. Lett. B*, **412**:3–4 (1997), 309–319; S. Eremin, E. Ivanov, *Modern Phys. Lett. A*, **15**:30 (2000), 1859–1877; I. L. Buchbinder, S. M. Kuzenko, *Modern Phys. Lett. A*, **13**:20 (1998), 1623–1635; E. I. Buchbinder, I. L. Buchbinder, S. M. Kuzenko, *Phys. Lett. B*, **446**:3–4 (1999), 216–223; I. L. Buchbinder, I. B. Samsonov, *Modern Phys. Lett. A*, **14**:36 (1999), 2537–2544; I. L. Buchbinder, S. M. Kuzenko, A. A. Tseytlin, *Phys. Rev. D*, **62**:4 (2000), 045001; I. L. Buchbinder, A. Yu. Petrov, A. A. Tseytlin, *Nucl. Phys. B*, **621**:1–2 (2002), 179–207; I. L. Buchbinder, E. A. Ivanov, A. Yu. Petrov, *Nucl. Phys. B*, **653**:1–2 (2003), 64–84; I. L. Buchbinder, N. G. Pletnev, *JHEP*, **09** (2005), 073; **04** (2007), 096.
- [19] F. V. Gubarev, L. Stodolsky, V. I. Zakharov, *Phys. Rev. Lett.*, **86**:11 (2001), 2220–2222; F. V. Gubarev, V. I. Zakharov, *Phys. Lett. B*, **501**:1–2 (2001), 28–36.
- [20] M. A. L. Capri, D. Dudal, J. A. Gracey et al., *Phys. Rev. D*, **72**:10 (2005), 105016.
- [21] G. Cvetič, R. Kögerler, *Nucl. Phys. B*, **363**:2–3 (1991), 401–424; *Z. Phys. C*, **48**:1 (1990), 109–119; G. Cvetič, C. Grosse-Knetter, R. Kögerler, *Internat. J. Modern Phys. A*, **9**:30 (1994), 5313–5358.
- [22] С. Вайнберг, *Квантовая теория поля. Т. 2. Современные приложения*, Физмалит, М., 2003; J. Gomis, S. Weinberg, *Nucl. Phys. B*, **469** (1996), 473–487.
- [23] Г. Г. Волков, А. А. Масликов, *ЯФ*, **57** (1994), 351–360.
- [24] S. Ferrara, E. Ivanov, O. Lechtenfeld et al., *Nucl. Phys. B*, **704**:1–2 (2005), 154–180.

Поступила в редакцию 27.09.2007,
после доработки 1.11.2007